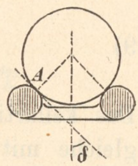
Soll ein runder Körper zwischen den Bäumen einer sog. Streichleiter gleiten (Fig. 250) und ist $\delta = 45^0$ der Winkel der Tangente bei $A$ mit der Mittelebene, so wird $f : \sin \delta = 1{,}414\, f$ als Reibungsziffer einzuführen sein, also wenn, wie in dem Beispiele auf S. 194, $f = 0{,}3$ ist, statt dessen $0{,}42$. Bei $\alpha = 45^0$ wird dann $K = 100{,}4$, $K_1 = 41^{kg}$.

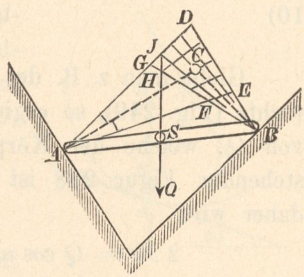
Fig. 250.




### d) Stabförmiger Körper, von zwei Ebenen gestützt.

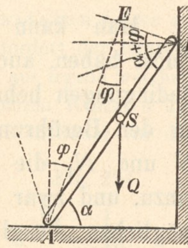
Der Körper mit dem Schwerpunkte $S$ möge die Ebenen in den Punkten $A$ und $B$ berühren (Fig. 251), u. zw. sollen $A$, $B$ und $S$ in einer lothrechten Ebene liegen, zu welcher die beiden Stützebenen rechtwinklig sind. Wären die Körper völlig glatt, so könnten in $A$ und $B$ nur Normaldrücke $N$ und $N_1$ entstehen, durch deren Schnittpunkt $C$ die Schwerlinie des Stabes gehen müsste, wenn Gleichgewicht bestehen sollte. Bei vorhandener Rauhigkeit aber hat man in $A$ und $B$ die Reibungskegel zu zeichnen; die Mittelschnitte derselben haben ein Viereck $DEFG$ gemeinsam, und dies Reibungsviereck ist der Bereich aller möglichen Schnittpunkte der Widerstände $W$ und $W_1$ der Stützpunkte $A$ und $B$. Da nun für Gleichgewicht die Kraft $Q$ mit $W$ und $W_1$ einen gemeinsamen Schnittpunkt haben muss, so erfordert der Ruhezustand, dass die Schwerlinie des Stabes durch das Viereck hindurchgehen muss. Schneidet die Schwerlinie das Viereck aber vielleicht in $HJ$, so sind längs dieser Strecke $HJ$ unendlich viele Schnittpunkte von $W$, $W_1$ und $Q$ möglich, daher sind auch $W$ und $W_1$ nach Richtung und Grösse unbestimmt. Nur wenn $Q$ durch einen der Grenzpunkte $E$ und $G$ des Vierecks geht, ist die Richtung (und dann auch die Grösse) von $W$ und $W_1$ bestimmt. In diesen Fällen befindet sich der Stab im Grenzzustande der Ruhe; $W$ und $W_1$ liegen auf den Mantelflächen der Reibungskegel, es treten von $A$ und $B$ die vollen Reibungswerthe auf, und bei dem geringsten Anstosse geräth der Stab ins Gleiten.

Fig. 251.



**Ruhezustand einer Leiter.** Eine Leiter $AB$ von der Länge $l$ stütze sich bei $A$ gegen den Boden, lehne sich bei $B$ gegen eine lothrechte Wand (Fig. 252). Die Reibungsziffern für beide Ebenen seien die gleichen. Der Schwerpunkt $S$ der (etwa belasteten) Leiter liege um $AS = nl$ von $A$ entfernt. Gesucht wird der Neigungswinkel $\alpha$, unter dem die Leiter an der Grenze des Ruhezustandes ist.

Fig. 252.



Wird die Leiter in gewöhnlicher Weise durch Besteigung belastet, so kann die Schwerlinie nur zwischen $A$ und $B$ hindurchgehen; es interessirt dann von dem Vierecke der Schnittpunkte nur der rechtsseitige Endpunkt $E$, bis zu dem die Schwerlinie nach rechts sich bewegen darf, wenn noch Ruhe möglich sein soll. Dreieck $AEB$ ist bei $E$ rechtwinklig, ferner ist $\sphericalangle ASE = 90^0 + \alpha$, $\sphericalangle EBA = \alpha + \varphi$. Daher ist in $\Delta\, AES$:

$$AS : AE = \sin\varphi : \sin(90^0 + \alpha) = \sin\varphi : \cos\alpha;$$

im Dreieck $ABE$:

$$AB : AE = 1 : \sin(\alpha + \varphi),$$

und aus beiden Gleichungen:

$$AS : AB = nl : l = n = \frac{\sin\varphi \cdot \sin(\alpha + \varphi)}{\cos\alpha}$$

$$\text{oder} \quad n\cos\alpha = \sin\varphi\,(\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi).$$

Theilt man auf beiden Seiten durch $\cos\alpha \cdot \cos^2\varphi$ und vertauscht $\operatorname{tg}\varphi$ mit $f$, $\cos^2\varphi$ aber mit $1 : (1 + \operatorname{tg}^2\varphi) = 1 : (1 + f^2)$, so ergiebt sich:

$$n(1 + f^2) = f(\operatorname{tg}\alpha + f), \text{ oder, nach } \operatorname{tg}\alpha \text{ aufgelöst:}$$

1) $$\operatorname{tg}\alpha = n\left(\frac{1}{f} + f\right) - f.$$

Ist also $n$ gegeben, d. h. bekannt, wie weit das Gesammtgewicht der Leiter sich von dem unteren Endpunkte entfernen kann, so steht damit der Winkel $\alpha$ fest, welcher dem Grenzzustande der Ruhe entspricht.

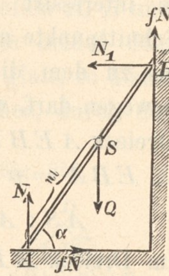
Soll bei gegebener Schwerpunktslage Sicherheit gegen Gleiten vorhanden sein, so muss die wirkliche Schwerlinie links von $E$

bleiben, oder es muss das nach dem Punkte $E$ berechnete $n$ der Gleichung 1 grösser sein als das wirkliche $n_1$; d. h. das wirkliche $n_1 < \frac{f(\operatorname{tg} \alpha + f)}{1 + f^2}$, mithin

2) $$\operatorname{tg} \alpha > n_1 \left(\frac{1}{f} + f\right) - f.$$

Man kann vorstehende Aufgabe, die wir hier geometrisch gelöst haben, auch rechnerisch auf Grund der drei Gleichgewichts-Bedingungen behandeln. Im Grenzzustande treten an den Berührungsstellen zu den Normaldrücken $N$ und $N_1$ die vollen Reibungen $fN$ und $fN_1$ hinzu, und zwar entgegengesetzt der Richtung des möglichen Ausgleitens, d. h. nach rechts, bezw. nach oben (Fig. 253). Die Gleichung der wagerechten Kräfte heisst:

Fig. 253.




3) $$fN = N_1;$$

die Gleichung der lothrechten Kräfte:

4) $$N + fN_1 = Q;$$

die Momentengleichung in Bezug auf $A$:

5) $$0 = Qnl \cos \alpha - N_1 l \sin \alpha - fN_1 l \cos \alpha.$$

Letztere Gleichung giebt:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Qn - fN_1}{N_1}.$$

Aus den Gleichungen 3 und 4 ergiebt sich aber:

$$N_1 = \frac{Q}{\frac{1}{f} + f},$$

mithin wird wiederum:

$$\operatorname{tg} \alpha = n\left(\frac{1}{f} + f\right) - f.$$

**Beispiel:** Die Reibungsziffer betrage $f = 0{,}4 = \operatorname{tg} 22^0$. Ist zunächst die Leiter durch ihr eigenes, in der Mitte angreifendes Gewicht belastet, d. h. $n = 1/2$, so wird

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}(2{,}5 + 0{,}4) - 0{,}4 = 1{,}05; \quad \alpha = 46\,1/2^0.$$

Bis zu diesem Werthe dürfte $\alpha$ abnehmen, ohne dass die Leiter ausglitte. Wird sie sodann bestiegen und hat der Besteigende dasselbe Gewicht wie die

Leiter, so ist, wenn der Besteigende noch auf der untersten Sprosse steht, annähernd $n = 1/4$, und

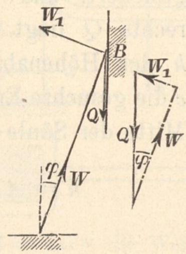
$$\mathrm{tg}\,\alpha = 1/4\,(2{,}5 + 0{,}4) - 0{,}4 = 0{,}325;\quad \alpha = 18^0.$$

Diese geringe Neigung darf aber nicht gewählt werden, wenn die Leiter höher hinauf bestiegen werden soll. Ist sie nämlich bis zur Mitte erstiegen, so ist wieder $n = 1/2$. Wird sie aber bis oben bestiegen, so ist zuletzt $n = 3/4$ und

$$\mathrm{tg}\,\alpha = 3/4\,(2{,}5 + 0{,}4) - 0{,}4 = 1{,}78;\quad \alpha = 60^0\,40'.$$

Es genügt also nicht, den Sicherheitszustand der unbelasteten Leiter zu prüfen, wenn man sie bis oben ersteigen will; vielmehr erfordert der letztere Fall eine steilere Stellung der Leiter. Ist diese steile Lage aus irgend welchen Gründen nicht gut ausführbar, so lässt sich auch bei kleinerem Winkel $\alpha$ die Sicherheit erhöhen, wenn ein zweiter Arbeiter seine Füsse entweder vor die Leiter setzt, oder sich auf die unterste Sprosse stellt. Letzteres hat einen besseren Erfolg als das Davorstellen, wenn $f$ für die Leiter vielleicht grösser ist als für die Sohlen des Arbeiters.

Fig. 254.



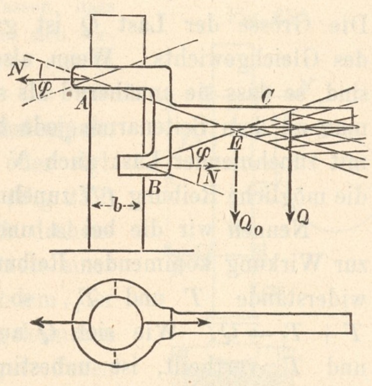

Ist die Leiter sehr leicht, so wird, wenn ein Mensch sie bis oben erstiegen hat, annähernd $n = 1$, mithin

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{f} + f - f = \frac{1}{f},\ \text{d. h,}\ \alpha = 90^0 - \varphi;$$

d. h. in diesem Falle, darf die Leiter höchstens um den Reibungswinkel von der Lothrechten abweichen (Fig. 254). Für $\varphi = 22^0$ wäre $\alpha = 68\,'$. Die Gesammtwiderstände $W$ und $W_1$ schneiden sich mit $Q$ in $B$, es wird $W = Q\cos\varphi$; $W_1 = Q\sin\varphi$.

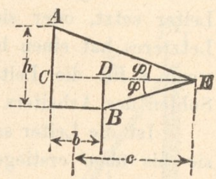
**Reibungs-Hülsen und Reibungs-Ringe zur Aufhängung von Lasten.** Soll an einer Säule ohne Vorsprünge eine Last nur durch Reibung sicher aufgehängt werden, so schiebe man (Fig. 255) über die Säule eine Hülse, welche erstere bei $A$ und $B$ berührt, bei $A$ also einen geschlossenen Ring bildet, während bei $B$ nur ein Ringsegment erforderlich ist. Zuerst stützt man die Hülse gegen Hinabgleiten, etwa bei $A$, übt dann an dem seitlichen Arme $C$ einen Druck nach unten aus und bewirkt dadurch ein Drehungsbestreben rechts herum, welchem sich bei $A$ und $B$ gleiche und entgegengesetzte Drücke $N$ der Säule entgegenstellen. Mit Einschluss

Fig. 255.



der Reibung bilden sich nun in $A$ und $B$ Gesammtwiderstände $W$ und $W_1$ innerhalb der Reibungskegel der Punkte $A$ und $B$. Die Mittelschnitte der Reibungskegel treffen sich zunächst im Punkte $E$; rechts von $E$ aber liegt der Bereich der möglichen Schnittpunkte von $W$ und $W_1$. Geht daher das Gesammtgewicht $Q$ der Hülse einschliesslich des belasteten Armes durch $E$, so befindet sich die Hülse im Grenzzustande der Ruhe, weil die Drücke $N$ dann noch so gering sind, dass nur die volle Reibung $fN$ an beiden Stellen hinreicht, um das Abwärtsgleiten zu verhindern. Geht aber das Gesammtgewicht $Q$ rechts von $E$ vorbei, so ist das Gleichgewicht der Hülse, gesichert, und zwar um so mehr, je weite rechts $Q$ liegt. Ist $b$ die Breite der Säule $h$ der Höhenabstand der Punkte $A$ und $B$, $c$ die gesuchte Entfernung des Punktes $E$ von der Mitte der Säule (Fig. 256), so findet man leicht

Fig. 256.




$$h = AC + DB = \left(c + \frac{b}{2}\right)\operatorname{tg}\varphi + \left(c - \frac{b}{2}\right)\operatorname{tg}\varphi$$

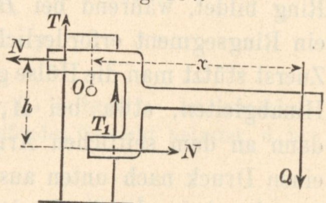
$$h = 2c\operatorname{tg}\varphi \quad \text{oder} \quad c = \frac{h}{2f}.$$

Ist $x$ der Abstand der Gesammtlast $Q$ von der Säulenmitte, so ist die Bedingung für Ruhe:

$$6) \qquad x \geqq c \quad \text{d. h.} \quad x \geqq \frac{h}{2f}.$$

Die Grösse der Last $Q$ ist ganz ohne Einfluss auf die Sicherheit des Gleichgewichts. Wenn also Säule und Hülse nur stark genug sind, so dass sie annähernd als starre Körper gelten können, so kann man an dem Seitenarme jede beliebig grosse Last aufhängen, weil mit zunehmender Last auch $N$ und die mögliche Reibung $fN$ zunehmen.

Fig. 257.




Nennen wir die bei $A$ und $B$ zur Wirkung kommenden Reibungswiderstände $T$ und $T_1$, so ist $T + T_1 = Q$. Wie sich $Q$ auf $T$ und $T_1$ vertheilt, ist unbestimmt. Machen wir die willkürliche Annahme: $T = T_1 = \frac{1}{2}Q$, so können auch $N$ und $N_1$ berechnet werden. In Bezug auf $O$ (Fig. 257) ist dann, weil die Momente von $T$ und $T_1$ sich aufheben, $Nh = Qx$. Die Summe der grössten möglichen Reibungswiderstände wäre

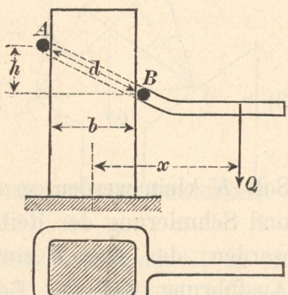
$$2fN = 2fQ\frac{x}{h} \text{ oder, weil } h = 2fc \text{ war,}$$

$$2fN = Qx : c;$$

weil nun von der Reibung nur der Theil $Q$ beansprucht wird, so ist die gesammte mögliche Reibung $x : c$ mal so gross wie die nöthige; $x : c$ kann also als der Sicherheitsgrad bezeichnet werden.

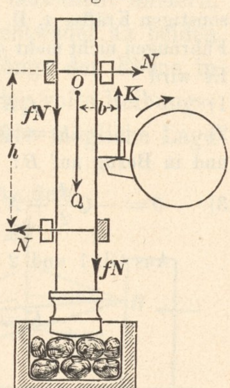
Die Reibungshülse kann durch den einfachen Reibungsring (Fig. 258) (mit der gleichen Wirkung) ersetzt werden. Der etwa aus Rundeisen geschmiedete Ring hat eine Weite $d$, welche grösser ist als die Breite der Säule, so dass der Ring erst in schräger Lage die Säule bei $A$ und $B$ berührt. Die Reibungskegel bei $A$ und $B$ haben dann die gleiche Bedeutung wie in Fig. 255.

Fig. 258.




**Beispiel:** Es sei $b = 0{,}2^{\text{m}}$ die Breite der Säule, $d = 0{,}21^{\text{m}}$ die Weite des Ringes; dann wird $h = \sqrt{d^2 - b^2} = 0{,}064^{\text{m}}$. Ist nun für Holz und Schmiedeeisen (ohne Schmierung) $f = 0{,}5$, so wird $c = 0{,}064 : (2 \cdot 0{,}5) = 0{,}064^{\text{m}}$. Macht man nun $x = 0{,}2^{\text{m}}$, so ist die Sicherheit gegen Gleiten eine $0{,}2 : 0{,}064 = 3$fache (rund). Ist also die Gesammtlast $Q = 100^{\text{kg}}$, so ist die gesammte mögliche Reibung $300^{\text{kg}}$, von der aber nur $100^{\text{kg}}$ zur Wirkung kommen. Oder man kann die Sicherheit auch so auffassen, dass die Reibungsziffer $0{,}5$ auf $^1/_3$ ihres Werthes sich vermindern darf, bevor Gleiten eintritt. Für $f = {}^1/_6$ würde nämlich $c = 0{,}064 \cdot 3 = 0{,}192$, d. h. fast $= x$.

Fig. 259.




**Gleichförmige Hebung eines Pochstempels.** Ein zum Zerkleinern von Erzen oder dgl. dienender Stempel vom Gewichte $Q$ (Fig. 259) wird durch den Daumen einer sich drehenden Daumenwelle erfasst und mittels einer Kraft $K$ gehoben, bis er, nachdem der Daumen an dem Hubarme vorbeigekommen ist, frei herabfällt und die davon getroffenen Körper zerstampft. Da $K$ und $Q$ einen wagerechten Abstand $b$ haben, so würde der Stempel umfallen, wenn er nicht durch Führungen in lothrechter