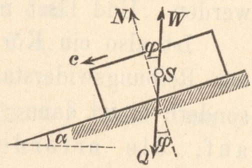
b) Schiefe Ebene.

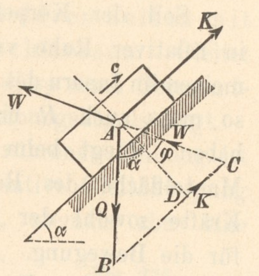
Ist die Unterstützungsebene des Körpers unter dem Winkel α gegen die Wagerechte geneigt und hat man diesen Winkel so geregelt, dass der Körper unter alleiniger Wirkung der Schwere eine gleichmässige, geradlinige Abwärtsverschiebung ausführt, wobei der Gesammtwiderstand W in der Richtung aufwärts von N um den vollen Reibungswinkel φ abweicht, so muss die einzige bewegende Kraft, die Schwere Q des Körpers, das Entgegengesetze von W sein (Fig. 240). Da aber die Lothrechte mit der Rechtwinkligen zur schiefen Ebene den Winkel α bildet, so muss $\alpha = \varphi$ sein. Hierin liegt das einfachste Mittel zur Bestimmung des Reibungswinkels φ durch Versuche: Hebt man die schiefe Ebene allmählich höher an, bis der darauf liegende Körper, durch kleine Stösse in Bewegung gebracht, die Bewegung gleichförmig fortsetzt, so ist der entsprechende Neigungswinkel α gleich dem Reibungswinkel φ für die beiden Stoffe, aus denen Körper und Bahn bestehen.

Fig. 240.



Es möge nun auf den Körper vom Gewichte Q noch eine, parallel zur schiefen Ebene, aufwärts gerichtete Zugkraft K wirken (Fig. 241). K möge sich mit der Richtungslinie von Q im Punkte A schneiden. Soll der Körper gleichförmig aufwärts gezogen werden, so übt die Ebene auf ihn einen Widerstand W aus, der von der (punktirten) Normalen zur Ebene um den vollen Reibungswinkel φ nach unten abweicht. Diese drei Kräfte Q, K und W müssen sich nun im Gleichgewichte halten, d. h. sie müssen sich in dem Punkte A schneiden und ausserdem ein geschlossenes Krafteck bilden. Man trage also AB als Q auf, verlängere W nach unten, ziehe durch B eine Parallele zu K, d. h. zur Ebene, so ist ABC das Krafteck und BC die Grösse K. Ohne Reibung wäre $W = N = DA$, mithin zeigt BD denjenigen Betrag, den K auf reibungsloser Ebene haben müsste ($= Q \sin \alpha$), während DC wegen der Reibung hinzukommt. Da nun der Winkel $BAC = \alpha + \varphi$, $\measuredangle BCA$ aber $= 90^0 - \varphi$,

Fig. 241.



so wird nach dem Sinus-Satze $K : Q = \sin(\alpha + \varphi) : \sin(90^0 - \varphi)$, oder:

1) $$K : Q = \sin(\alpha + \varphi) : \cos\varphi,$$

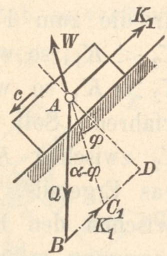
oder auch, bequemer für die Rechnung:

2) $$K : Q = \sin\alpha + f\cos\alpha,$$

wenn man $\sin\varphi : \cos\varphi = \operatorname{tg}\varphi$ mit f vertauscht.

Soll aber der Körper nicht hinauf gezogen, sondern durch die aufwärts gerichtete Kraft, die nun K_1 genannt werden möge, etwa an einem Seile, gleichmässig hinabgelassen werden, so kehrt sich, wegen der entgegengesetzten Bewegung, die Reibung um, und der Widerstand W rückt in die zum ersten Falle symmetrische Lage, indem er von der Normalen nach oben hin abweicht. Die erforderliche Kraft K_1 wird nun durch das erheblich kleinere Stück BC_1 dargestellt.

Fig. 242.



$$\measuredangle BAC_1 = \alpha - \varphi;\ \measuredangle BC_1A = 90^0 + \varphi,$$

mithin

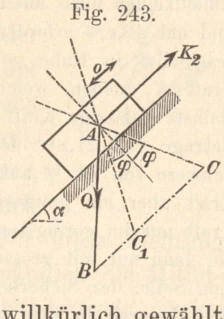
3) $$K_1 : Q = \sin(\alpha - \varphi) : \sin(90^0 + \varphi)$$
$$= \sin(\alpha - \varphi) : \cos\varphi$$

4) $$= \sin\alpha - f\cos\alpha.$$

(Für $\varphi > \alpha$ müsste K_1 abwärts gerichtet sein.)

Soll die Kraft K aber den Körper weder hinaufziehen, noch hinunterlassen, soll sie vielmehr den in Ruhe befindlichen Körper in Ruhe erhalten, so hat man zur Bestimmung ihrer Grösse K_2 zu beachten, dass im Ruhezustande der Widerstand W irgend eine Richtung **innerhalb** des Reibungskegels, also hier innerhalb des doppelten Reibungswinkels einnehmen kann (Fig. 243), dass daher der Endpunkt der Kraft K_2 im Krafteck irgendwo zwischen C_1 und C liegen muss, so dass

Fig. 243.



$$K_2 \geqq K_1 \text{ und zugleich } K_2 \leqq K$$

sein muss, innerhalb dieser Grenzen aber völlig willkürlich gewählt werden kann.

Man kann diese Ergebnisse zusammenfassen in die einzige Gleichung:

5) $$K = Q\,(\sin \alpha \pm f \cos \alpha)\,.$$

Darin bezeichnet das obere Vorzeichen die grössere, zum Hinaufziehen erforderliche Zugkraft, welche neben der Seitenkraft der Schwere ($Q \sin \alpha$) noch die Reibung ($fQ \cos \alpha$) überwinden muss; das untere Vorzeichen die kleinere, zum Hinablassen erforderliche Kraft. Der Einfluss der entgegengesetzten Bewegung macht sich in der Formel durch Umkehrung der Vorzeichen von φ oder f geltend, wie auch in allen späteren Fällen sich zeigen wird. Diese beiden Werthe K und K_1 bilden dann zugleich die Grenzen für die zum Festhalten erforderliche Kraft K_2. Wäre nämlich $K_2 < K_1$, so würde der Körper beschleunigt abwärts gleiten, wäre $K_2 > K$, so würde der Körper eine Beschleunigung nach oben erfahren. Soll weder das Eine, noch das Andere erfolgen, so muss K_2 zwischen K_1 und K bleiben, ist im übrigen aber beliebig. Das Ergebnis, dass die für den Ruhezustand erforderliche Kraft zwischen den beiden, für die abwärts, bezw. aufwärts gerichtete Bewegung erforderlichen Kräften bleiben muss, gilt auch für alle anderen im Nachstehenden behandelten Fälle dieser Art.

Beispiel: Eine Holzkiste von 100 kg Gewicht soll auf einer unter 45° geneigten Ebene mittels eines, parallel mit der Ebene gespannten Seiles aufwärts gezogen werden. Die Reibungsziffer betrage unter der Annahme einer hölzernen Bahn $f = 0{,}3$, entsprechend einem Reibungswinkel $\varphi = 17^{\circ}$. Für $\alpha = 45^{\circ}$ ist $\sin \alpha = \cos \alpha = \sqrt{1/2} = 0{,}707$. Mithin (Gl. 5)

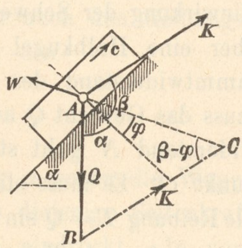
$$K = 100 \cdot 0{,}707\,(1 \pm 0{,}3) = 70{,}7 \pm 21{,}2 = 91{,}9 \text{ kg bezw. } 49{,}5 \text{ kg}.$$

Darin ist 70,7 der zur Überwindung der schräg abwärts gerichteten Seitenkraft der Schwere erforderliche Theil, 21,2 der Reibungswiderstand. Zum Hinaufziehen muss an dem Seile mit 91,9 kg gezogen werden, zum Hinablassen sind nur 49,5 kg erforderlich. Ist die Kiste in Ruhe und soll sie auch mittels des Seiles in Ruhe gehalten werden, so muss man an dem Seile mit einer Kraft K_2 ziehen, welche zwischen 49,5 und 91,9 kg liegt. Übt man nun die kleinste zulässige Kraft von 49,5 kg aus, so muss die Reibung mit ihrem vollen Betrage von 21,2 kg dem Arbeiter zu Hülfe kommen, um die Seitenkraft der Schwere von 70,7 kg aufzuheben. Es erfordert diese Verwendung der kleinsten Kraft aber ein gewisses Maſs von Aufmerksamkeit; denn lässt die ausgeübte Kraft nur im geringsten nach, so erfolgt eine beschleunigte Abwärtsbewegung, die dann nur mit grösserer Anstrengung wieder aufzuheben ist. Übt man an dem Seile, der Sicherheit wegen, eine grössere Kraft aus als 49,5 kg, so ändert sich dadurch in dem sichtbaren Ruhezustande nichts; die Reibung tritt dann nur mit entsprechend geringerem Betrage auf. Hat die Spannkraft den Werth

70,7 kg, so kommt gar keine Reibung zur Wirkung, denn diese tritt im Ruhezustande stets nur in derjenigen Grösse auf, die nöthig ist, um das Gleiten zu verhindern. In diesem Falle würde auch bei völlig glatten Körpern kein Gleiten eintreten. Wächst die Spannkraft über 70,7 kg hinaus, so würde bei glatten Körpern schon ein beschleunigtes Gleiten nach oben eintreten; in Wirklichkeit wird der Überschuss einstweilen noch durch Reibung vernichtet, die nun aber sich nach unten richtet und der Schwere zu Hülfe kommt. Bei 91,9 kg Kraft nimmt diese Reibung den grössten möglichen Werth an. Würde der Körper nun durch einen kleinen Anstoss nach oben in Bewegung gesetzt, so würde er diese Bewegung auch fortsetzen. Erschütterungen können den Eingriff der Unebenheiten der Körper zeitweise aufheben oder vermindern und deshalb auch die Reibung theilweise aufheben.

Ist die Zugkraft K nicht parallel der Ebene, sondern weicht sie von der Normalen zur Ebene um einen Winkel β ab, so verfährt man im Übrigen wie oben. K und Q mögen sich in A schneiden. Von A aus trage man $Q = AB$ auf, zeichne W wie in Fig. 241, ziehe $BC \parallel K$, so ist $BC = K$ für die Aufwärtsbewegung. Und zwar ist

Fig. 244.



6) $K : Q = \sin(\alpha + \varphi) : \sin(\beta - \varphi)$.

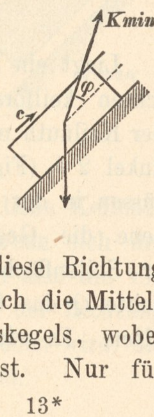
Für gleichförmige Abwärtsbewegung ist wiederum nur $+\varphi$ mit $-\varphi$ und umgekehrt zu vertauschen, also

7) $K_1 : Q = \sin(\alpha - \varphi) : \sin(\beta + \varphi)$.

Für Ruhezustand ist erforderlich, dass K_2 zwischen K_1 und K verbleibe.

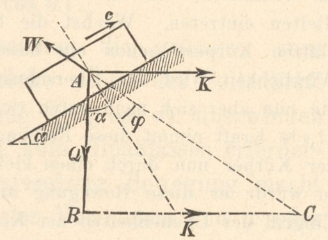
Denkt man sich die Richtung der Zugkraft K, etwa des Zugseiles, veränderlich, so ändert sich auch die Grösse von K. In dem Dreieck ABC (Fig. 244) wird $K = BC$ offenbar am kleinsten, wenn BC rechtwinklig zu AC ist, wenn also $\sphericalangle ACB = \beta - \varphi = 90^0$, oder $\beta = 90^0 + \varphi$; es weicht dann die Kraft K von der Parallelen zur Ebene um den Reibungswinkel nach oben hin ab, und ist (Fig. 245) $K_{min} = Q \sin(\alpha + \varphi)$. Dagegen wird $K = BC$ (Fig. 244) immer grösser, wenn der Winkel ACB abnimmt; ist endlich $BC \parallel W$, d. h. $\beta = \varphi$, so wird $K = \infty$. Für diese Richtung einer zunächst endlich gedachten Kraft K fällt nämlich die Mittelkraft R aus K und Q in das Innere des Reibungskegels, wobei eine gleichförmige Gleitbewegung nicht möglich ist. Nur für

Fig. 245.



$K = \infty$ würde Q gegen K verschwinden und R mit K und W zusammenfallen.

Fig. 246.



Ist K wagerecht, so wird $\beta = 90^0 - \alpha$. Dieser einfache Fall ist aber ebenso leicht unmittelbar zu entwickeln wie aus Gl. 6. Es ist (Fig. 246)

$$K : Q = \operatorname{tg}(\alpha + \varphi).$$

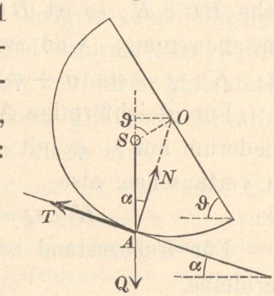
Schreibt man

8) $$\boldsymbol{K = Q \operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi)},$$

so hat man in dem kleineren Werthe wieder K_1 zum Hinablassen, und in K und K_1 die Grenzen für den Ruhezustand.

Halbkugel auf schiefer Ebene. Eine Kugel kann unter alleiniger Einwirkung der Schwere auf schiefer Ebene nicht in Ruhe sein, wohl aber eine Halbkugel (Fig. 247). Der Gesammtwiderstand des Berührungspunktes A muss das Gewicht Q aufheben. Der Normalwiderstand N geht stets durch den Mittelpunkt O. Es muss stattfinden $N = Q \cos \alpha$, die Reibung $T = Q \sin \alpha$, und in Bezug auf O:

Fig. 247.



$$0 = + Tr - Q \cdot \overline{SO} \sin \vartheta,$$

mithin, weil nach S. 136 $\overline{SO} = {}^3/_8\, r$:

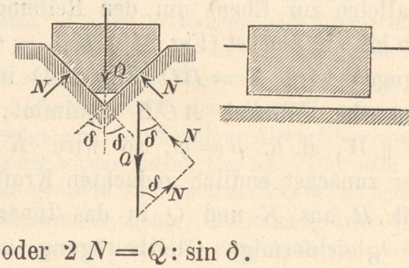
$$\sin \vartheta = {}^8/_3 \sin \alpha.$$

Die Grenzbedingungen für die Ruhe sind $\sin \alpha \leqq {}^3/_8$, weil ϑ höchstens $= 90^0$ werden kann, und ausserdem $\alpha \leqq \varphi$, weil die Halbkugel sonst ins Gleiten kommt.

c) Bewegung in Keilnuthen.

Liegt ein Körper, statt auf wagerechter Ebene, in einer wagerechten keilförmigen Rinne oder Keilnuth mit dem Keilwinkel $2\,\delta$ (Figur 248), so müssen in der Querschnittsebene die Gegendrücke N der Seitenflächen dem Gewichte Q das Gleichgewicht halten. Es wird

Fig. 248.



$$Q = 2\,N \sin \delta \quad \text{oder} \quad 2\,N = Q : \sin \delta.$$