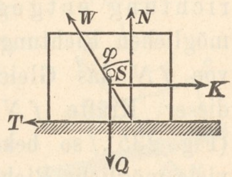
# 10. Reibung.

## a) Reibungsziffer, Reibungswinkel und Reibungskegel.

Bisher haben wir die Körper als vollkommen glatt angenommen, wobei sie in Folge einfacher Berührung nur Normalkräfte auf einander ausüben konnten. Wäre dies wirklich der Fall, so würde ein Körper auf wagerechter Ebene, einmal in Bewegung gesetzt, seine Bewegung stets mit derselben Geschwindigkeit fortsetzen. Die Erfahrung lehrt aber, dass dies nicht zutrifft, dass vielmehr eine gewisse Zugkraft $K$ erforderlich ist, um den Körper in gleichförmiger Bewegung zu erhalten. Daraus folgt das Vorhandensein eines Tangential- oder Reibungswiderstandes $T = K$ (Fig. 234). Die Reibung ist eine Folge der Rauhheit der Oberflächen der Körper. Ihre Grösse ist in erster Linie von der Grösse des Normaldruckes $N$ abhängig, und man nennt das Verhältnis $T : N = f$ (frictio) die Reibungsziffer oder den Reibungs-Koëfficienten.

Fig. 234.




Ergiebt sich, dass zum gleichmässigen Fortziehen eines 62 kg schweren Schlittens auf einer wagerechten Eisfläche eine wagerechte Zugkraft $K = 2$ kg erforderlich ist, so beträgt die Reibungsziffer $f = \frac{T}{N} = \frac{K}{Q} = \frac{2}{62} = \frac{1}{31}$.

Die Reibungsziffer zweier Körper hängt wesentlich von der Beschaffenheit der Berührungsflächen ab, also von der Natur der Körper, von der Art der Bearbeitung und der etwaigen Schmierung.

Daneben hat auch die Geschwindigkeit der Gleitbewegung einen Einfluss auf die Reibung. Beim Übergange aus der Ruhe in die Bewegung ist die Reibung am grössten und nimmt mit wachsender Geschwindigkeit ab. Auch von der Grösse des auf die Flächeneinheit kommenden Druckes hängt die Reibungsziffer ab. Bei sehr kleinem Einheitsdruck, also verhältnismässig grosser Berührungsfläche ist die Reibungsziffer gross, mit zunehmendem Einheitsdrucke nimmt sie anfänglich ab, dann aber wieder zu, wie durch Versuche erkannt wurde.

Diese Abhängigkeit von der Geschwindigkeit und der Grösse des Einheitsdruckes ist aber nur erst für einige Sonderfälle näher festgestellt. Im Allgemeinen müssen wir daher $f$ als nur abhängig von der Beschaffenheit der Berührungsflächen behandeln, und voraussetzen, dass die entsprechende Zahl durch

Versuche, deren Umstände dem zu behandelnden Falle möglichst ähnlich sind, ermittelt wurde.

Gleitet ein Körper auf fester Fläche, so besteht die Einwirkung der letzteren auf den Körper in dem Normalwiderstande $N$ und dem Tangentialwiderstande $T = fN$. Die Mittelkraft $W$ beider heisst der Gesammtwiderstand der festen Fläche und schliesst mit der Normalen $N$ einen Winkel $\varphi$ ein, für den

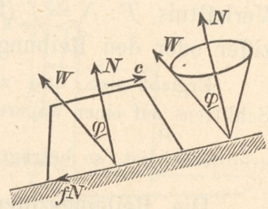
$$\operatorname{tg}\varphi = T : N = fN : N = f, \text{ d. h.}$$

$$\boldsymbol{\operatorname{tg}\varphi = f.}$$

Wegen der festen Beziehung zwischen $\varphi$ und $f$ nennt man $\varphi$ den Reibungswinkel.

Der Reibungswiderstand ist stets der Bewegungsrichtung entgegengesetzt. Da nun die Gleitbewegung alle möglichen Richtungen in der Berührungsebene haben kann, so gilt von $fN$ das Gleiche. Setzt man jede dieser Kräfte $fN$ mit $N$ zusammen (Fig. 235), so bekommt man unendlich viele mögliche Richtungen von $W$, welche eine Kegelfläche mit der Achse $N$ bilden, den sog. Reibungskegel.

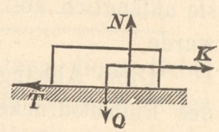
Fig. 235.




Der Reibungskegel ist eine Kegelfläche, deren Spitze im Angriffspunkte von $N$, deren Achse in der Richtungslinie von $N$ liegt und deren Seiten mit der Achse den Reibungswinkel $\varphi$ einschliessen. Gleitet ein Körper auf einer festen Fläche, so leistet diese einen Gesammtwiderstand $W$, der in der Mantelfläche des Reibungskegels liegt.

Die von der Rauhigkeit der Körper herrührende Reibung ist nun aber eine Widerstandskraft, welche die relative Gleitbewegung an der Fläche wohl hindern oder verzögern, niemals aber eine solche hervorbringen oder beschleunigen kann. Liegt z. B. (Fig. 236) ein Körper vom Gewichte $Q = 100$ kg auf wagerechter Ebene und ist $f = 0{,}3$, so ist zum gleichmässigen Fortziehen des Körpers (etwa mittels eines wagerecht gespannten Seiles) eine Kraft $K = 30$ kg erforderlich. Diese Kräfte werden auch an dem Körper noch im Gleichgewichte sein, wenn die Geschwindigkeit desselben zu Null wird.

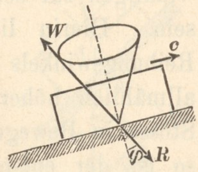
Fig. 236.



Zieht man aber an dem ruhenden Körper mit einer Kraft $K < 30^{\mathrm{kg}}$, vielleicht nur mit einer Kraft von $10^{\mathrm{kg}}$, so wird nicht etwa der Reibungswiderstand $T$ das Übergewicht über $K = 10^{\mathrm{kg}}$ gewinnen und den Körper beschleunigt nach links bewegen, denn der Reibungswiderstand einer Fläche kann eine Gleitbewegung an derselben nicht erzeugen, vielmehr wird nun die Widerstandskraft $T$ nur $= K = 10^{\mathrm{kg}}$ werden. Und lässt man $K$ zu Null werden, so wird auch $T = 0$.

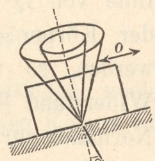
Ist also ein Körper auf einer festen Fläche in Ruhe, so hat der Reibungswiderstand $T$ im Allgemeinen nicht den Werth $fN$, sondern er ist dann $\leqq fN$, er tritt nur in derjenigen Grösse auf, die erforderlich ist, um den Ruhezustand zu erhalten. Dann ist aber auch der Winkel $\beta$ zwischen $W$ und $N \leqq \varphi$, und die Richtungslinie von $W$ liegt nicht in der Mantelfläche, sondern im Allgemeinen im Innern des Reibungskegels.

Fig. 237.



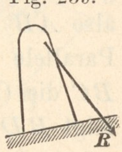

Soll ein Körper sich auf einer festen Ebene gleichmässig und geradlinig verschieben, wobei der Gesammtwiderstand $W$ in der Mantelfläche des Reibungskegels liegt, so müssen die ausser $W$ noch vorhandenen Kräfte eine Mittelkraft $R$ liefern, welche mit der Kraft $W$ im Gleichgewicht ist, also ebenfalls in der Mantelfläche des Reibungskegels liegt (Fig. 237).

Fig. 237.




Soll der Körper aber auf der festen Fläche in relativer Ruhe verbleiben, wobei $W$ im Allgemeinen im Innern des Reibungskegels liegt (Fig. 238), so muss auch $R$ eine solche Richtung und Lage haben. Liegt beim ruhenden Körper $R$ auf der Mantelfläche des Reibungskegels, so genügen die Kräfte sowohl der Bedingung für die Ruhe als auch derjenigen für die Bewegung. Es befindet sich dann der Körper im Grenzzustande der Ruhe. Wird er in richtiger Weise (etwa durch einen Stoss) in Bewegung gesetzt, so verbleibt er auch in dieser.

Fig. 239.

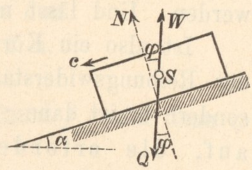



Der Gesammtwiderstand $W$ kann nur innerhalb des Bereiches der Unterstützungsfläche (s. S. 166) angreifen. Durch diese Unterstützungsfläche muss daher auch $R$ hindurchgehen; andernfalls würde der Körper umkippen (Fig. 239)

### b) Schiefe Ebene.

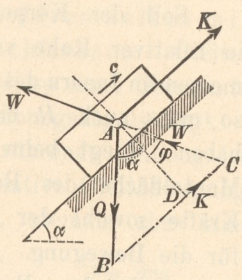
Ist die Unterstützungsebene des Körpers unter dem Winkel $\alpha$ gegen die Wagerechte geneigt und hat man diesen Winkel so geregelt, dass der Körper unter alleiniger Wirkung der Schwere eine gleichmässige, geradlinige Abwärtsverschiebung ausführt, wobei der Gesammtwiderstand $W$ in der Richtung aufwärts von $N$ um den vollen Reibungswinkel $\varphi$ abweicht, so muss die einzige bewegende Kraft, die Schwere $Q$ des Körpers, das Entgegengesetze von $W$ sein (Fig. 240). Da aber die Lothrechte mit der Rechtwinkligen zur schiefen Ebene den Winkel $\alpha$ bildet, so muss $\alpha = \varphi$ sein. Hierin liegt das einfachste Mittel zur Bestimmung des Reibungswinkels $\varphi$ durch Versuche: Hebt man die schiefe Ebene allmählich höher an, bis der darauf liegende Körper, durch kleine Stösse in Bewegung gebracht, die Bewegung gleichförmig fortsetzt, so ist der entsprechende Neigungswinkel $\alpha$ gleich dem Reibungswinkel $\varphi$ für die beiden Stoffe, aus denen Körper und Bahn bestehen.

Fig. 240.




Es möge nun auf den Körper vom Gewichte $Q$ noch eine, parallel zur schiefen Ebene, aufwärts gerichtete Zugkraft $K$ wirken (Fig. 241). $K$ möge sich mit der Richtungslinie von $Q$ im Punkte $A$ schneiden. Soll der Körper gleichförmig aufwärts gezogen werden, so übt die Ebene auf ihn einen Widerstand $W$ aus, der von der (punktirten) Normalen zur Ebene um den vollen Reibungswinkel $\varphi$ nach unten abweicht. Diese drei Kräfte $Q$, $K$ und $W$ müssen sich nun im Gleichgewichte halten, d. h. sie müssen sich in dem Punkte $A$ schneiden und ausserdem ein geschlossenes Krafteck bilden. Man trage also $AB$ als $Q$ auf, verlängere $W$ nach unten, ziehe durch $B$ eine Parallele zu $K$, d. h. zur Ebene, so ist $ABC$ das Krafteck und $BC$ die Grösse $K$. Ohne Reibung wäre $W = N = DA$, mithin zeigt $BD$ denjenigen Betrag, den $K$ auf reibungsloser Ebene haben müsste ($= Q \sin \alpha$), während $DC$ wegen der Reibung hinzukommt. Da nun der Winkel $BAC = \alpha + \varphi$, $\measuredangle BCA$ aber $= 90^0 - \varphi$,

Fig. 241.



so wird nach dem Sinus-Satze $K : Q = \sin(\alpha + \varphi) : \sin(90^0 - \varphi)$, oder:

1) $$K : Q = \sin(\alpha + \varphi) : \cos\varphi,$$

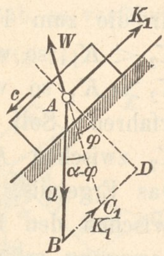
oder auch, bequemer für die Rechnung:

2) $$K : Q = \sin\alpha + f\cos\alpha,$$

wenn man $\sin\varphi : \cos\varphi = \operatorname{tg}\varphi$ mit $f$ vertauscht.

Soll aber der Körper nicht hinauf gezogen, sondern durch die aufwärts gerichtete Kraft, die nun $K_1$ genannt werden möge, etwa an einem Seile, gleichmässig hinabgelassen werden, so kehrt sich, wegen der entgegengesetzten Bewegung, die Reibung um, und der Widerstand $W$ rückt in die zum ersten Falle symmetrische Lage, indem er von der Normalen nach oben hin abweicht. Die erforderliche Kraft $K_1$ wird nun durch das erheblich kleinere Stück $BC_1$ dargestellt.

Fig. 242.




$$\sphericalangle BAC_1 = \alpha - \varphi;\ \sphericalangle BC_1A = 90^0 + \varphi,$$

mithin

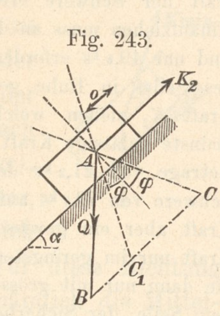
3) $$K_1 : Q = \sin(\alpha - \varphi) : \sin(90^0 + \varphi)$$
$$= \sin(\alpha - \varphi) : \cos\varphi$$

4) $$= \sin\alpha - f\cos\alpha.$$

(Für $\varphi > \alpha$ müsste $K_1$ abwärts gerichtet sein.)

Soll die Kraft $K$ aber den Körper weder hinaufziehen, noch hinunterlassen, soll sie vielmehr den in Ruhe befindlichen Körper in Ruhe erhalten, so hat man zur Bestimmung ihrer Grösse $K_2$ zu beachten, dass im Ruhezustande der Widerstand $W$ irgend eine Richtung i n n e r h a l b des Reibungskegels, also hier innerhalb des doppelten Reibungswinkels einnehmen kann (Fig. 243), dass daher der Endpunkt der Kraft $K_2$ im Krafteck irgendwo zwischen $C_1$ und $C$ liegen muss, so dass

Fig. 243.




$$K_2 \geqq K_1 \text{ und zugleich } K_2 \leqq K$$

sein muss, innerhalb dieser Grenzen aber völlig willkürlich gewählt werden kann.

Man kann diese Ergebnisse zusammenfassen in die einzige Gleichung:

$$5)\qquad K = Q\,(\sin\alpha \pm f\cos\alpha)\,.$$

Darin bezeichnet das obere Vorzeichen die grössere, zum Hinaufziehen erforderliche Zugkraft, welche neben der Seitenkraft der Schwere ($Q\sin\alpha$) noch die Reibung ($fQ\cos\alpha$) überwinden muss; das untere Vorzeichen die kleinere, zum Hinablassen erforderliche Kraft. Der Einfluss der entgegengesetzten Bewegung macht sich in der Formel durch Umkehrung der Vorzeichen von $\varphi$ oder $f$ geltend, wie auch in allen späteren Fällen sich zeigen wird. Diese beiden Werthe $K$ und $K_1$ bilden dann zugleich die Grenzen für die zum Festhalten erforderliche Kraft $K_2$. Wäre nämlich $K_2 < K_1$, so würde der Körper beschleunigt abwärts gleiten, wäre $K_2 > K$, so würde der Körper eine Beschleunigung nach oben erfahren. Soll weder das Eine, noch das Andere erfolgen, so muss $K_2$ zwischen $K_1$ und $K$ bleiben, ist im übrigen aber beliebig. Das Ergebnis, dass die für den Ruhezustand erforderliche Kraft zwischen den beiden, für die abwärts, bezw. aufwärts gerichtete Bewegung erforderlichen Kräften bleiben muss, gilt auch für alle anderen im Nachstehenden behandelten Fälle dieser Art.

**Beispiel:** Eine Holzkiste von 100 kg Gewicht soll auf einer unter $45^0$ geneigten Ebene mittels eines, parallel mit der Ebene gespannten Seiles aufwärts gezogen werden. Die Reibungsziffer betrage unter der Annahme einer hölzernen Bahn $f = 0{,}3$, entsprechend einem Reibungswinkel $\varphi = 17^0$. Für $\alpha = 45^0$ ist $\sin\alpha = \cos\alpha = \sqrt{1/2} = 0{,}707$. Mithin (Gl. 5)

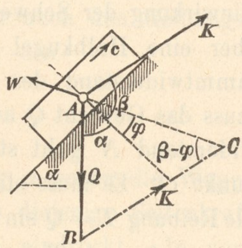
$$K = 100 \cdot 0{,}707\,(1 \pm 0{,}3) = 70{,}7 \pm 21{,}2 = 91{,}9\ \text{kg} \text{ bezw. } 49{,}5\ \text{kg}.$$

Darin ist 70,7 der zur Überwindung der schräg abwärts gerichteten Seitenkraft der Schwere erforderliche Theil, 21,2 der Reibungswiderstand. Zum Hinaufziehen muss an dem Seile mit 91,9 kg gezogen werden, zum Hinablassen sind nur 49,5 kg erforderlich. Ist die Kiste in Ruhe und soll sie auch mittels des Seiles in Ruhe gehalten werden, so muss man an dem Seile mit einer Kraft $K_2$ ziehen, welche zwischen 49,5 und 91,9 kg liegt. Übt man nun die kleinste zulässige Kraft von 49,5 kg aus, so muss die Reibung mit ihrem vollen Betrage von 21,2 kg dem Arbeiter zu Hülfe kommen, um die Seitenkraft der Schwere von 70,7 kg aufzuheben. Es erfordert diese Verwendung der kleinsten Kraft aber ein gewisses Mafs von Aufmerksamkeit; denn lässt die ausgeübte Kraft nur im geringsten nach, so erfolgt eine beschleunigte Abwärtsbewegung, die dann nur mit grösserer Anstrengung wieder aufzuheben ist. Übt man an dem Seile, der Sicherheit wegen, eine grössere Kraft aus als 49,5 kg, so ändert sich dadurch in dem sichtbaren Ruhezustande nichts; die Reibung tritt dann nur mit entsprechend geringerem Betrage auf. Hat die Spannkraft den Werth

$70{,}7^{\,kg}$, so kommt gar keine Reibung zur Wirkung, denn diese tritt im Ruhezustande stets nur in derjenigen Grösse auf, die nöthig ist, um das Gleiten zu verhindern. In diesem Falle würde auch bei völlig glatten Körpern kein Gleiten eintreten. Wächst die Spannkraft über $70{,}7^{\,kg}$ hinaus, so würde bei glatten Körpern schon ein beschleunigtes Gleiten nach oben eintreten; in Wirklichkeit wird der Überschuss einstweilen noch durch Reibung vernichtet, die nun aber sich nach unten richtet und der Schwere zu Hülfe kommt. Bei $91{,}9^{\,kg}$ Kraft nimmt diese Reibung den grössten möglichen Werth an. Würde der Körper nun durch einen kleinen Anstoss nach oben in Bewegung gesetzt, so würde er diese Bewegung auch fortsetzen. Erschütterungen können den Eingriff der Unebenheiten der Körper zeitweise aufheben oder vermindern und deshalb auch die Reibung theilweise aufheben.

Ist die Zugkraft $K$ nicht parallel der Ebene, sondern weicht sie von der Normalen zur Ebene um einen Winkel $\beta$ ab, so verfährt man im Übrigen wie oben. $K$ und $Q$ mögen sich in $A$ schneiden. Von $A$ aus trage man $Q = AB$ auf, zeichne $W$ wie in Fig. 241, ziehe $BC \parallel K$, so ist $BC = K$ für die Aufwärtsbewegung. Und zwar ist

Fig. 244.




6) $K : Q = \sin(\alpha + \varphi) : \sin(\beta - \varphi)$.

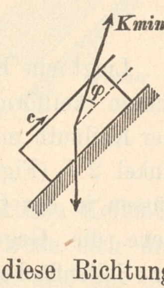
Für gleichförmige Abwärtsbewegung ist wiederum nur $+\varphi$ mit $-\varphi$ und umgekehrt zu vertauschen, also

7) $$K_1 : Q = \sin(\alpha - \varphi) : \sin(\beta + \varphi).$$

Für Ruhezustand ist erforderlich, dass $K_2$ zwischen $K_1$ und $K$ verbleibe.

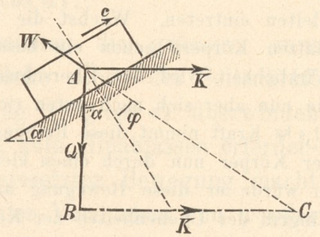
Denkt man sich die Richtung der Zugkraft $K$, etwa des Zugseiles, veränderlich, so ändert sich auch die Grösse von $K$. In dem Dreieck $ABC$ (Fig. 244) wird $K = BC$ offenbar am kleinsten, wenn $BC$ rechtwinklig zu $AC$ ist, wenn also $\measuredangle\, ACB = \beta - \varphi = 90^0$, oder $\beta = 90^0 + \varphi$; es weicht dann die Kraft $K$ von der Parallelen zur Ebene um den Reibungswinkel nach oben hin ab, und ist (Fig. 245) $K_{min} = Q \sin(\alpha + \varphi)$. Dagegen wird $K = BC$ (Fig. 244) immer grösser, wenn der Winkel $ACB$ abnimmt; ist endlich $BC \parallel W$, d. h. $\beta = \varphi$, so wird $K = \infty$. Für diese Richtung einer zunächst endlich gedachten Kraft $K$ fällt nämlich die Mittelkraft $R$ aus $K$ und $Q$ in das Innere des Reibungskegels, wobei eine gleichförmige Gleitbewegung nicht möglich ist. Nur für

Fig. 245.



$K = \infty$ würde $Q$ gegen $K$ verschwinden und $R$ mit $K$ und $W$ zusammenfallen.

Fig. 246.




Ist $K$ wagerecht, so wird $\beta = 90^0 - \alpha$. Dieser einfache Fall ist aber ebenso leicht unmittelbar zu entwickeln wie aus Gl. 6. Es ist (Fig. 246)

$$K : Q = \operatorname{tg}(\alpha + \varphi).$$

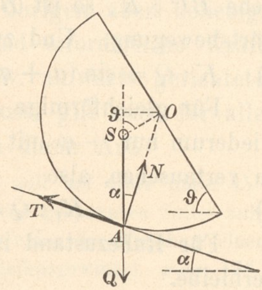
Schreibt man

$$8) \qquad \boldsymbol{K = Q} \operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi),$$

so hat man in dem kleineren Werthe wieder $K_1$ zum Hinablassen, und in $K$ und $K_1$ die Grenzen für den Ruhezustand.

**Halbkugel auf schiefer Ebene.** Eine Kugel kann unter alleiniger Einwirkung der Schwere auf schiefer Ebene nicht in Ruhe sein, wohl aber eine Halbkugel (Fig. 247). Der Gesammtwiderstand des Berührungspunktes $A$ muss das Gewicht $Q$ aufheben. Der Normalwiderstand $N$ geht stets durch den Mittelpunkt $O$. Es muss stattfinden $N = Q \cos \alpha$, die Reibung $T = Q \sin \alpha$, und in Bezug auf $O$:

Fig. 247.




$$0 = + Tr - Q \cdot \overline{SO} \sin \vartheta,$$

mithin, weil nach S. 136 $\overline{SO} = {}^3/_8\, r$:

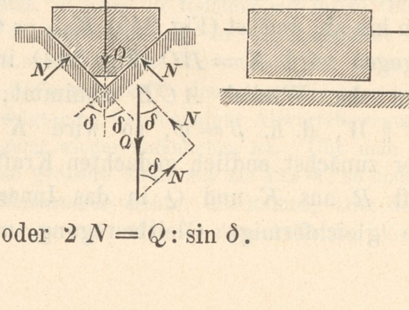
$$\sin \vartheta = {}^8/_3 \sin \alpha.$$

Die Grenzbedingungen für die Ruhe sind $\sin \alpha \leqq {}^3/_8$, weil $\vartheta$ höchstens $= 90^0$ werden kann, und ausserdem $\alpha \leqq \varphi$, weil die Halbkugel sonst ins Gleiten kommt.

### c) Bewegung in Keilnuthen.

Liegt ein Körper, statt auf wagerechter Ebene, in einer wagerechten keilförmigen Rinne oder Keilnuth mit dem Keilwinkel $2\,\delta$ (Figur 248), so müssen in der Querschnittsebene die Gegendrücke $N$ der Seitenflächen dem Gewichte $Q$ das Gleichgewicht halten. Es wird

Fig. 248.




$$Q = 2\,N \sin \delta \quad \text{oder} \quad 2\,N = Q : \sin \delta.$$

Der Bewegung setzt sich an jeder Seitenfläche ein Reibungswiderstand $fN$ entgegen, so dass die erforderliche Zugkraft wird

$$9)\qquad K = 2fN = \frac{Qf}{\sin\delta}.$$

Das keilartige Einpressen des Körpers in die Nuth hat im Vergleiche mit der Bewegung auf ebener Fläche denselben Einfluss, als wäre die Rauhigkeit verstärkt, die Reibungsziffer $f$ auf $f:\sin\delta$ vergrössert (A. Ritter, Technische Mechanik). Dasselbe Ergebnis findet man auch in anderen Fällen, wenn man aus dem Falle der Bewegung eines Körpers auf einer ebenen oder krummen Fläche zu denjenigen übergeht, wo in die Fläche keilförmige Rinnen eingearbeitet sind, in die der Körper keilartig eingreift. Man hat dann stets $f$ zu vertauschen mit $f:\sin\delta$, oder auch den Reibungswinkel $\varphi$ mit einem grösseren Werthe $\psi$, für den

$$10)\qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{f}{\sin\delta} \text{ ist.}$$

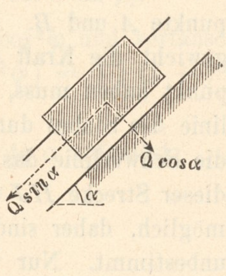
Giebt man z. B. der Rinne eine Neigung $\alpha$ gegen die Wagerechte (Fig. 249), so ergiebt sich $Q\cos\alpha$ als diejenige Seitenkraft von $Q$, welche der Körper an die Keilnuth eindrückt. In vorstehender Figur 248 ist dann $Q$ mit $Q\cos\alpha$ zu vertauschen; daher wird

$$2N = Q\cos\alpha : \sin\delta$$

und der gesammte Reibungswiderstand

$$2fN = Q\cos\alpha\cdot f : \sin\delta.$$

Fig. 249.

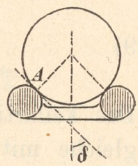



Setzt man diesen Werth $= Q\sin\alpha$, so erhält man die Bedingung für gleichförmige Abwärtsbewegung durch die Schwere, nämlich $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f}{\sin\delta} = \operatorname{tg}\psi$, oder $\alpha = \psi$.

Es ist hierzu nicht erforderlich, dass eine wirkliche Keilnuth vorhanden sei; gleiche Wirkungen treten auch auf, wenn sich der Körper etwa zwischen 2 runde Bäume einkeilt, wenn also die von den bewegenden Kräften herrührende Seitenkraft (in der Richtung rechtwinklig zur Bewegung) von 2 Kräften $N$ aufgehoben wird, die mit ihr in einer Ebene liegen, aber nicht parallel sind.

Soll ein runder Körper zwischen den Bäumen einer sog. Streichleiter gleiten (Fig. 250) und ist $\delta = 45^0$ der Winkel der Tangente bei $A$ mit der Mittelebene, so wird $f : \sin \delta = 1{,}414\, f$ als Reibungsziffer einzuführen sein, also wenn, wie in dem Beispiele auf S. 194, $f = 0{,}3$ ist, statt dessen $0{,}42$. Bei $\alpha = 45^0$ wird dann $K = 100{,}4$, $K_1 = 41^{kg}$.

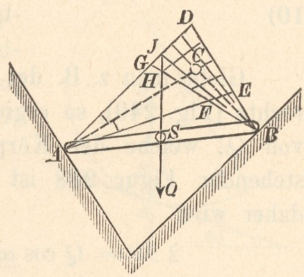
Fig. 250.




### d) Stabförmiger Körper, von zwei Ebenen gestützt.

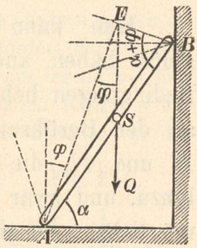
Der Körper mit dem Schwerpunkte $S$ möge die Ebenen in den Punkten $A$ und $B$ berühren (Fig. 251), u. zw. sollen $A$, $B$ und $S$ in einer lothrechten Ebene liegen, zu welcher die beiden Stützebenen rechtwinklig sind. Wären die Körper völlig glatt, so könnten in $A$ und $B$ nur Normaldrücke $N$ und $N_1$ entstehen, durch deren Schnittpunkt $C$ die Schwerlinie des Stabes gehen müsste, wenn Gleichgewicht bestehen sollte. Bei vorhandener Rauhigkeit aber hat man in $A$ und $B$ die Reibungskegel zu zeichnen; die Mittelschnitte derselben haben ein Viereck $DEFG$ gemeinsam, und dies Reibungsviereck ist der Bereich aller möglichen Schnittpunkte der Widerstände $W$ und $W_1$ der Stützpunkte $A$ und $B$. Da nun für Gleichgewicht die Kraft $Q$ mit $W$ und $W_1$ einen gemeinsamen Schnittpunkt haben muss, so erfordert der Ruhezustand, dass die Schwerlinie des Stabes durch das Viereck hindurchgehen muss. Schneidet die Schwerlinie das Viereck aber vielleicht in $HJ$, so sind längs dieser Strecke $HJ$ unendlich viele Schnittpunkte von $W$, $W_1$ und $Q$ möglich, daher sind auch $W$ und $W_1$ nach Richtung und Grösse unbestimmt. Nur wenn $Q$ durch einen der Grenzpunkte $E$ und $G$ des Vierecks geht, ist die Richtung (und dann auch die Grösse) von $W$ und $W_1$ bestimmt. In diesen Fällen befindet sich der Stab im Grenzzustande der Ruhe; $W$ und $W_1$ liegen auf den Mantelflächen der Reibungskegel, es treten von $A$ und $B$ die vollen Reibungswerthe auf, und bei dem geringsten Anstosse geräth der Stab ins Gleiten.

Fig. 251.



**Ruhezustand einer Leiter.** Eine Leiter $AB$ von der Länge $l$ stütze sich bei $A$ gegen den Boden, lehne sich bei $B$ gegen eine lothrechte Wand (Fig. 252). Die Reibungsziffern für beide Ebenen seien die gleichen. Der Schwerpunkt $S$ der (etwa belasteten) Leiter liege um $AS = nl$ von $A$ entfernt. Gesucht wird der Neigungswinkel $\alpha$, unter dem die Leiter an der Grenze des Ruhezustandes ist.

Fig. 252.



Wird die Leiter in gewöhnlicher Weise durch Besteigung belastet, so kann die Schwerlinie nur zwischen $A$ und $B$ hindurchgehen; es interessirt dann von dem Vierecke der Schnittpunkte nur der rechtsseitige Endpunkt $E$, bis zu dem die Schwerlinie nach rechts sich bewegen darf, wenn noch Ruhe möglich sein soll. Dreieck $AEB$ ist bei $E$ rechtwinklig, ferner ist $\sphericalangle ASE = 90^0 + \alpha$, $\sphericalangle EBA = \alpha + \varphi$. Daher ist in $\Delta\, AES$:

$$AS : AE = \sin\varphi : \sin(90^0 + \alpha) = \sin\varphi : \cos\alpha;$$

im Dreieck $ABE$:

$$AB : AE = 1 : \sin(\alpha + \varphi),$$

und aus beiden Gleichungen:

$$AS : AB = nl : l = n = \frac{\sin\varphi \cdot \sin(\alpha + \varphi)}{\cos\alpha}$$

$$\text{oder} \quad n\cos\alpha = \sin\varphi\,(\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi).$$

Theilt man auf beiden Seiten durch $\cos\alpha \cdot \cos^2\varphi$ und vertauscht $\operatorname{tg}\varphi$ mit $f$, $\cos^2\varphi$ aber mit $1 : (1 + \operatorname{tg}^2\varphi) = 1 : (1 + f^2)$, so ergiebt sich:

$$n(1 + f^2) = f(\operatorname{tg}\alpha + f), \text{ oder, nach } \operatorname{tg}\alpha \text{ aufgelöst:}$$

1) $$\operatorname{tg}\alpha = n\left(\frac{1}{f} + f\right) - f.$$

Ist also $n$ gegeben, d. h. bekannt, wie weit das Gesammtgewicht der Leiter sich von dem unteren Endpunkte entfernen kann, so steht damit der Winkel $\alpha$ fest, welcher dem Grenzzustande der Ruhe entspricht.

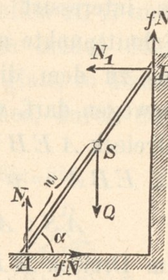
Soll bei gegebener Schwerpunktslage S i c h e r h e i t gegen Gleiten vorhanden sein, so muss die wirkliche Schwerlinie links von $E$

bleiben, oder es muss das nach dem Punkte $E$ berechnete $n$ der Gleichung 1 grösser sein als das wirkliche $n_1$; d. h. das wirkliche $n_1 < \dfrac{f(\operatorname{tg} \alpha + f)}{1 + f^2}$, mithin

$$2) \qquad \operatorname{tg} \alpha > n_1 \left(\frac{1}{f} + f\right) - f.$$

Man kann vorstehende Aufgabe, die wir hier geometrisch gelöst haben, auch rechnerisch auf Grund der drei Gleichgewichts-Bedingungen behandeln. Im Grenzzustande treten an den Berührungsstellen zu den Normaldrücken $N$ und $N_1$ die vollen Reibungen $fN$ und $fN_1$ hinzu, und zwar entgegengesetzt der Richtung des möglichen Ausgleitens, d. h. nach rechts, bezw. nach oben (Fig. 253). Die Gleichung der wagerechten Kräfte heisst:

Fig. 253.




$$3) \qquad fN = N_1;$$

die Gleichung der lothrechten Kräfte:

$$4) \qquad N + fN_1 = Q;$$

die Momentengleichung in Bezug auf $A$:

$$5) \qquad 0 = Qnl \cos \alpha - N_1 l \sin \alpha - fN_1 l \cos \alpha.$$

Letztere Gleichung giebt:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Qn - fN_1}{N_1}.$$

Aus den Gleichungen 3 und 4 ergiebt sich aber:

$$N_1 = \frac{Q}{\frac{1}{f} + f},$$

mithin wird wiederum:

$$\operatorname{tg} \alpha = n \left(\frac{1}{f} + f\right) - f.$$

**Beispiel:** Die Reibungsziffer betrage $f = 0{,}4 = \operatorname{tg} 22^\circ$. Ist zunächst die Leiter durch ihr eigenes, in der Mitte angreifendes Gewicht belastet, d. h. $n = 1/2$, so wird

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}(2{,}5 + 0{,}4) - 0{,}4 = 1{,}05; \quad \alpha = 46\,1/2^\circ.$$

Bis zu diesem Werthe dürfte $\alpha$ abnehmen, ohne dass die Leiter ausglitte. Wird sie sodann bestiegen und hat der Besteigende dasselbe Gewicht wie die

Leiter, so ist, wenn der Besteigende noch auf der untersten Sprosse steht, annähernd $n = {}^1/_4$, und

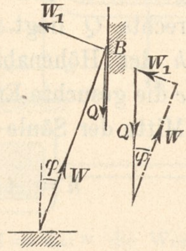
$$\operatorname{tg} \alpha = {}^1/_4 (2{,}5 + 0{,}4) - 0{,}4 = 0{,}325; \quad \alpha = 18^0.$$

Diese geringe Neigung darf aber nicht gewählt werden, wenn die Leiter höher hinauf bestiegen werden soll. Ist sie nämlich bis zur Mitte erstiegen, so ist wieder $n = {}^1/_2$. Wird sie aber bis oben bestiegen, so ist zuletzt $n = {}^3/_4$ und

$$\operatorname{tg} \alpha = {}^3/_4 (2{,}5 + 0{,}4) - 0{,}4 = 1{,}78; \quad \alpha = 60^0 40'.$$

Es genügt also nicht, den Sicherheitszustand der unbelasteten Leiter zu prüfen, wenn man sie bis oben ersteigen will; vielmehr erfordert der letztere Fall eine steilere Stellung der Leiter. Ist diese steile Lage aus irgend welchen Gründen nicht gut ausführbar, so lässt sich auch bei kleinerem Winkel $\alpha$ die Sicherheit erhöhen, wenn ein zweiter Arbeiter seine Füsse entweder vor die Leiter setzt, oder sich auf die unterste Sprosse stellt. Letzteres hat einen besseren Erfolg als das Davorstellen, wenn $f$ für die Leiter vielleicht grösser ist als für die Sohlen des Arbeiters.

Fig. 254.



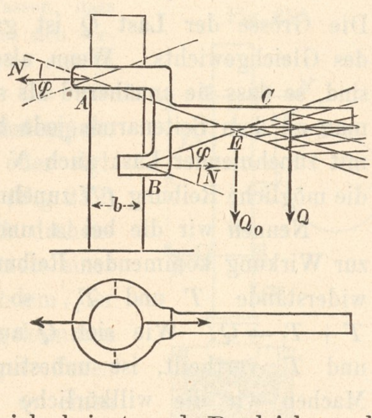

Ist die Leiter sehr leicht, so wird, wenn ein Mensch sie bis oben erstiegen hat, annähernd $n = 1$, mithin

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{f} + f - f = \frac{1}{f}, \text{ d. h, } \alpha = 90^0 - \varphi;$$

d. h. in diesem Falle, darf die Leiter höchstens um den Reibungswinkel von der Lothrechten abweichen (Fig. 254). Für $\varphi = 22^0$ wäre $\alpha = 68\,'$. Die Gesammtwiderstände $W$ und $W_1$ schneiden sich mit $Q$ in $B$, es wird $W = Q \cos \varphi$; $W_1 = Q \sin \varphi$.

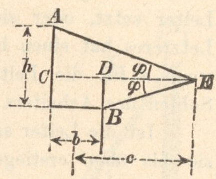
**Reibungs-Hülsen und Reibungs-Ringe zur Aufhängung von Lasten.** Soll an einer Säule ohne Vorsprünge eine Last nur durch Reibung sicher aufgehängt werden, so schiebe man (Fig. 255) über die Säule eine Hülse, welche erstere bei $A$ und $B$ berührt, bei $A$ also einen geschlossenen Ring bildet, während bei $B$ nur ein Ringsegment erforderlich ist. Zuerst stützt man die Hülse gegen Hinabgleiten, etwa bei $A$, übt dann an dem seitlichen Arme $C$ einen Druck nach unten aus und bewirkt dadurch ein Drehungsbestreben rechts herum, welchem sich bei $A$ und $B$ gleiche und entgegengesetzte Drücke $N$ der Säule entgegenstellen. Mit Einschluss

Fig. 255.



der Reibung bilden sich nun in $A$ und $B$ Gesammtwiderstände $W$ und $W_1$ innerhalb der Reibungskegel der Punkte $A$ und $B$. Die Mittelschnitte der Reibungskegel treffen sich zunächst im Punkte $E$; rechts von $E$ aber liegt der Bereich der möglichen Schnittpunkte von $W$ und $W_1$. Geht daher das Gesammtgewicht $Q$ der Hülse einschliesslich des belasteten Armes durch $E$, so befindet sich die Hülse im Grenzzustande der Ruhe, weil die Drücke $N$ dann noch so gering sind, dass nur die volle Reibung $fN$ an beiden Stellen hinreicht, um das Abwärtsgleiten zu verhindern.

Fig. 256.




Geht aber das Gesammtgewicht $Q$ rechts von $E$ vorbei, so ist das Gleichgewicht der Hülse, gesichert, und zwar um so mehr, je weite rechts $Q$ liegt. Ist $b$ die Breite der Säule $h$ der Höhenabstand der Punkte $A$ und $B$, $c$ die gesuchte Entfernung des Punktes $E$ von der Mitte der Säule (Fig. 256), so findet man leicht

$$h = AC + DB = \left(c + \frac{b}{2}\right)\operatorname{tg}\varphi + \left(c - \frac{b}{2}\right)\operatorname{tg}\varphi$$

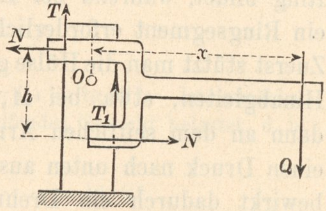
$$h = 2\,c\operatorname{tg}\varphi \quad \text{oder} \quad c = \frac{h}{2f}.$$

Ist $x$ der Abstand der Gesammtlast $Q$ von der Säulenmitte, so ist die Bedingung für Ruhe:

$$6) \qquad x \geqq c \quad \text{d. h.} \quad x \geqq \frac{h}{2f}.$$

Die Grösse der Last $Q$ ist ganz ohne Einfluss auf die Sicherheit des Gleichgewichts. Wenn also Säule und Hülse nur stark genug sind, so dass sie annähernd als starre Körper gelten können, so kann man an dem Seitenarme jede beliebig grosse Last aufhängen, weil mit zunehmender Last auch $N$ und die mögliche Reibung $fN$ zunehmen.

Fig. 257.




Nennen wir die bei $A$ und $B$ zur Wirkung kommenden Reibungswiderstände $T$ und $T_1$, so ist $T + T_1 = Q$. Wie sich $Q$ auf $T$ und $T_1$ vertheilt, ist unbestimmt. Machen wir die willkürliche Annahme: $T = T_1 = {}^1/_2\,Q$, so können auch $N$ und $N_1$ berechnet werden. In Bezug auf $O$ (Fig. 257) ist dann, weil die Momente von $T$ und $T_1$ sich aufheben, $Nh = Qx$. Die Summe der grössten möglichen Reibungswiderstände wäre

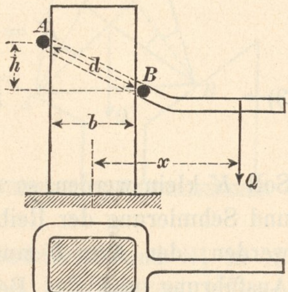
$$2\,f\,N = 2\,f\,Q\frac{x}{h} \quad \text{oder, weil } h = 2\,f\,c \text{ war,}$$

$$2\,f\,N = Q\,x : c;$$

weil nun von der Reibung nur der Theil $Q$ beansprucht wird, so ist die gesammte mögliche Reibung $x : c$ mal so gross wie die nöthige; $x : c$ kann also als der Sicherheitsgrad bezeichnet werden.

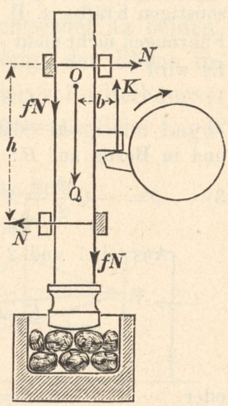
Die Reibungshülse kann durch den einfachen Reibungsring (Fig. 258) (mit der gleichen Wirkung) ersetzt werden. Der etwa aus Rundeisen geschmiedete Ring hat eine Weite $d$, welche grösser ist als die Breite der Säule, so dass der Ring erst in schräger Lage die Säule bei $A$ und $B$ berührt. Die Reibungskegel bei $A$ und $B$ haben dann die gleiche Bedeutung wie in Fig. 255.

Fig. 258.




**Beispiel:** Es sei $b = 0{,}2^{\,\mathrm{m}}$ die Breite der Säule, $d = 0{,}21^{\,\mathrm{m}}$ die Weite des Ringes; dann wird $h = \sqrt{d^2 - b^2} = 0{,}064^{\,\mathrm{m}}$. Ist nun für Holz und Schmiedeeisen (ohne Schmierung) $f = 0{,}5$, so wird $c = 0{,}064 : (2 \cdot 0{,}5) = 0{,}064^{\,\mathrm{m}}$. Macht man nun $x = 0{,}2^{\,\mathrm{m}}$, so ist die Sicherheit gegen Gleiten eine $0{,}2 : 0{,}064 = 3$ fache (rund). Ist also die Gesammtlast $Q = 100^{\,\mathrm{kg}}$, so ist die gesammte mögliche Reibung $300^{\,\mathrm{kg}}$, von der aber nur $100^{\,\mathrm{kg}}$ zur Wirkung kommen. Oder man kann die Sicherheit auch so auffassen, dass die Reibungsziffer $0{,}5$ auf $^1/_3$ ihres Werthes sich vermindern darf, bevor Gleiten eintritt. Für $f = {}^1/_6$ würde nämlich $c = 0{,}064 \cdot 3 = 0{,}192$, d. h. fast $= x$.

Fig. 259.




**Gleichförmige Hebung eines Pochstempels.** Ein zum Zerkleinern von Erzen oder dgl. dienender Stempel vom Gewichte $Q$ (Fig. 259) wird durch den Daumen einer sich drehenden Daumenwelle erfasst und mittels einer Kraft $K$ gehoben, bis er, nachdem der Daumen an dem Hubarme vorbeigekommen ist, frei herabfällt und die davon getroffenen Körper zerstampft. Da $K$ und $Q$ einen wagerechten Abstand $b$ haben, so würde der Stempel umfallen, wenn er nicht durch Führungen in lothrechter

Lage gehalten würde. Von den Führungshölzern werden beim Heben nur die schraffirten wirksam und liefern gleiche Normaldrücke $N$, denen beim Aufwärtsgleiten abwärts gerichtete Reibungen $fN$ entsprechen. Es ist nach der Gleichung der lothrechten Kräfte

1) $$K = Q + 2fN.$$

Die Momentengleichung in Bezug auf einen Punkt $O$ der Mitte des Stempels lautet:

2) $$Nh = Kb.$$

Setzt man den hieraus erhaltenen Werth von $N$ in Gl. 1 ein, so wird

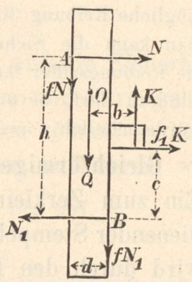
$$K = Q + 2f\frac{Kb}{h}, \text{ mithin}$$

3) $$K = \frac{Q}{1 - 2f \cdot \frac{b}{h}}.$$

Soll $K$ klein werden, so muss $fb : h$ klein ausfallen; durch Glättung und Schmierung der Reibungsflächen muss hiernach $f$ klein gemacht werden; der Arm $b$ muss so kurz sein, wie die Rücksichten der Ausführung und des Betriebes gestatten, und der Abstand $h$ der Führung muss möglichst gross sein.

**Beispiel:** Ist $Q = 150$ kg, $f = 1/8$, $b : h = 1 : 8$, so wird $K = 155$ kg. In der vorstehenden Ableitung ist angenommen, dass der Daumen auf den Arm $b$ nur eine lothrechte Kraft ausübe; bei der Drehung der Welle gleitet aber der Daumen unter dem Arme nach rechts fort und wirkt durch Reibung nach rechts ziehend auf den Arm, so dass zu der Kraft $K$ noch die nach rechts wirkende Reibung $f_1K$ hinzukommt. Dies ändert die sonstigen Kräfte, z. B. wird nun der Druck $N$ an beiden Führungen nicht mehr der gleiche sein können (Fig. 260). Es wird

Fig. 260.




1) $$f_1K = N_1 - N;$$

2) $$K = Q + f(N + N_1),$$

und in Bezug auf $B$:

3) $$0 = -Q\frac{d}{2} + Nh - fNd - K\left(b - \frac{d}{2}\right) + f_1Kc.$$

Aus Gl. 1 und 2 wird $N = \dfrac{K(1 - ff_1) - Q}{2f}$ und sodann aus Gl. 3:

$$K = \frac{Q}{1 - ff_1 + \frac{d}{h}f^2f_1 - 2\frac{b}{h}f + \frac{2c}{h}ff_1}$$

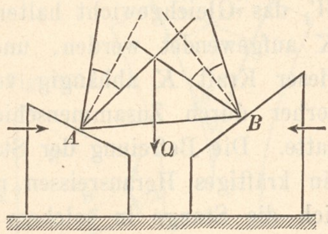
oder
$$K = \frac{Q}{1 - 2\frac{b}{h}f - ff_1\left(1 - \frac{d}{h}f - \frac{2c}{h}\right)}.$$

$Q = 150$; $f = f_1 = {}^1/_8$; $b : h = {}^1/_8$; $d : h = {}^1/_{10}$; $c : h = {}^1/_2$ giebt dann $K = 155$ kg. Der Unterschied gegenüber obiger Vernachlässigung von $f_1$ ist verschwindend klein.

## f) Festklemmen eines Stabes zwischen zwei Flächen.

Sind die beiden Ebenen, zwischen denen eine Stange sich befindet, nicht fest, sondern gehören sie zwei Körpern an, die durch seitliche Kräfte einander genähert werden können (Fig. 261), so ist das Verhalten der Stange gegenüber dem Versuche, die stützenden Körper zusammenzuschieben, ein verschiedenes, je nachdem

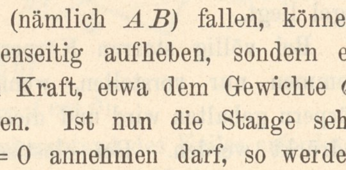
Fig. 261.




1. die Stange nicht in die beiden Reibungskegel der Punkte $A$ und $B$ fällt, oder aber
2. dieser Bedingung genügt.

Im ersten Falle können die Gesammtdrücke $W$ und $W_1$ in $A$ und $B$ niemals in dieselbe Gerade (nämlich $AB$) fallen, können also auch niemals sich allein gegenseitig aufheben, sondern es können $W$ und $W_1$ nur einer dritten Kraft, etwa dem Gewichte $Q$ der Stange das Gleichgewicht halten. Ist nun die Stange sehr leicht, so dass man annähernd $Q = 0$ annehmen darf, so werden auch $W$ und $W_1$ zu Null, d. h. die Stange übt auf die seitlichen Körper keine nennenswerthen Drücke aus. Versucht man, die Körper zusammenzuschieben, so kann die Stange dies nicht hindern, sondern sie weicht nach oben aus, indem sie sich entweder an beiden Stellen $A$ und $B$ oder nur an einer derselben längs der Ebene in die Höhe schiebt. An der Gleitstelle tritt dann der volle Reibungswiderstand auf, so dass dort $W$ oder $W_1$ die tiefste mögliche Lage einnimmt, falls $Q$ nicht ganz gleich Null angenommen wird.

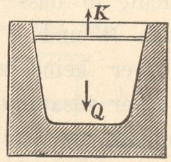
Fig, 262.




Liegt aber die Gerade $AB$ innerhalb beider Reibungskegel (Fig. 262), so können $W$ und $W_1$ auch beide in die Gerade $AB$ fallen und sich dann allein, ohne Hinzutreten einer dritten Kraft, gegenseitig aufheben. Sie können nun in jeder beliebigen Grösse auftreten, wenn die Stange zwischen den Ebenen ruht. Versucht man wieder, die Seitenkörper zusammenzuschieben, so wird die Stange dies vollständig verhindern. Je stärker man auf die Seitenkörper drückt, desto grösser werden auch die Widerstände $W = W_1$. Soll die Stange aber, um Raum zu geben, bei $A$ und $B$ nach oben ausweichen, so kommen die tiefsten Richtungen von $W$ und $W_1$ zur Geltung, und um unter deren Einwirkung eine Bewegung der Stange nach oben zu ermöglichen, muss eine den Kräften $W$ und $W_1$ das Gleichgewicht haltende, d. h. nach oben gerichtete Kraft $K$ aufgewendet werden, und zwar ist die erforderliche Grösse dieser Kraft $K$ abhängig von der Grösse der Pressung, die man vorher durch Zusammenschieben der Seitenkörper hervorgebracht hatte. Die Befreiung der Stange erfordert daher unter Umständen ein kräftiges Herausreissen nach oben hin. Der Zustand, in dem sich die Stange in solchem Falle befand, nennt man ein Festklemmen zwischen den Seitenkörpern. Es ist ein solches Festklemmen möglich, wenn $AB$ innerhalb der beiden Reibungskegel liegt.

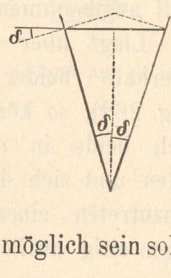
Bei völlig starren Körpern kann man sich ein solches Festklemmen nur vorstellen, wenn die Stange zuerst zwischen den Körpern gehalten wird und diese dann zusammengedrückt werden. Bei elastisch festen Körpern aber kann man die Stange auch durch einen abwärts gerichteten Druck in einen keil- oder kegelförmigen Hohlraum, dessen Seitenwände einen einzigen Körper bilden, hineintreiben (Fig. 263), kann dabei an den Berührungsstellen mehr oder weniger starke Pressungen erzeugen, die dann einer Lösung der Stange einen entsprechenden Reibungswiderstand entgegensetzen. Unter Umständen kann man dann den etwa gefässartigen Körper mittels der Stange emporheben.

Fig. 263.




Halbirt man die Winkel $2\,\delta$ zwischen beiden Seitenebenen durch eine Ebene und stellt die Stange zu dieser rechtwinklig (Fig. 264), so bildet sie mit Normalen zu der Ebene die Winkel $\delta$. Soll sie nun innerhalb der Reibungskegel liegen, so muss $\delta \leqq \varphi$ sein, d. h. der Winkel zwischen den Seitenebenen muss $\leqq 2\,\varphi$ sein, wenn ein Festklemmen möglich sein soll.

Fig. 264.



## g) Keil in dem Spalt eines Baumstammes oder dergl.

Ein zur Mittelebene symmetrischer Keil vom Keilwinkel $2\delta$ (Fig. 265) soll durch eine Kraft $K$ gleichmässig in dem Spalte weitergeschoben werden. Zu den Normaldrücken $N$ kommen die in die Keilflächen fallenden, nach oben gerichteten Reibungswiderstände $fN$ hinzu. $N$ schliesst den Winkel $\delta$ mit der Querrichtung des Keiles, $fN$ denselben Winkel mit der Kraft $K$ ein. Für Gleichgewicht wird daher (Fig. 265a)

Fig. 265.

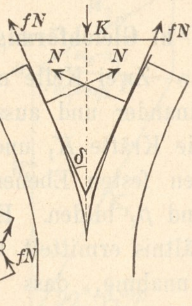
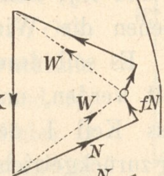



Fig. 265a.



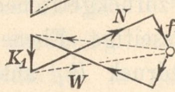




Fig. 265b.

$$K = 2N \sin\delta + 2fN \cos\delta$$

$$1) \qquad = 2N(\sin\delta + f\cos\delta).$$

Oder auch $K = 2W\sin(\delta + \varphi)$

mit $W = N : \cos\varphi$.

Für die rückgängige Bewegung des Keiles gilt (ebenfalls mit dem Sinne der Kraft nach unten, Fig. 265b)

$$2) \qquad K_1 = 2N(\sin\delta - f\cos\delta).$$

Die Kraft $K_2$ aber, welche für den Ruhezustand des Keiles erforderlich ist, muss zwischen den Werthen $K_1$ und $K$ bleiben.

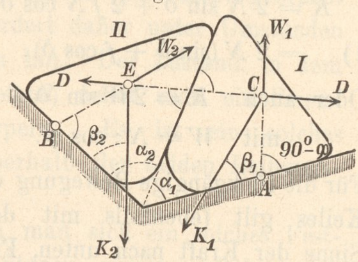
Ist $\delta > \varphi$, d. h. $\operatorname{tg}\delta > f$ oder $\sin\delta > f\cos\delta$, so ist $K_1 > 0$. In diesem Falle muss auch bei der Aufwärtsbewegung noch eine abwärts gerichtete Kraft $K_1$ wirken, damit die Bewegung nicht beschleunigt, sondern gleichförmig erfolge. Die Drücke $N$ würden trotz der Reibung noch im Stande sein, den Keil beschleunigt aus dem Spalt hinauszutreiben; oder der zu stumpfe Keil wird, sobald die treibende Kraft aufhört, zurückspringen. Für $\delta < \varphi$ aber wird $K_1 < 0$, d. h. in diesem Falle ist ein Herausziehen des Keiles durch eine aufwärts gerichtete Kraft $(-K_1)$ nöthig. Der Keil wird durch die Reibung im Spalte festgehalten; je grösser die Seitendrücke $N$ werden, um so fester steckt er; es findet hier also ähnliches statt wie beim Festklemmen einer Stange, und zwar erfolgt dies Klemmen ebenfalls, wenn der Keilwinkel $2\delta < 2\varphi$. Auch hier können in solchem Falle die Gesammtdrücke $W$ und $W_1$ der beiden Seitenflächen in dieselbe Linie fallen und sich allein gegenseitig aufheben.

Bei der gewöhnlichen Anwendung des Keiles zum Spalten ist die Wirkung der Triebkraft eine unterbrochene. Wäre nun $\delta > \varphi$, so würde der Keil in den Pausen zwischen zwei Schlägen zurückspringen. Daher muss $\delta < \varphi$ gemacht werden, der Keil muss sich gegen Zurückspringen festklemmen. Ein solcher Keil heisst selbstsperrend.

### h) Gleichförmige Bewegung zweier sich berührenden Keile.

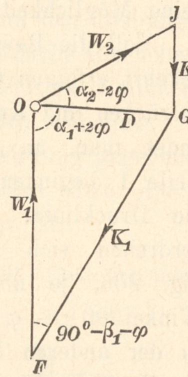
Zwei Keile mit den Keilwinkeln $\alpha_1$ und $\alpha_2$ (Fig. 266) berühren einander und ausserdem zwei Seitenebenen. Auf die Keile wirken die Kräfte $K_1$ und $K_2$, welche mit den festen Ebenen die Winkel $\beta_1$ und $\beta_2$ bilden. Es soll deren Verhältnis ermittelt werden, unter der Annahme, dass Keil I der vorrückende, II der zurückgetriebene sei.

Fig. 266.




Die rechtsseitige Ebene übt einen Gesammtdruck $W_1$ aus, der von der Normalen zur Ebene um den Reibungswinkel $\varphi$ nach rechts abweichen muss, wenn Keil I nach links vorrückt. Der Angriffspunkt von $W_1$ ist unbestimmt, werde daher in $A$ willkürlich angenommen. $W_1$ bildet mit dem oberen Theile der rechtsseitigen Unterstützungsebene, an der er abwärts gleitet, den spitzen Winkel $90^0 - \varphi$ (mit dem unteren Theile den stumpfen Winkel $90^0 + \varphi$). Durch den Punkt $C$, in welchem $W_1$ die Kraft $K_1$ schneidet, muss nun auch der gegenseitige Druck $D$ zwischen beiden Keilen hindurchgehen, weil drei sich im Gleichgewichte haltende Kräfte einen gemeinsamen Schnittpunkt haben müssen. $D$ muss die Berührungsebene beider Keile wieder so schneiden, dass der spitze Winkel $90^0 - \varphi$ im Keile I auf der oberen Seite erscheint. (Die Winkel $90^0 - \varphi$ sind in der Figur durch kleine Kreisbögen hervorgehoben.) Der gegenseitige Druck $D$ schneidet $K_2$ im Punkte $E$, durch welchen auch $W_2$ hindurchgehen muss. Bei $B$ aber, wo $W_2$ die linksseitige feste Ebene trifft, muss der spitze Winkel $90^0 - \varphi$ an der unteren Seite erscheinen, da der Keil II nach oben gleitet. Hiermit stehen die Richtungen der Drücke an den Keilflächen fest; die Lagen ebenfalls, nachdem der Punkt $A$ willkürlich angenommen war. Trägt man nun die Kraft $K_1$ nach einem beliebigen Mafsstabe als $GF$ im Krafteck (Fig. 266a) auf, setzt daran die Richtungen von $W_1$ und $D$, so schneiden sich beide in $O$ und schliessen das Kräftedreieck $GFO$, welches der Gleichgewichtszustand fordert. Zieht man $OJ \parallel W_2$, $GJ \parallel K_2$, so stehen nun auch die Kraftgrössen $W_2$ und $K_2$ fest. Der Linienzug $ACEB$, dessen Seiten die Richtungslinien der Drücke an den drei Keilflächen darstellen, heisst die Drucklinie der beiden Keile. Betrachtet man $O$ als den Pol des Kraftecks, so sind die Seiten der Drucklinie den Polstrahlen $OF$, $OG$, $OJ$ der Reihe nach parallel. Die Drucklinie bildet daher ein zu den Kräften $K_1$ und $K_2$ gezeichnetes Seileck. Die Lage des Poles $O$ und die Grösse der Kraft $K_2$ sind aber an die Bedingung gebunden, dass die Seiten des Seilecks, d. h. der Drucklinie, die Keilflächen in ganz bestimmter Weise unter den Winkeln $90^0 - \varphi$ schneiden müssen. Will man nun die Kräfte aus dem Krafteck auch berechnen, so muss man die Winkel des Kraftecks bestimmen.

Fig. 266 a.




Der spitze Winkel zwischen $K_1$ und $W_1$ würde $90^0 - \beta_1$ betragen, wenn $W_1$ ein Normaldruck wäre. Durch die Abweichung um $\varphi$ wird jener Winkel noch um dieses Mafs kleiner, d. h. es wird $\sphericalangle OFG = 90^0 - \beta_1 - \varphi = 90^0 - (\beta_1 + \varphi)$. $D$ und $W_1$ würden, wenn beide Normaldrücke wären, denselben Winkel $\alpha_1$ mit einander bilden wie die entsprechenden Keilflächen; durch die Abweichung einer jeden um $\varphi$ vergrössert sich dieser Winkel um $2\varphi$; daher ist $\sphericalangle FOG = \alpha_1 + 2\varphi$. Entsprechend findet man $\sphericalangle OJG = 90^0 - (\beta_2 - \varphi)$, $\sphericalangle JOG = \alpha_2 - 2\varphi$. Sonach ergiebt sich

$$K_1 : D = \sin(\alpha_1 + 2\varphi) : \cos(\beta_1 + \varphi);$$
$$K_2 : D = \sin(\alpha_2 - 2\varphi) : \cos(\beta_2 - \varphi).$$

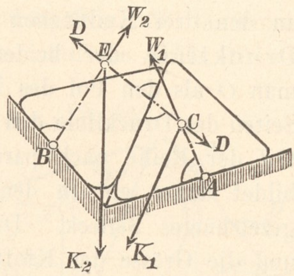
Durch Theilung beider Gleichungen entsteht dann

$$1) \qquad \frac{K_1}{K_2} = \frac{\sin(\alpha_1 + 2\varphi)\cos(\beta_2 - \varphi)}{\sin(\alpha_2 - 2\varphi)\cos(\beta_1 + \varphi)}.$$

Für $\alpha_2 = 2\varphi$ würde $\sphericalangle JOG = 0$ und $K_2 = 0$ oder $K_1 : K_2 = \infty$, in der Drucklinie würde $BE$ mit $CE$ zusammenfallen, d. h. der

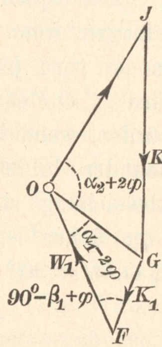
Keil II würde zwischen Keil I und der linksseitigen Ebene sich festklemmen. Die vorausgesetzte Bewegung würde ferner unmöglich werden für $\beta_1 = 90^0 - \varphi$, weil dann $\measuredangle OFG = 0$ werden würde. In diesem Falle würde $K_1$ schon durch $W_1$ allein aufgehoben und es entstände gar kein Druck $D$ gegen den zweiten Keil, also auch keine Möglichkeit, die Kraft $K_2$ an dem Keile II zu überwinden.

Fig. 267.




Soll die Bewegung der Keile umgekehrt erfolgen (Fig. 267), soll Keil II vorrücken und Keil I zurückweichen, so findet man, an einem Punkte $A$ am Keile I beginnend, in gleicher Weise die Drucklinie; ihre einzelnen Seiten verdrehen sich aber, gegenüber der Fig. 266, je um $2\,\varphi$. Die spitzen Winkel $90^0 - \varphi$ liegen jetzt durchweg an der anderen Seite als in Fig. 266. Im Krafteck (Fig. 267a) wird, wenn $K_1$ zu derselben Grösse angenommen wird wie vorher, $K_2$ nun viel grösser als vorher. Das Verhälinis $K_1 : K_2$ erhält man leicht, wenn man in Gl. 1 durchweg die Vorzeichen von $\varphi$ umkehrt.

Fig. 267a.




Sind endlich beide Keile in Ruhe, so liegt die Richtung des Widerstandes $W_1$ irgendwo innerhalb des doppelten Reibungswinkels, und dasselbe gilt für die Richtungen der Drücke $D$ und $W_2$. Bei gegebenem $K_1$ hat nun der Pol $O$ des Kraftecks keine bestimmte Lage mehr, weil $W_1$ und $D$ innerhalb des doppelten Reibungswinkel jede Richtung haben können; ebenso wird die Richtung von $W_2$ unbestimmt und damit auch die Grösse $K_2$. Das Verhältnis $K_1 : K_2$ ist jetzt nur durch die beiden Grenzen bestimmt, welche sich aus den beiden untersuchten Bewegungsfällen ergeben haben und welche man auch leicht rechnerisch findet, indem man Gl. 1 das eine Mal mit dem angegebenen Vorzeichen von $\varphi$, das andere Mal mit den entgegengesetzten dieser Zeichen ausrechnet.

Man erkennt hieraus, dass es für die beiden ruhenden Keile im Allgemeinen unendlich viele mögliche Drucklinien giebt. Jede derselben ist ein zu den Kräften $K_2$ und $K_1$ gezeichnetes Seileck, zu dessen Konstruktion der Pol $O$ und der Anfangspunkt $A$ der Drucklinie innerhalb gewisser Grenzen beliebig gewählt werden können. Da aber die Seiten der Drucklinie die Richtung und Lage der Drücke an Keilflächen darstellen, so müssen sie zwei einschränkenden Bedingungen genügen:

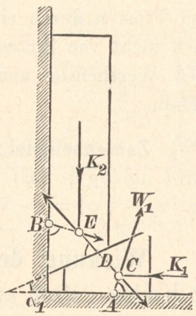
1. darf eine Seite der Drucklinie höchstens um den Reibungswinkel von der Normalen zu der entsprechenden Keilfläche abweichen;

2. muss eine Seite der Drucklinie die zugehörige Keilfläche innerhalb des Bereiches der Berührung (vgl. S. 166) schneiden.

Der Ruhezustand der beiden Keile unter Einwirkung gegebener Kräfte $K_1$ und $K_2$ ist nur möglich, wenn wenigstens eine, diesen Bedingungen entsprechende, Drucklinie nachweisbar ist.

**Beispiel:** Ein mit $K_2$ belasteter Pfosten (Fig. 268) soll mittels des untergeschobenen Keiles, an dem eine wagerechte Kraft $K_1$ wirkt, gleichmässig in die Höhe gekeilt werden. Die Drucklinie $ACEB$ ergiebt sich leicht unter Annahme eines willkürlichen Punktes $A$. (Die spitzen Winkel $90^0 - \varphi$ sind wieder durch kleine Bögen ohne Ziffern bezeichnet.) Der Druck $D$ würde, wenn er ein Normaldruck wäre, mit der Lothrechten den Winkel $\alpha_1$ bilden; wegen der Reibung wird dieser Winkel $OGJ = \alpha_1 + \varphi$. Das Verhältnis $K_1 : K_2$ liesse sich leicht aus Gl. 1 berechnen, indem man dort die Sonderwerthe dieses Falles einsetzte. Wir ziehen aber eine unmittelbare Berechnung vor. Man erkennt leicht, dass $W_1$ und $W_2$ von den zu einander rechtwinkligen Gleitebenen nach derselben Seite um $90^0 - \varphi$ abweichen, also ebenfalls zu einander winkelrecht sein müssen. Das Viereck $GFOJ$ ist darnach bei $G$ und bei $O$ rechtwinklig, ist also ein einem Kreise vom Durchmesser $FJ$ eingeschriebenes. Der Winkel $FOG = \alpha_1 + 2\varphi$ steht über dem Bogen $\widehat{FG}$; demselben Bogen entspricht aber auch der Umfangswinkel $FJG$, der daher dieselbe Grösse $\alpha_1 + 2\varphi$ hat. Daher ist

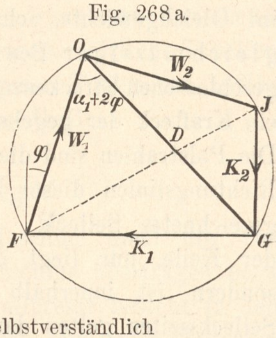
Fig. 268.




$$K_1 : K_2 = \operatorname{tg}(\alpha_1 + 2\varphi).$$

Für $\alpha_1 + 2\varphi = 90^0$ oder $\alpha_1 = 90^0 - 2\varphi$ mithin $\alpha_2 = 2\varphi$ wird $K_1 : K_2 = \infty$, oder das Hinaufkeilen unmöglich. Es fallen dann nämlich $D$ und $W_2$ zusammen und klemmen den als zweiten Keil geltenden Pfosten fest.

Fig. 268 a.

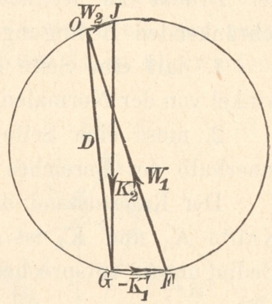



Für die entgegengesetzte Bewegung, d. h. für gleichmässiges Hinablassen des Pfostens, gilt selbstverständlich

$$K_1' : K_2 = \operatorname{tg}(\alpha_1 - 2\varphi).$$

Für die meisten Fälle ist es wünschenswerth, dass der untere Keil selbstsperrend sei, d. h. dass für den Rückgang $K_1' < 0$ werde. Mithin muss $\alpha_1 < 2\varphi$ sein. Für diesen Fall gilt das Krafteck Fig. 268b, in welchem die den unteren Keil zurückziehende Kraft $-K_1' = GF$ ist. Der Druck $D$ zwischen beiden Keilen bildet mit der Lothrechten den Winkel $OGJ = \alpha_1 - \varphi$. Würde dieser wegen $\alpha_1 = \varphi$ zu Null, so ergäbe sich $D$ lothrecht und $OJ = W_2 = 0$. Unter diesen Umständen und ebenso für $\alpha_1 < \varphi$ würde sich der Pfosten beim Zurückziehen des unteren Keiles nicht mehr gegen die lothrechte Wand stützen; er würde vielmehr wegen des lothrechten $D$, welches dann $= K_2$ ist, durch den unteren Keil von der Wand abgezogen werden, würde auf dem Keile nicht abwärts gleiten, also auch nicht sinken; es würde also der Zweck der Rückwärtsbewegung nicht erreicht werden. Für $\alpha_1 < \varphi$ würde $W_2$ sogar negativ werden, d. h. es müsste der Pfosten durch eine besondere Kraft gegen die Wand gedrückt werden, um sich nicht von ihr zu entfernen. Daraus folgt, dass der Keilwinkel $\alpha_1$ zwischen den Werthen $\varphi$ und $2\varphi$ liegen muss, damit die Vorrichtung ihren Zweck erfülle.

Fig. 268b.




**Zahlenbeispiel:** Bei $f = 0{,}2$ oder $\varphi = 11^0$ und $\alpha_1 = 17^0$ mit $\operatorname{tg}\alpha_1 = 0{,}3$ wird $\operatorname{tg}(\alpha_1 + 2\varphi) = \operatorname{tg} 39^0 = 0{,}8$, mithin $K_1 = 0{,}8\,K_2$ für Hinaufkeilen; $\operatorname{tg}(\alpha_1 - 2\varphi) = -\operatorname{tg}(5^0) = -0{,}09$, d. h. $-K_1 = 0{,}09\,K_2$ für Hinunterlassen.

**Wirkung der Keilpresse.** Dieselben Grundgedanken wie bei 2 Keilen gelten auch, wenn die Zahl der Keile grösser ist. Gleiten die Keile, so tritt an jeder Keilfläche ein Druck auf, der von der Normalen zur Keilfläche um den Reibungswinkel abweicht. An jedem Keile halten sich die Flächendrücke mit einer dritten Kraft $K$ im Gleichgewichte, schneiden sich daher in einem Punkte. Bei gleichmässiger Bewegung bilden die 3 Kräfte jedes Keiles einen geschlossenen Streckenzug. Das ganze Krafteck aber bildet wiederum ein Krafteck der gegebenen Kräfte $K$ mit seitwärts liegendem Pole. Die Polstrahlen sind die Drücke der Keilflächen; die dazu parallelen Richtungslinien dieser Kräfte bilden daher ein zu den Kräften $K$ gezeichnetes Seileck. Letzteres gilt auch für den Ruhezustand der Keile, nur liegt dann der Pol nicht mehr bestimmt fest, sondern ist innerhalb gewisser Grenzen unbestimmt. Für die Seilecksseiten gelten dann dieselben Beschränkungen wie auf S. 211 angegeben.

Bei einer Keilpresse etwa zum Auspressen von Öl aus zerstampften Ölsamen (Fig. 269) wirkt $K_1$ als Triebkraft auf den mittleren Keil von Keilwinkel $2\,\delta$. Durch Niedertreiben dieses Keiles werden die Seitenkeile auf den wagerechten Gleitflächen auseinander getrieben und dadurch die Ölgutsäcke $S$, $S$ gepresst, welche dabei die Gegendrücke $K_2$ leisten. $ACEFB$ ist die Drucklinie. Stellt man die Triebkraft $K_1$ durch $GJ$ im Krafteck (Fig. 269a) dar, so sind $JO$ und $GO$ die Gegendrücke $D$ der beiden Seitenkeile, welche von der Wagerechten um $\delta + \varphi$ abweichen. Dadurch ist der Pol $O$ bestimmt. Die Widerstände $W$ der wagerechten Gleitflächen bilden mit der Lothrechten die Winkel $\varphi$ und legen dann mit den Wagerechten durch $G$ und $J$ die Punkte $L$ und $M$ fest, wodurch $JL = GM = K_2$ bestimmt werden. Es ist dann im Dreieck $OGJ$:

Fig. 269.

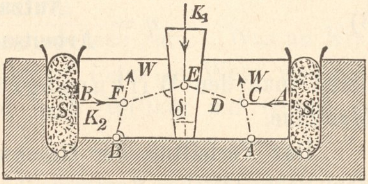
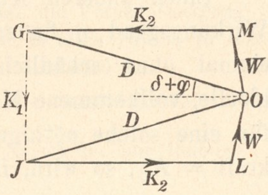



Fig. 269 a.




$$K_1 : D = 2 \cdot \sin(\delta + \varphi),$$

im Dreieck $OGM$ aber, weil $\measuredangle\, GOM = 90^0 - (\delta + 2\,\varphi)$:

$$K_2 : D = \cos(\delta + 2\,\varphi) : \cos\varphi,$$

mithin wird

$$1) \qquad \frac{K_1}{K_2} = 2\,\frac{\sin(\delta + \varphi)\cos\varphi}{\cos(\delta + 2\,\varphi)}.$$

Weil beim Keile gewöhnlich $\operatorname{tg}\delta$ gegeben ist, kann man vorstehende Formel zur bequemeren Berechnung (ohne trigonometrische Tabellen) umformen, indem man die zusammengezogenen Funktionen auflöst und in Zähler und Nenner mit $\cos\delta \cdot \cos^2\varphi$ theilt:

$$2) \qquad \frac{K_1}{K_2} = 2\,\frac{\operatorname{tg}\delta + f}{1 - f^2 - 2f\operatorname{tg}\delta}.$$

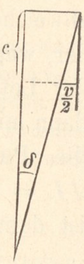
Zur Beurtheilung der Güte einer Maschine dient die Vergleichung der Arbeiten, welche von der Maschine übertragen bezw. aufgenommen werden. Der Zweck der Keilpresse besteht in dem Zusammenpressen des Gutes bei $S$. Rückt nun jeder Seitenkeil um $\frac{1}{2}v$ nach aussen, während der Treibkeil sich um $c$ abwärts bewegt, so verrichten die auf das Gut übertragenen Kräfte $K_2$ zusammen eine Arbeit $K_2 v$. Dies ist die Nutzarbeit; $K_1 c$ ist aber der Arbeitsaufwand. Das Verhältnis beider, nämlich

3) $$\eta = \frac{\textbf{Nutzarbeit}}{\textbf{Arbeitsaufwand}} = \frac{\boldsymbol{K_2 v}}{\boldsymbol{K_1 c}},$$

nennt man den Wirkungsgrad oder das Güteverhältnis der Maschine.

Das Verhältnis der Geschwindigkeiten $v$ und $c$ findet man aus dem geometrischen Zusammenhange der Maschine (Fig. 270). Rückt der Treibkeil um $c$ abwärts, so drängt er jeden Seitenkeil um $\frac{1}{2}v$ zur Seite, wo $\frac{1}{2}v = c \operatorname{tg} \delta$. Daher ist hier

Fig. 270.



4) $$\eta = \frac{2 K_2}{K_1} \operatorname{tg} \delta .$$

Einen anderen Ausdruck kann man noch für den Wirkungsgrad $\eta$ finden, wenn man sich die Maschine einmal ohne schädliche Reibungswiderstände als eine ideelle, vollkommene Maschine vorstellt. Nennt man die für eine solche nöthige Betriebskraft die ideelle Triebkraft $= K_0$, so wird, indem man in Gl. 2 $f = 0$ setzt,

5) $$\frac{K_0}{K_2} = 2 \operatorname{tg} \delta = \frac{v}{c} .$$

Führt man dies in Gl. 3 ein, so erhält man

6) $$\eta = \frac{\boldsymbol{K_0}}{\boldsymbol{K_1}} = \frac{\textbf{ideelle Triebkraft}}{\textbf{wirkliche Triebkraft}} .$$

Nach Gl. 5 ist $K_0 c = K_2 v$, d. h. bei einer vollkommenen Maschine würden Arbeitsaufwand und Nutzarbeit einander gleich oder der Wirkungsgrad gleich Eins sein. Eine Maschine ist mechanisch um so vollkommener, je mehr sie sich diesem ideellen Zustande nähert. Die Bezeichnung $K_0 c = K_2 v$ haben wir nur für diese besondere Maschine bewiesen; sie gilt aber allgemein. Bewegen sich nämlich alle Theile einer Maschine gleichförmig, so findet keine Zunahme des Arbeitsvermögens statt, also muss auch die gesammte Arbeit Null sein. Die inneren Spannkräfte einer vollkommenen Maschine verrichten aber nach S. 144 keine Arbeit. Die Widerstände völlig glatter Flächen, mit denen die einzelnen Maschinentheile in einander greifen und an einander gleiten, ebenso wenig. Die Nutzlast wirkt in Bezug auf die Maschine stets der Bewegung ihres Angriffspunktes entgegen, verrichtet daher eine negative Arbeit, die im absoluten Sinne der Arbeit der Triebkraft gleich sein muss. Also

7) $$v : c = K_0 : K_2 .$$

Dies ist der schon von Galilei ausgesprochene Satz: „Was an Kraft gewonnen wird, geht an Geschwindigkeit (oder an Weg) verloren." Man kann also den Wirkungsgrad nach Willkür auf Grund der Gl. 3 oder der Gl. 6 berechnen.

**Beispiel:** Die Reibungsflächen der Keilpresse seien gut geglättet und geschmiert, daher $f = 0{,}1$. Auch in diesem Falle ist es möglich, den Treibkeil selbstsperrend anzuordnen; dies ist erfüllt, wenn wir etwa $\operatorname{tg} \delta = {}^1/_{20}$ annehmen. In Gl. 2 werden dann die Grössen $f^2$ und $2\,f \operatorname{tg} \delta$ nur je ${}^1/_{100}$ und können zur Vereinfachung gegen 1 vernachlässigt werden. Es ist nämlich zu bedenken, dass die Reibungsziffern in Wirklichkeit schwanken werden und selten mit grosser Genauigkeit zu schätzen sind. Daher ist in Gl. 2 der Zähler doch kaum auf 2 % genau zu berechnen, so dass die Vernachlässigung im Nenner durchaus zulässig erscheint. Ähnliches gilt in allen Fällen, in denen Reibungswiderstände eine wichtige Rolle spielen. Dann wird

$$K_1 = 2 \cdot (0{,}05 + 0{,}1)\, K_2 = 0{,}3\, K_2 ; \quad v = 2\, c \cdot 0{,}05 = 0{,}1 \cdot c .$$

Der Wirkungsgrad $\eta = \dfrac{K_2\, v}{K_1\, c} = \dfrac{0{,}1}{0{,}3} = {}^1/_3$. Es würde ohne Reibung

$$K_0 = 2\, K_2 \operatorname{tg} \delta = 0{,}1\, K_2 ,$$

also auch $\eta = \dfrac{K_0}{K_1} = \dfrac{0{,}1\, K_2}{0{,}3\, K_2} = {}^1/_3$, wie vorstehend.

Bei dieser Maschine wird also von der aufgewandten Arbeit nur ein Drittel nützlich verwerthet, während zwei Drittel durch Reibung aufgezehrt werden. Die Keilpresse ist daher eine wenig vollkommene Maschine; Wasserdruckpressen z. B. arbeiten erheblich vortheilhafter. Die soeben besprochene Maschine hat aber Einfachheit und Billigkeit als Vorzüge.

Der Wirkungsgrad dieser Maschine nach Gl. 6 lässt sich, wenn man in Gl. 2 die erwähnte Vereinfachung

$$K_1 = 2\, K_2 (\operatorname{tg} \delta + f)$$

einführt, auch schreiben, weil $K_0 = 2\, K_2 \operatorname{tg} \delta$ ist,

8) $$\eta = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \delta + f} = \frac{1}{1 + \dfrac{f}{\operatorname{tg} \delta}} .$$

Vergrössert man $\operatorname{tg} \delta$, so verkleinert sich der Nenner, mithin wächst $\eta$. Macht man z. B. $\operatorname{tg} \delta = f$, so würde schon $\eta = {}^1/_2$ werden. Die beabsichtigte Selbstsperrung des Triebkeiles hat also den geringen Wirkungsgrad herbeigeführt. Es lässt sich zeigen, dass bei jeder Maschine, die selbstsperrend sein soll, der Wirkungsgrad unter 0,5 liegen muss. Man kann nämlich setzen: $K_1 = K_0 + F$, wenn $F$ der durch die Reibungswiderstände aufgezehrte Theil der Betriebskraft ist. Nimmt man nun an, dass beim Beginne der rückgängigen Bewegung der Reibungswiderstand annähernd noch dieselbe Grösse $F$ behält, so gilt für den Rückgang $K_1' = K_0 - F$. Soll nun die Maschine sich selbst sperren, so muss $K_1' \leqq 0$, mithin $F \geqq K_0$ oder

$$K_1 \geqq 2\,K_0 \quad \text{sein, d. h.} \quad \eta = \frac{K_0}{K_1} \leqq \frac{1}{2}.$$

## i) Drucklinie eines Gewölbes.

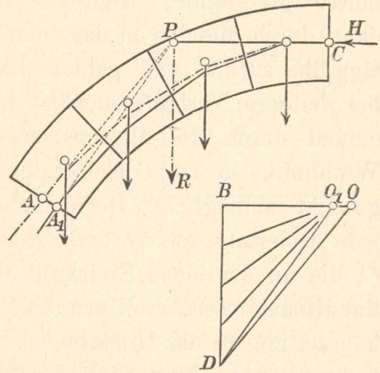
Auf S. 210 wurde gezeigt, dass die Drucklinie einer ruhenden Gruppe von 2 Keilen statisch unbestimmt ist, dass sie ein Seileck zu den Lasten $K$ der Keile sein muss und dass ihre Seiten an zwei beschränkende Bedingungen gebunden sind. Auf S. 212 wurde dann weiter erläutert, dass diese Sätze von der Zahl der Keile unabhängig sind, also auch bei beliebig vielen Keilen Gültigkeit behalten.

Die einzelnen Steine eines (ohne Mörtel gedachten) Gewölbbogens sind nun auch keilförmige Körper. Soll ein Gewölbbogen in Ruhe sein können, so muss eine dem Ruhezustande entsprechende Drucklinie nachweisbar sein. Die Drucklinie ist ein zu den Gewichten der Gewölbtheile gezeichnetes Seileck. Die einzelnen Seiten desselben dürfen höchstens um den Reibungswinkel von der Normalen zu den Fugen abweichen und müssen die Fugen auch innerhalb des Bereiches der Berührung, d. h. innerhalb des Gewölbbogens schneiden.

Das Gewölbe möge symmetrisch zu einer lothrechten Mittelebene sein (auch bezüglich seiner Belastung). Betrachten wir diese Ebene als eine Schnittebene, so wird in ihr eine wagerechte Druckkraft, der Seitenschub $H$, wirken. Denn ein schräg gerichteter Scheiteldruck würde an der einen Hälfte nach oben, an der anderen aber zufolge des Gesetzes der Wechselwirkuug nach unten gerichtet sein, was jedoch der Symmetrie widerspricht. Theilt man nun den halben Bogen (Fig. 271) durch Fugen in eine beliebige Zahl von Theilen, deren Gewichte $Q_1$, $Q_2$, ... durch die Schwerpunkte der Theile hindurchgehen, so ist das Krafteck der Lasten $Q$ leicht gezeichnet, indem man sie nach irgend einem Kräftemafsstab an einander reiht. Wäre nun der Seitenschub $H$ bekannt, so würde man den Pol $O$ in dem Abstande $H$ dem oberen Endpunkte der Lasten gegenüber annehmen und hätte damit sämmtliche Polstrahlen. Wäre ausserdem noch der Angriffspunkt $C$ des Scheiteldruckes gegeben, so hätte man die Seilecksseiten nur den

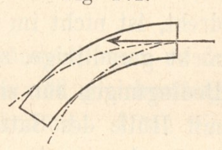
Polstrahlen der Reihe nach parallel zu ziehen und hätte damit das Seileck, d. h. die Drucklinie des Gewölbes. Den Punkt $C$ wollen wir in der Mitte der Scheitelfuge annehmen. Die letzte Seite des Seilecks könnte nun vielleicht aus der inneren Leibung des Gewölbes treten; dann erkennt man, dass dieses Seileck eine mögliche Drucklinie nicht ist. Um aber ein flacher verlaufendes Seileck zu erhalten, braucht man nur den Polabstand $H$ zu vergrössern, und zwar kann man leicht $H$ so bestimmen, dass die letzte Seite die Kämpferfuge an einer bestimmten Stelle $A$, etwa in ihrer Mitte, schneide. In Fig. 271 ist nach willkürlicher Annahme des Poles $O_1$ das Seileck $CA_1$ gezeichnet. Verlängert man nun die letzte Seite des ersten Seilecks bis zum Schnitte $P$ mit der Richtungslinie von $H$, so muss nach S. 119 das Gesammtgewicht $R$ der Gewölbhälfte durch $P$ gehen. Die Lage von $R$ ist nur von der Form des Gewölbes abhängig, nicht aber von der willkürlich angenommenen Lage des Poles $O$. Für ein grösseres $H$ und für ein wiederum durch $C$ gehendes Seileck muss daher die letzte Seite ebenfalls durch $P$ gehen. Zieht man also $PA$, so ist dies die Richtung der letzten Seite durch den gewünschten Punkt $A$. Eine Parallele zu $AP$ durch $D$ bestimmt den neuen Pol $O$, und $OB$ ist nun der Scheitelschub, welcher einem durch $C$ und $A$ gehenden Seileck entspricht. Dass die Seiten des Seilecks von den Normalen zu den Fugen nicht zu viel abweichen, lässt sich ja nöthigenfalls durch Änderung der Fugenrichtung leicht erreichen. Wichtiger ist, dass die Drucklinie überall im Gewölbbogen verbleiben muss. Findet man eine solche Drucklinie, so ist der Ruhezustand gesichert.

Fig. 271.



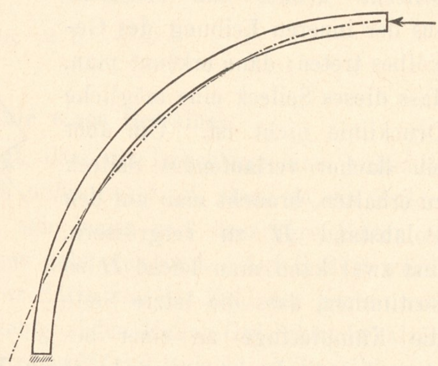

Wie schon gesagt, hat man, wenn das erste Seileck die innere Wölbfläche schneidet, $H$ zu vergrössern, oder $C$ nach oben zu verschieben, und umgekehrt. In Fig. 272 sind 2 vorläufige Seilecke

Fig. 272.



eingezeichnet, die den Bedingungen einer Drucklinie noch nicht entsprechen, aber durch Veränderung von $H$ zu möglichen Drucklinien umzuwandeln sind. Schneidet ein Seileck (Fig. 273) erst die innere Wölblinie, kehrt dann durch dieselbe in das Gewölbe zurück und geht bei weiterem Verlaufe noch einmal durch die äussere Wölblinie, so ist Gleichgewicht unmöglich. Denn jede Änderung von $H$ und $C$, die an der einen Stelle das Hinaustreten beseitigen könnte, müsste das Hinaustreten an der anderen Stelle noch verstärken; in solchem Falle kann nur eine Vergrösserung der Gewölbstärke oder eine Änderung der Gewölbform zum Ziele führen.

Fig. 273.



Auf diese Andeutungen über die Drucklinie in Gewölben müssen wir uns hier beschränken. Die wirkliche Lage des Scheitelschubes $H$ und des Widerlagerdrucks $W$ folgt aus dem elastischen Verhalten der Gewölbsteine und findet sich besprochen in Keck, Vorträge über Elasticitätslehre, S. 330 u. ff. Hat man aber die richtige Drucklinie gefunden, so geben die Polstrahlen des Kraftecks die Grösse der Druckkräfte in den einzelnen Fugen an.

## II. Wirkung der Reibung bei gleichmässig sich drehenden Körpern.

Ein starrer Körper, der sich gleichförmig um eine feste Achse dreht, ist nicht im Gleichgewichte, weil die einzelnen Massentheilchen nicht geradlinige, sondern kreisförmige Bewegungen ausführen. Die Bedingungen für eine gleichförmige Drehbewegung lassen sich aber mit Hülfe des Satzes auf S. 141 aufstellen, wonach die Ergänzungskräfte den an dem Körper wirkenden äusseren Kräften das Gleichgewicht halten müssen.