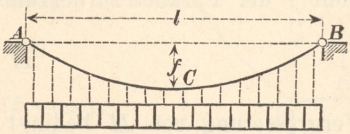
8. Kettenlinien.

Wird die Zahl der Gelenkstangen immer grösser, ihre Länge immer kleiner, so nähert sich die vieleckige Gleichgewichts-Figur immer mehr einer stetig gekrümmten Kurve. Immer aber bleiben dieselben Gesetze gültig: namentlich also fällt die Richtung der Spannkraft einer Stange mit der Richtung der Stange zusammen. Werden die einzelnen Stangen unendlich klein, so kommt man zu einer an jeder Stelle völlig biegsamen Kette oder einem biegsamen Faden mit stetiger Belastung. Die Spannkraft an irgend einer Stelle ist dann tangential gerichtet. Die Belastung der einzelnen Bogentheilchen der Kette kann überall gleich oder verschieden sein; danach wird die Gleichgewichtsform der Kette, die Kettenlinie, eine verschiedene.

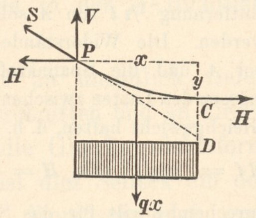
Wir betrachten zunächst den einfachen Fall, dass die Belastung sich gleichförmig über die wagerechte Projektion der Kette vertheile, dass also jede Längeneinheit (jedes Meter) dieser Projektion ein bestimmtes Gewicht q zu tragen habe. Dies können wir uns vorstellen durch einen prismatischen Belastungskörper mit dem Gewichte q für die Längeneinheit, der durch lothrechte Schnitte in unendlich viele Scheiben geschnitten ist, welche mittels gewichtloser Fäden oder Hängestangen an der selbst gewichtlosen Kette aufgehängt sind (Fig. 221).

Fig. 221.



Im tiefsten Punkte C ist die Kette und daher auch die Spannkraft H an dieser Stelle wagerecht gerichtet. Schneiden wir die Kette nochmals in einem wagerechten Abstande x von C, so ist hier, bei P (Fig 222) eine Spannkraft S anzubringen. Die Kräfte S und H müssen nun den zwischenliegenden Lasten das Gleichgewicht halten. Die Mittelkraft dieser Lasten ist qx mit dem Abstande $\frac{1}{2}x$ von P. Die Momentengleichung in Bezug auf P liefert dann: $0 = -Hy + \frac{1}{2}qx^2$, also:

Fig. 222.



1) $$y = \frac{qx^2}{2H} \quad \text{oder} \quad x^2 = 2\left(\frac{H}{q}\right)y.$$

Die Gleichgewichtsform der Kette ist also eine Parabel mit lothrechter Achse vom Parameter $H:q$.

Für $x = \frac{1}{2}\,l$ wird $y = f$, daher nach Gl. 1:

2) $$f = \frac{q\,l^2}{8\,H};$$

durch Division beider Gleichungen entsteht dann:

3) $$\frac{y}{f} = \frac{4\,x^2}{l^2}.$$

Bemerkenswerth ist auch, dass der Schnitt der 3 Kräfte S, H und qx in der Mitte der Strecke x liegt, so dass wenn man die Richtung der Tangente S bis zur Lothrechten durch C verlängert, der hier entstehende Schnittpunkt D in der Tiefe y unter C, d. h. in der Tiefe $2\,y$ unter P liegt. Dies ist eine kennzeichnende Eigenschaft der Parabel.

Die wagerechte Seitenkraft oder Projektion von S ist $= H$, die lothrechte $V = qx$.

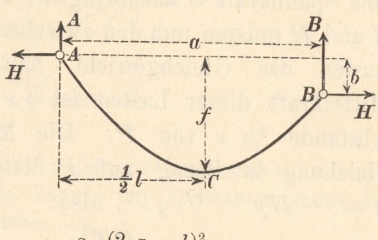
Zu einer gegebenen Last q sind unendlich viele parabolische Kettenlinien möglich, je nachdem H grösser oder kleiner gewählt wird. Es lässt sich diese bestimmende Grösse aber auf die Pfeilhöhe f der Parabel zurückführen; denn aus Gl. 2 folgt:

4) $$H = \frac{q\,l^2}{8\,f}.$$

Vergrösserung von H bedingt also Verkleinerung der Pfeilhöhe f, und umgekehrt. Der Parameter $\frac{H}{q}$ kann also auch $\frac{l^2}{8\,f}$ geschrieben werden.

Liegen die Befestigungspunkte A und B in einem wagerechten Abstande a, liegt aber B um b tiefer als A, so liegt der tiefste Punkt C nicht in der Mitte (Fig. 223). Seine wagerechte Entfernung $\frac{1}{2}\,l$ von A soll berechnet werden. Die Widerstände A und H bei A und die Spannkraft H bei C müssen den Lasten zwischen A und C das Gleichgewicht halten, d. h. $A = \frac{1}{2}\,q\,l$; $Hf = \frac{1}{8}\,q\,l^2$ also $H = \frac{q\,l^2}{8\,f}$. Entsprechendes gilt für das Stück rechts von C, wo statt $\frac{1}{2}\,l$ zu setzen ist $a - \frac{1}{2}\,l$, statt f aber $f - b$. Mithin $H = \frac{q}{8}\,\frac{(2\,a - l)^2}{f - b}$.

Fig. 223.



Die beiden Werthe H sind aber, wie bei jeder lothrecht belasteten Stangenverbindung, dieselben, mithin

$$\frac{(2a-l)^2}{l^2} = \frac{f-b}{f} = 1 - \frac{b}{f}$$

$$\text{oder} \quad \frac{b}{f} = 1 - \frac{(2a-l)^2}{l^2} = \frac{-4a^2+4al}{l^2}.$$

$$\text{Weil aber} \quad f = \frac{ql^2}{8H}, \text{ so wird } \frac{b}{f} = \frac{8bH}{ql^2} = \frac{4al-4a^2}{l^2}$$

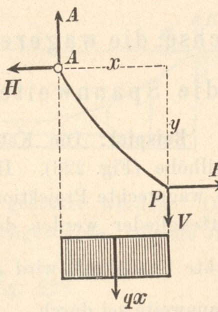
$$\text{oder} \quad a(l-a) = \frac{2bH}{q}$$

$$\text{und} \quad l = a + \frac{2b}{a}\frac{H}{q} \quad \text{oder} \quad \frac{l}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{a}\frac{H}{q}.$$

Wichtig ist auch die Gleichung der parabolischen Kettenlinie, bezogen auf den Anfangspunkt A. Man kann dieselbe entwickeln, indem man von der Gl. 1 (S. 181) ausgeht, kann sie aber ebenso leicht unmittelbar ableiten: Im Punkte A (Fig. 221 und 224) wirken die Widerstände $A = {}^1\!/_2\, ql$ und $H = \frac{ql^2}{8f}$, und in Bezug auf den Punkt P gilt die Momentengleichung:

$$0 = {}^1\!/_2\, qlx - Hy - {}^1\!/_2\, qx^2, \text{ oder}$$

Fig. 224.



$$5) \quad \boldsymbol{y = \frac{q}{2H}x(l-x) = \frac{4f}{l^2}x(l-x).}$$

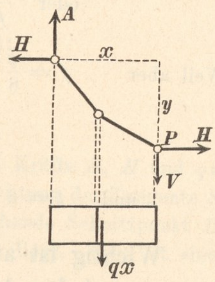
Dies ist also eine andere Form der Gleichung einer Parabel vom Parameter $\frac{H}{q} = \frac{l^2}{8f}$.

Auch künftig werden wir öfter auf eine Gleichung der Form $y = Cx(l-x)$ kommen; diese bedeutet stets eine Parabel, deren Achse parallel der y-Achse und welche die in der x-Richtung liegende Sehne l symmetrisch überspannt.

Ist der prismatische Lastkörper nicht an unendlich vielen Stellen, sondern nur an einzelnen Stellen zerschnitten und an diesen Stellen mit der Kette verbunden, so wird die Gleichgewichtsform wieder ein Vieleck, ein Seileck, und zwar ist dies Seileck ein der Parabel (Gl. 5) eingeschriebenes Vieleck. Durchschneidet man (Fig. 225) die Stangenverbindung im Gelenkpunkte P (der Koordinaten x und y), so müssen die hier auftretenden Spannkräfte H

und V nebst den in A auftretenden Widerständen $A = {}^1\!/_2\, q\, l$ und H wieder den zwischenliegenden Lasten $q\,x$ das Gleichgewicht halten. Es entsteht dann ganz dieselbe Momentengleichung wie auf S. 183, und für irgend einen Knotenpunkt P gilt die Gl. 5. Liegen nämlich die Befestigungspunkte A und B in gleicher Höhe und in dem Abstande l, so ergiebt sich leicht, dass $A = B = {}^1\!/_2\, q\, l$ sein muss, wie auch die Schnittstellen liegen mögen. Also:

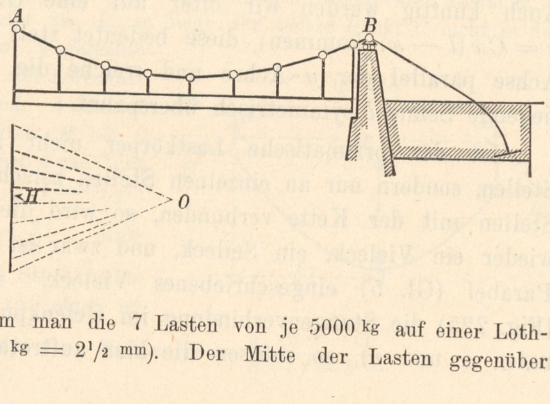
Fig. 225.



Ist eine Stangenverbindung derartig belastet, dass die Last sich gleichförmig über die wagerechte Projektion vertheilt, aber nur in einzelnen, den Theillinien der Last entsprechenden Gelenkpunkten auf die Stangenverbindung übertragen wird, so ist die Gleichgewichtsform ein Sehnenvieleck einer Parabel mit lothrechter Achse; die wagerechte Spannkraft beträgt $H = \frac{q\,l^2}{8\,f}$, wenn l die Spannweite, f die Pfeilhöhe der Parabel.

Beispiel: Die Kette einer Hängebrücke habe 40 m Spannweite und 5 m Pfeilhöhe (Fig. 226). Ihre Belastung vertheile sich nahezu gleichmässig über die wagerechte Projektion und betrage $q = 1000$ kg für das Meter Länge. Die Kettenglieder werden demnach einer Parabel eingeschrieben sein. Die wagerechte Spannkraft wird $H = \frac{q\,l^2}{8\,f} = \frac{1000 \cdot 40 \cdot 40}{8 \cdot 5} = 40\,000$ kg. Die ganze Spannweite sei durch Hängestangen in 8 gleiche Fache von je 5 m Länge getheilt. Dann hat jede Stange das Gewicht zweier halben Fache $= 5000$ kg auf die Kette zu übertragen. Da 7 mittlere Knotenpunkte vorhanden sind, so kann man das entsprechende

Fig. 226.



Krafteck zeichnen, indem man die 7 Lasten von je 5000 kg auf einer Lothrechten aufträgt (5000 kg $= 2^1\!/_2$ mm). Der Mitte der Lasten gegenüber wählt man in einem Abstande $H = 40\,000^{\text{kg}} = 20^{\text{mm}}$ den Pol O. Die Polstrahlen nach den Theilpunkten der Lastlinie geben dann Richtung und Grösse der Spannkräfte der einzelnen Stäbe. Ein Punkt P der Kette in einem Abstande $x = {}^1\!/\!_4\, l$ von der Mitte hat eine Höhe y über dem Scheitel C (nach Gl. 3): $y = f \cdot 4x^2 : l^2 = f \cdot {}^1\!/\!_4 = {}^5\!/\!_4{}^{\text{m}}$. Würde man die Aufhängepunkte A und B an den Pfeilern befestigen, so würden diese einen Druck $A = B = {}^1\!/\!_2\, q l$ nach unten, zugleich aber eine nach innen gerichtete wagerechte Kraft $H = 40\,000^{\text{kg}}$ erfahren. Letzterer würde ein hoher Pfeiler nicht leicht widerstehen können, daher führt man die Kette jenseits des Pfeilers fort und verankert sie in tiefer liegendem Mauerwerke, so dass der Pfeiler im Wesentlichen nur lothrechten Druck erfährt. Die Breite der Pfeiler macht es unmöglich, die Endpunkte A und B als Aufhängepunkte der Last zu benutzen. Die hierdurch veranlasste Abweichung ist auf der rechten Seite, bei B, berücksichtigt (auch im Krafteck), während auf der linken, bei A, der ideelle Zustand beibehalten wurde.

Die nach aussen gerichtete Kraft H kann auf die beiden Punkte A und B auch durch eine steife gerade Verbindungsstange ausgeübt werden, welche diese Kraft H als Druckkraft auszuhalten hat (Fig. 227). Alsdann brauchen die Stützen nur noch lothrecht aufwärts gerichtete Widerstände A und B zu leisten. Die Fahrbahn, welche bei Hängebrücken unter der Kette sich befindet, kann nun auch in Höhe der Stange AB gelegt und durch Druckstangen auf die Gelenke der Kette gestützt werden. Das Sehnen-Vieleck der Parabel bleibt aber nur im Gleichgewichte, solange die Last gleichförmig vertheilt ist. Kommt eine fremde Last hinzu, so wird die Stangenverbindung eine Verrückung erfahren; es treten Schwankungen ein, die bei Kettenbrücken bekannt sind, und erst nach längerer Zeit kann sich ein neuer Gleichgewichtszustand bilden, wenn keine fernere Änderung der Last erfolgt. Diese Bewegungen kann man mehr oder weniger verhindern, indem man die einzelnen, in Fig. 228 befindlichen Trapeze durch Einfügung je einer Diagonale oder Strebe zu geometrisch bestimmten Figuren umwandelt. Auf diese Weise entsteht ein parabolischer Fachwerkträger. Dreht man die Figur um eine wagerechte Achse, bis das parabolische Vieleck oberhalb der Sehne AB liegt, so hat man einen entsprechenden Träger. Die Stäbe des Vielecks erfahren dann Druck, die Sehne AB aber Zug. (S. A. Ritter, Techn. Mechanik, 2. Aufl., S. 244.) — Theilung und Aufhängung der Last nach Fig. 221 bedingt (nach Fig. 222) ein der Parabel umschriebenes Seileck.

Fig. 227.

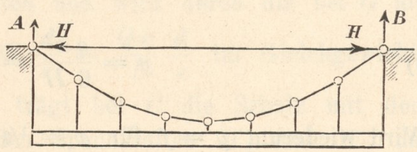
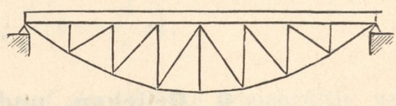


Fig. 228.

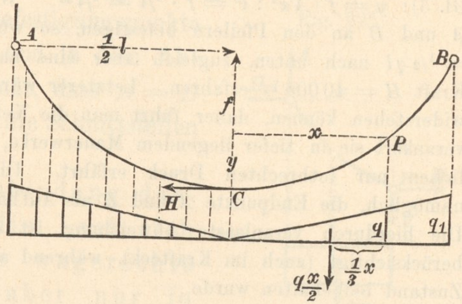


Kettenlinie für gleichförmig veränderte Belastung. Besteht der Belastungskörper aus zwei symmetrischen Keilen (Fig. 229), so ist die Belastung q der Längeneinheit veränderlich, nämlich

$$q = q_1 \frac{x}{{}^1\!/_2\, l},$$

wenn q_1 die Einheitsbelastung an den äusseren Enden ist. Zwischen C und P befindet sich dann eine Gesammtlast ${}^1\!/_2\, q\, x$ mit dem Hebelarm ${}^1\!/_3\, x$ in Bezug auf P. Daraus folgt die Momentengleichung

Fig. 229.



$$0 = Hy - \frac{q\,x}{2} \cdot \frac{x}{3}$$

6) $$y = \frac{q\,x^2}{6\,H} = \frac{q_1\,x^3}{3\,Hl}.$$

Wird wiederum $y = f$ für $x = {}^1\!/_2\, l$, so ergiebt sich auch leicht

7) $$y : f = 8\,x^3 : l^3.$$

Die Kettenlinie bildet also von C bis B einen Zweig einer kubischen Parabel; CA ist dazu symmetrisch.

9. Brücken- und Tafelwaagen.

Bei den auf S. 152 behandelten Hebelwaagen wurde die Belastung einer Waagschale mittels Hängeketten auf einen bestimmten Punkt des Waagebalkens übertragen. Die dem Aufbringen der Last unter Umständen hinderlichen Ketten lassen sich entbehren, man kann für die Last eine freie Brücke oder Tafel schaffen und durch Anwendung geeigneter Stangenverbindungen erreichen, dass die Last an jede beliebige Stelle der Brücke oder Tafel gelegt werden darf, ohne das Ergebnis der Wägung zu beeinflussen.