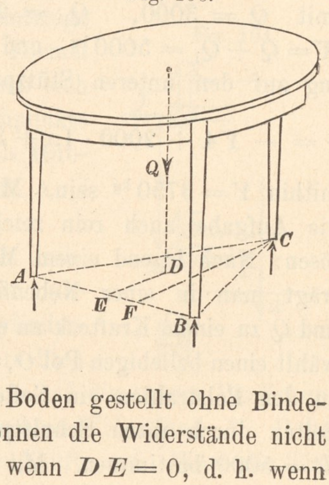
rechte Widerstand Y des oberen Lagers und der schräge Gesammtwiderstand W des unteren Lagers im Gleichgewichte sein, sich also auf ihr schneiden. Der Schnitt C von Y und R bestimmt sonach die Richtung BC von W. Zieht man im Krafteck EF wagerecht, $DF \parallel BC$, so ist $DF = W$ und $FE = Y$.

6. Dreifach und mehrfach befestigter bezw. unterstützter Körper.

Hat ein Körper drei feste Punkte, so lässt sich der Widerstand jedes der Punkte in je drei Seitenkräfte zerlegen; man hat also 9 Unbekannte. Die Zahl der Gleichgewichts-Bedingungen beträgt im Allgemeinen 6, mithin fehlen 3 Gleichungen zur völligen Bestimmung der Kräfte, oder die Aufgabe ist dreifach statisch unbestimmt.

Ist aber der Körper ein nur lothrecht belasteter dreibeiniger Tisch oder Schemel, der sich an drei Stellen auf eine wagerechte Ebene stützt, so sind von den drei Widerständen die Richtungen bekannt und die Grössen gesucht. Benutzt man die Lothrechte als z-Richtung, so sind von den 6 Gleichgewichts-Bedingungen (S. 146) benutzbar: Gl. 3, 4 und 5, und diese genügen zur Bestimmung der 3 Unbekannten; doch wendet man zur Bestimmung der Unbekannten vortheilhaft nur Momenten-Gleichungen an in Bezug auf Drehachsen durch je 2 Stützpunkte. Die lothrechten Widerstände A, B und C sind zu berechnen. Die Richtungslinie des Gewichtes Q des belasteten Tisches schneide die Unterstützungsebene in D (Fig. 196). Für die Achse AB gilt:

Fig. 196.



$$0 = - C \cdot CF + Q \cdot DE, \text{ also}$$

1) $$C = Q \cdot \overline{DE} : \overline{CF}.$$

In entsprechender Weise findet man A und B.

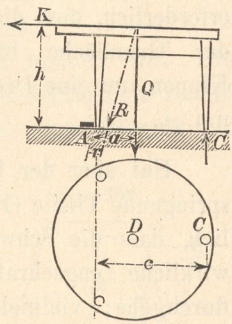
Ist der Tisch nur einfach auf den Boden gestellt ohne Bindemittel und ohne Verklammerung, so können die Widerstände nicht negativ werden. Es wird aber $C = 0$, wenn $DE = 0$, d. h. wenn

Q durch die Seite AB des Unterstützungsdreiecks geht. Liegt D ausserhalb dieses Dreiecks, so ist Gleichgewicht nicht möglich, vielmehr kippt der Tisch dann um eine der Seiten des Dreiecks ABC.

Fällt D in den Schwerpunkt des Dreiecks ABC, so wird $C = {}^1/_3 Q$, und ebenso gross werden A und B, so dass in diesem Falle das Gewicht sich gleichmässig auf die 3 Stützpunkte vertheilt.

Tritt zu dem Gewicht Q noch eine wagerechte Kraft K, so können die lothrechten Widerstände nicht mehr Gleichgewicht herbeiführen, sondern es müssen an den Auflagerstellen noch wagerechte Widerstände hinzutreten. Diese werden in Wirklichkeit bis zu einem gewissen Grade durch die Reibung geliefert; wir wollen statt dessen hier annehmen, dass eine vorgelegte Leiste die Verschiebung hindere. Es ist dann ausser dem Ruhezustande nur ein Kippen um die Leistenkante möglich.

Fig. 197.



Ersetzt man Q und K durch ihre Mittelkraft R, welche rechts von A im Abstande r vorbeigeht, so wird

$$Cc = Rr \quad \text{oder} \quad C = Rr : c.$$

Gleichgewicht ist nur möglich, solange r positiv ist, d h. innerhalb des Unterstützungsdreiecks durch die Grundebene hindurchgeht Zugleich ist aber auch $Rr = Qa - Kh$. Es ist also Gleichgewicht nur möglich, solange $Qa \geqq Kh$. Qa heisst das Standsicherheitsmoment (Stabilitätsmoment) in Bezug auf die Kante A, Kh das Umsturzmoment. Der Körper ist nur im gesicherten Gleichgewichte, solange das Standsicherheitsmoment grösser als das Umsturzmoment.

Stützt sich ein Körper an mehr als drei Stellen auf eine wagerechte Ebene, so sind die Widerstände der Stützpunkte nicht mehr zu ermitteln. In geometrischer Beziehung ist die Ebene, in welcher der Körper die Unterstützungsfläche berührt, durch mehr als drei Punkte bestimmt, also überbestimmt, während, wenn die Unterstützungsstellen nicht genau eine Ebene bilden, ein Wackeln des Körpers bei Verschiebung der Last eintreten kann. Ein dreibeiniger Tisch kann nicht wackeln, ein mehrbeiniger aber bekanntlich sehr leicht; es hängt damit die Unbestimmtheit der Druckvertheilung zusammen.

Bezüglich der Sicherheit gegen ein Umsturzmoment gilt für einen vierbeinigen Tisch das Gleiche wie für einen dreibeinigen.

Ruht ein Körper unter Einwirkung seines Gewichtes Q mittels ebener Fläche auf wagerechter Ebene (Fig. 198), so müssen die lothrecht aufwärts gerichteten Widerstände der Flächentheilchen eine Mittelkraft N liefern, die durch den Schwerpunkt S des Körpers geht. Nach welchem Gesetze sich aber N auf die Berührungsfläche vertheilt, ist statisch unbestimmt. Da nun die Mittelkraft zweier Parallelkräfte gleichen Sinnes nach S. 102 zwischen den Parallelkräften liegt, so kann auch die Mittelkraft N nur innerhalb des Bereiches der Grundfläche liegen, oder es ist für Gleichgewicht erforderlich, dass die Schwerpunktslothrechte innerhalb des Bereiches der Grunfläche bleibe; andernfalls tritt ein Kippen um eine Drehkante ein, z. B. in Fig. 199 um A.

Fig. 198.

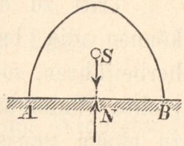
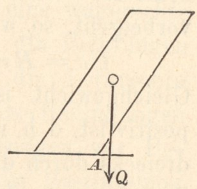
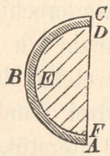


Fig. 199.



Hat aber der Umfang der Grundfläche einspringende Theile (Fig. 200), so ist nicht erforderlich, dass die Schwerpunktslothrechte durch die wirkliche engschraffirte Berührungsfläche hindurchgehe; vielmehr erhält man den für die Standsicherheit massgebenden Bereich der Grundfläche, indem man die wirkliche Berührungsfläche so weit ergänzt, dass einspringende Winkel fortfallen. Denn eine Seite oder Tangente der Grundfläche kann nur dann zu einer Drehkante werden, wenn ihre Verlängerung die Berührungsfläche nicht mehr durchschneidet. Sämmtliche Tangenten, die man an den einspringenden Bogen FED der Figur legt, sind keine möglichen Drehkanten. Es muss daher die leichte schraffirte Halbkreisfläche FED mit zu dem Bereiche der Grundfläche gerechnet werden, aus dem die Schwerpunktslothrechte nicht hinaustreten darf. Der Bereich der Grundfläche ist diejenige ebene Fläche, welche umschlossen wird von einer beweglichen Geraden, die die Unterstützungsfläche umhüllt, d. h. sich so um dieselbe bewegt, dass sie sie stets berührt, ohne sie aber zu schneiden.

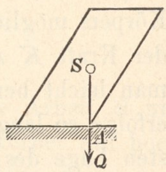
Fig. 200.



Bekanntlich kann ein zusammengebogenes Papier- oder Kartenblatt auf einem Tische sicher stehen, wiewohl die Schwerlinie nicht durch die schmale Auflagerfläche hindurch geht. Ebenso bildet bei dem Tische (Fig. 196, S. 164) die gesammte Dreieckfläche ABC den Bereich der Grundfläche.

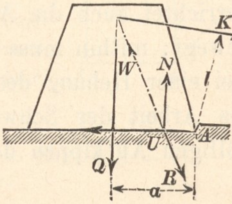
Geht die Schwerpunkts-Lothrechte gerade durch eine mögliche Drehkante (Fig. 201), so ist der Ruhezustand unsicher. Der Widerstand des Bodens vertheilt sich nicht mehr über die Berührungsfläche, sondern wird nur noch von der Drehkante geleistet.

Fig. 201.



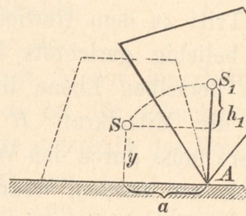
Tritt zu dem Gewichte Q des Körpers noch eine beliebig gerichtete Kraft K hinzu, die mit Q in derselben Ebene liegt (Fig. 202), so kann man die Mittelkraft R beider bestimmen, und letztere muss durch den Widerstand W des Bodens aufgehoben werden, wenn der Körper in Ruhe bleiben soll. Die seitliche Verschiebung im Sinne der wagerechten Seitenkraft von K sei durch einen Vorsprung am Boden verhindert; dann kommt nur noch die Möglichkeit der Drehung um die Kante in Frage, deren Verschiebung durch den Vorsprung gehindert ist. Der Boden kann innerhalb des Bereiches der Grundfläche jeden beliebigen Normalwiderstand N leisten, der Vorsprung einen seitlichen Widerstand von beliebiger Grösse; der aus beiden sich zusammensetzende Gesammtwiderstand W kann daher innerhalb des Bereiches der Grundfläche jede beliebige Grösse und Richtung haben, kann aber nicht aus diesem Bereiche heraustreten. Es muss daher die Lage von R die Unterstützungsebene ebenfalls im Bereiche der Grundfläche schneiden, wenn der Körper soll in Ruhe bleiben können. Ist der Hebelarm von Q in Bezug auf die Drehkante A wieder a, der der Kraft K aber l, so ist wieder Standsicherheit vorhanden, wenn $Q a > K l$, d. h. wenn das Sicherheitsmoment grösser als das Umsturzmoment. Für $K l = Q a$ geht die Mittelkraft R aus K und Q durch die Drehkante, und der Körper ist im unsicheren Gleichgewichte. Wird $K l$ im geringsten grösser als $Q a$, so wird der Körper sich um die Kante A drehen.

Fig. 202.



Erfolgt diese Drehung, so beschreibt der Schwerpunkt S (Fig 203) einen Kreisbogen um A, die Richtungslinie des Gewichtes Q rückt der Kante immer näher, das Moment von Q wird immer kleiner und endlich zu Null, sobald der Schwerpunkt in S_1 lothrecht über A liegt. Setzen wir voraus, dass die umstürzende Kraft K in der Weise abnehme, dass ihr Moment stets gleich dem Momente von Q in Bezug auf A sei, so wird das Moment ihrer Mittelkraft R stets Null sein, R also stets durch A gehen. Es wird dann ein langsames, allmähliches Aufkippen des Körpers möglich sein. Die hierzu von der Kraft K zu leistende Arbeit kann man leicht berechnen. Die Bewegung erfolge so langsam, dass bei der höchsten Lage des Schwerpunktes die Geschwindigkeit aller Punkte des Körpers Null sei. Dann ist, von der sicheren Ruhelage aus gerechnet, die Zunahme am Arbeitsvermögen Null. Mithin muss auch die Arbeitssumme Null sein. Nach S. 144 verrichten aber die inneren Kräfte die Arbeit Null, der in der Drehkante A auftretende Widerstand W verrichtet auch die Arbeit Null, weil sein Angriffspunkt sich nicht bewegt; mithin muss die Arbeit von Q und K zusammen Null sein. Bei einer Hebung des Schwerpunktes um h_1 ist aber (nach S. 139) die Arbeit der Schwerkraft $-Qh_1$, folglich ist die Arbeit zum völligen Aufkippen des Körpers

Fig. 203.



$$1)\qquad \mathfrak{A} = Qh_1 .$$

Diese Arbeit heisst die dynamische Standsicherheit, sie kommt in Frage, wenn es sich darum handelt, ob ein Körper durch einen Stoss oder Wurf umzustürzen ist. In einem geworfenen Körper steckt ein bestimmtes Arbeitsvermögen; trifft er einen aufgestellten Körper, so kann ein gewisser Theil des Arbeitsvermögens zum Umstürzen wirksam werden.

Das Standsicherheitsmoment war das zum ersten Anheben erforderliche Moment und unabhängig von der Höhenlage des Schwerpunktes. Die zum völligen Aufkippen erforderliche Arbeit $\mathfrak{A}$

aber ist auch von der Höhe y des Schwerpunktes abhängig. Es ist nämlich (Fig. 203)

$$AS = AS_1 = \sqrt{a^2 + y^2};\; h_1 = AS_1 - y = \sqrt{a^2 + y^2} - y,$$

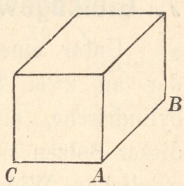
was man aber, wenn man mit $\sqrt{a^2 + y^2} + y$ multiplizirt und dividirt, auch schreiben kann

$$h_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + y^2} + y}, \text{ oder}$$

2) $$\mathfrak{A} = Q\,a\,\frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2} + y}.$$

Man erkennt, dass bei gleich bleibendem a die Arbeit $\mathfrak{A}$ um so kleiner wird, je höher der Schwerpunkt liegt. Körper mit hoch liegendem Schwerpunkte lassen sich also durch einen Stoss verhältnismässig leicht umstürzen.

Fig. 204.



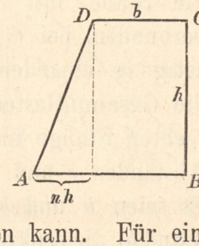
Beispiel: Ein parallelepipedischer Steinkörper (Fig. 204) von $1 \times 1 \times 2$ m wiegt, wenn $\gamma = 2000$ kg, $Q = 4000$ kg. Liegt er mit einer Langseite auf dem Boden, so ist $a = 0{,}5$ m, $y = 0{,}5$ m, daher das Moment zum ersten Aufkippen $\mathfrak{M} = Q\,a = 4000 \cdot 0{,}5 = 2000$ mkg. Oder es muss unter der linksseitigen Steinkante eine Hubkraft $K = 2000$ kg wirksam sein. Die Arbeit zum völligen Aufkippen, so dass er dann von selbst weiter umkippt, ist

$$\mathfrak{A} = Q\,a\,\frac{0{,}5}{\sqrt{0{,}5^2 + 0{,}5^2} + 0{,}5} = \frac{2000}{\sqrt{2} + 1} = 2000\,(\sqrt{2} - 1)$$

$$= 2000 \cdot 0{,}414 = 828 \text{ mkg}.$$

Steht aber der Körper hochkantig, so ist $a = 0{,}5$ m, $y = 1$ m, mithin ist $\mathfrak{M}$ ebenso gross wie vorher, dagegen $\mathfrak{A} = Q\,a\,(\sqrt{1 + 4} - 2) = 2000 \cdot 0{,}236 = 472$ mkg, also erheblich kleiner.

Fig. 205.



Eine Mauer von trapezförmigem Querschnitte (Fig. 205) habe eine Höhe h, eine obere Breite b; der Grundriss der geneigten Seite AD betrage nh; dann setzt sich das Standsicherheitsmoment aus den Beiträgen des rechteckigen und des dreieckigen Theiles zusammen, in welche man den Querschnitt zerlegen kann. Für eine

Länge = 1 rechtwinklig zur Zeichenebene ist dann in Bezug auf die Kante A das Standsicherheitsmoment $\mathfrak{M}_a$:

$$\mathfrak{M}_a = \gamma h \left\{ b\left(\tfrac{1}{2} b + nh\right) + \tfrac{1}{2} nh \cdot \tfrac{2}{3} nh \right\}$$
$$= \gamma h \left\{ \tfrac{1}{2} b^2 + b\, nh + \tfrac{1}{3} n^2 h^2 \right\}.$$

In Bezug auf die Kante B:

$$\mathfrak{M}_b = \gamma h \left\{ \tfrac{1}{2} b^2 + \tfrac{1}{2} nh \left(b + \tfrac{1}{3} nh\right) \right\}$$
$$= \gamma h \left\{ \tfrac{1}{2} b^2 + \tfrac{1}{2} b\, nh + \tfrac{1}{6} n^2 h^2 \right\},$$

mithin $\mathfrak{M}_a > \mathfrak{M}_b$, weil der Gesammtschwerpunkt näher an B als an A liegt. Würde man das Trapez mit einem flächengleichen Rechtecke von der Höhe h und der Breite $b + \tfrac{1}{2} nh$ vertauschen, so betrüge das Standsicherheitsmoment nur

$$\mathfrak{M} = \gamma h \, \tfrac{1}{2} \left(b + \tfrac{1}{2} nh\right)^2$$
$$= \gamma h \left\{ \tfrac{1}{2} b^2 + \tfrac{1}{2} b\, nh + \tfrac{1}{8} n^2 h^2 \right\},$$

also wiederum weniger als $\mathfrak{M}_b$.

7. Gleichgewicht einer Verbindung von Gelenkstangen.

Unter einer Gelenkstange verstehen wir einen starren Körper, der an zwei Stellen mit sog. Augen versehen ist, in welchen cylindrische, einander parallele Bolzen angebracht sind. Mittels dieser Bolzen sind die Körper mit einander bezw. mit festen, unbeweglichen Widerlagern derartig verbunden, dass in den Gelenken nur Kräfte auftreten können, welche durch die Achsen der Gelenkbolzen hindurch gehen und zu diesen rechtwinklig stehen. Die Form der Körper ist im Übrigen gleichgültig, dieselben können die Gestalt von geraden oder einfach gekrümmten Stäben haben; der Einfachheit wegen mögen sie geradlinig gezeichnet werden. Die Reibung an den Bolzen wird vernachlässigt.

Verbindung zweier Gelenkstäbe. In A und B (Fig. 206) seien die Stäbe mit Widerlagergelenken verbunden, bei C greifen sie gelenkartig in einander. G und G_1 seien die Gesammtlasten der linken bezw. rechten Stange mit den wagerechten Abständen c und c_1 von A bezw. B. Es seien b und b_1 die wagerechten, h und h_1 die senkrechten Projektionen der Stangen. Den Widerstand W

Fig. 206.