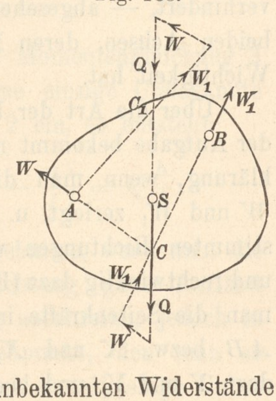
einheiten, u. zw. unveränderlich an jeder Stelle der Erde und des Weltenraumes.

Federwaagen dagegen, welche durch bestimmte Kräfte eine bestimmte, ablesbare Formänderung erleiden, zeigen die auf einen Körper ausgeübte Schwerkraft. Eine Federwaage, deren Theilung an einem Orte angefertigt war, wo die Fallbeschleunigung 9,806 beträgt, wird an diesem Orte unter einer Belastung mit einem Gewichtstück der Bezeichnung „1 Kilogramm" oder mit 1 ^{l} Wasser die Schwerkraft zu 1 ^{kg} angeben, wird aber am Äquator unter derselben Last nur 0,997 ^{kg} zeigen. Beim Kaufe und Verkaufe kommt es im Grunde genommen auf die Masse eines Körpers an. Für den Käufer sind daher solche Federwaagen nachtheilig, die an einem Orte getheilt wurden, wo die Fallbeschleunigung kleiner ist als an dem Gebrauchsorte. Eine Federwaage, deren Theilung am Äquator angefertigt wurde, die also dort unter Belastung mit 1 ^{l} Wasser von 4 ^{0} C. oder einem ebenso schweren Gewichtstücke der Bezeichnung „1 Kilogramm" die Schwerkraft mit 1 ^{kg} ablesen liess, wird unter Belastung mit dem gleichen Körper oder einem Körper gleicher Masse unter 45 ^{0} geogr. Breite die Schwerkraft zu 1,003 ^{kg} angeben, also schon durch eine Last von 0,997 ^{l} Wasser zu einer Gewichtsangabe von 1 ^{kg} gebracht werden.

5. Zweifach befestigter bezw. unterstützter Körper.

Ist ein unter Einwirkung seines Gewichtes Q stehender Körper an zwei Punkten A und B befestigt (Fig. 183), so wirken an diesen Widerstände W und W_1, welche mit Q im Gleichgewichte sein müssen. Die Mittelkraft von W und W_1 muss also das Entgegengesetzte von Q sein, oder es müssen W, W_1 und Q in einer Ebene liegen, und zwar in einer lothrechten Ebene, weil Q lothrecht ist. Da nun Q durch S geht, W und W_1 durch A bezw. B, so ist Ruhe des Körpers nur möglich, wenn der Schwerpunkt desselben in einer durch A und B gehenden lothrechten Ebene liegt. Nehmen wir an, diese Bedingung sei in Fig. 183 erfüllt, dann stehen für die Ermittelung der unbekannten Widerstände

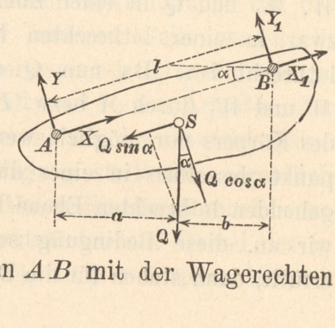
Fig. 183.



W und W_1 nur die drei Gleichgewichts-Bedingungen für Kräfte in einer Ebene (S. 147) zur Verfügung. Jeder Widerstand ist aber nach Grösse und Richtung unbekannt, oder hat, nach bestimmten Richtungen zerlegt, zwei unbekannte Seitenkräfte Sonach liegen für die Ermittelung der Widerstände der Befestigungspunkte vier Unbekannte und nur drei Gleichungen vor. Die Aufgabe ist also mittels der Gleichgewichtsbedingungen allein nicht zu lösen, man nennt sie daher „statisch unbestimmt“, und zwar im Besonderen „einfach statisch unbestimmt“, weil gerade eine Gleichung zu wenig vorhanden ist. Man kann diese Unbestimmtheit auch geometrisch erkennen. W, W_1 und Q müssen sich in einem Punkte schneiden, oder, da die Richtung von Q gegeben, W und W_1 müssen sich in einem Punkte der Geraden Q schneiden; in welcher Höhe dieser Punkt aber liegt, ist unbestimmt, richtet sich nach der besonderen Art, wie die Befestigung vorgenommen wurde, und ist im Allgemeinen nur schwierig, in vielen Fällen auch gar nicht festzustellen. Nimmt man einen Schnittpunkt C der Kräfte an, so sind die Richtungen von W und W_1 bestimmt, es ist dann leicht das Kräftedreieck der drei Kräfte für Gleichgewicht (S. 63) zu zeichnen, womit auch die Grössen von W und W_1 feststehen. Ein anderer Punkt C_1 aber liefert ein anderes Ergebnis für W und W_1.

Ähnlich sind die Verhältnisse, wenn die Befestigung nicht an zwei Punkten A und B, sondern an zwei zur Bildebene rechtwinkligen wagerechten Achsen A und B erfolgt. Dann fällt die erste Frage, ob und wann der Körper im Ruhezustande sein kann, fort. Der Körper ist unwandelbar befestigt, an jeder Bewegung verhindert, — abgesehen vielleicht von einer Verschiebung längs der beiden Achsen, deren Möglichkeit für diese Untersuchungen keine Wichtigkeit hat.

Fig. 184.



Über die Art der Unbestimmtheit der Aufgabe bekommt man einige Aufklärung, wenn man die Widerstände W und W_1 zerlegt, u. zw. in den bestimmten Richtungen von A nach B und rechtwinklig dazu (Fig. 184). Nennt man die Seitenkräfte in der Richtung AB bezw. X und X_1, rechtwinklig dazu Y und Y_1 und bedenkt, dass, wenn AB mit der Wagerechten den Winkel α bildet, Q in $Q \sin \alpha$ und $Q \cos \alpha$ zerlegt werden kann, so lauten die Gleichungen der Kräftesummen in den beiden Achsenrichtungen

1) $$X + X_1 - Q \sin \alpha = 0$$

2) $$Y + Y_1 - Q \cos \alpha = 0.$$

Die Momente beziehen wir zweckmässig auf eine der Befestigungsachsen z. B. A, weil dann die unbekannten Kräfte X, X_1 und Y aus der Momentengleichung fortbleiben; auch führen wir in diese Gleichung zweckmässig die ursprüngliche Kraft Q, nicht aber ihre Seitenkräfte ein. Dann ist nach den Bezeichnungen der Figur

3) $$0 = - Y_1 l + Q a \text{ oder } Y_1 = \frac{Q a}{l}.$$

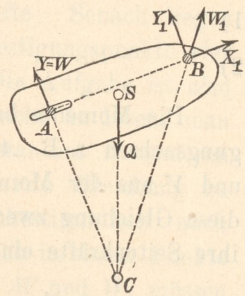
In den Gleichungen 2 und 3 kommen nur die Unbekannten Y und Y_1 vor, die daraus also zu bestimmen sind. Für X und X_1 steht aber nur die Gleichung 1 zur Verfügung. Von diesen Kräften ist also nur die Summe bestimmbar, nicht aber die einzelnen Antheile. In der Richtung AB kann der Körper bei der Befestigung jede beliebige Anspannung erfahren, die sich im Allgemeinen nicht erkennen lässt. Befestigt man z. B. ein hölzernes Brett mittels zweier Drahtstifte A und B an einer Holzwand, so kommt es bezüglich der Grösse von X und X_1 auf die Art der Eintreibung der Drahtstifte an; durch die letzten Schläge kann man erreichen, dass zwischen den Stellen A und B in dem Körper eine innere Zugkraft oder Druckkraft entsteht, deren Grösse die Widerstände X und X_1 beeinflusst, bei Annahme starrer Körper aber völlig unbestimmbar ist

Die in zweckmässiger Weise aufgestellte Momentengleichung 3 hat die gute Eigenschaft, dass darin nur eine einzige Unbekannte vorkommt. Setzt man Y_1 nach Gl. 3 in Gl. 2 ein, so entsteht

4) $$Y = Q \left(\cos \alpha - \frac{a}{l}\right) = Q \left(\frac{a + b}{l} - \frac{a}{l}\right) = Q \frac{b}{l}.$$

Unmittelbar aber kommt man zu diesem Ergebnisse, wenn man die Gleichung der Kräftesumme in der Y-Richtung ganz fortlässt und dafür nochmals eine Momentengleichung anschreibt, jedoch in Bezug auf einen von A abweichenden Drehpunkt, den man so wählen muss, dass in der Gleichung womöglich nur diejenige Unbekannte vorkommt, um deren Auffindung sich's gerade handelt, in diesem Falle also Y. Das wird erreicht durch die Wahl von B als Drehpunkt, nämlich

Fig. 185.

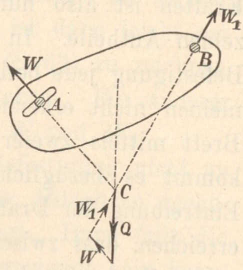


5) $\quad 0 = Yl - Qb \quad$ oder $\quad Y = Q\dfrac{b}{l},$

wie in Gl. 4.

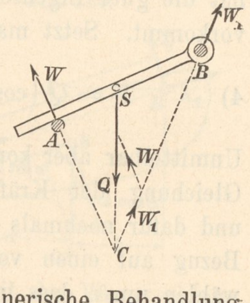
Von dieser Bevorzugung der Momentengleichungen in Bezug auf immer neue Drehpunkte wird in der Folge häufig Anwendung gemacht werden. Nur muss man nicht erwarten, dadurch die Zahl der überhaupt verfügbaren Gleichungen vergrössern zu können. Für das Gleichgewicht von Kräften in einer Ebene giebt es drei von einander unabhängige Gleichungen, mag man dieselben für Kräftesummen oder für Momente aufstellen. Vergrössert man die Zahl der Momentengleichungen durch Wahl immer neuer Drehpunkte, so bleiben die Gleichungen nicht mehr von einander unabhängig, so dass dadurch für eine unlösbare Aufgabe nichts gewonnen wird.

Fig. 186.



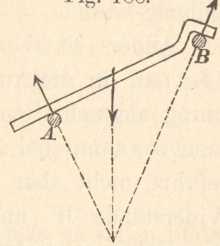
Die vorstehend behandelte Aufgabe verliert ihre Unbestimmtheit, wenn an einer der beiden Stellen, z. B. bei A, die Befestigung so geändert wird, dass über die Richtung des Widerstandes W keine Unbestimmtheit herrscht, indem man, statt den hindurchgesteckten Bolzen oder Drahtstift von dem Körper rings umschliessen zu lassen, etwa einen länglichen Schlitz anbringt. Hat der Schlitz wie in Fig. 185, die Richtung von A nach B, so kann bei A ein Widerstand X gar nicht geleistet werden; es wird $X = 0$ und $Y = W$; mithin $X_1 = Q \sin\alpha$, womit die Widerstände sämmtlich bestimmt sind. Auch die geometrische Lösung ist jetzt leicht möglich: Verlängert man die nun gegebene Richtung von W bis zum Schnitte C mit Q, so sind W und W_1 nach Fig. 183, S. 157, leicht bestimmt. Auch erkennt man, dass die zeichnerische Behandlung

Fig. 187.



von gleicher Einfachheit ist, welche Richtung auch der Schlitz haben mag, wenn man nur die Richtung eines der Widerstände W oder W_1 bestimmt zu erkennen vermag (Fig. 186).

Fig. 188.



In Fig 187 ist die Richtung von W durch den runden Auflagerungsbolzen A gegeben, dadurch der Punkt C und die Richtung von W_1 bestimmt, und man erkennt, dass nun auch eine völlige Umschliessung des Bolzens B nicht mehr nöthig wäre, sondern eine Stützung nach Fig. 188 für das Gleichgewicht hinreichen würde. Fig. 187 bietet nur eine grössere Sicherheit gegen Störungen des Gleichgewichts durch Erschütterungen, Stösse und das Hinzutreten neuer Kräfte. Scheinbar unwesentliche Änderungen der Form des Körpers in der Nähe der Unterstützungsstellen haben zuweilen sehr wichtige Folgen. Biegt man z. B. den Stab der Fig. 189 an seinem oberen Ende derartig um, dass er den Bolzen B mit einer wagerechten Ebene berührt (Fig. 190), so wird W_1 lothrecht, der Schnittpunkt von W und W_1 rückt in unendliche Ferne, und dadurch wird W ebenfalls lothrecht, so dass nun die bei Fig. 189 erforderlich gewesene seitliche Sicherung bei A entbehrlich wird. Die Grössen von W und W_1 ergeben sich mittels der Momentengleichungen zu $W = Q\,b : l$; $W_1 = Q \cdot a : l$.

Fig. 189.

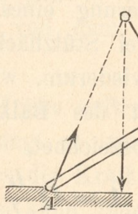
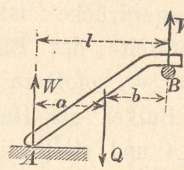
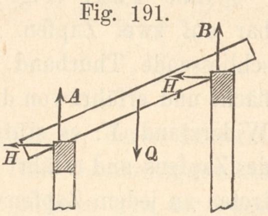


Fig. 190.



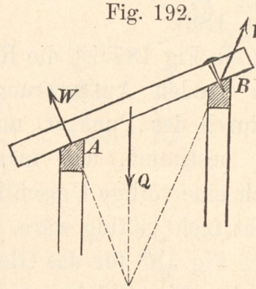
Auflagerung der Dachsparren auf Dachpfetten. Die Dachpfette möge die Form eines aufrecht stehenden Rechtecks haben (Fig. 191); der Sparren sei für die Auflagerung entsprechend ausgeschnitten. An den lothrechten Berührungsstellen kann keine Kraft auftreten, denn es müsste $H + H_1 = 0$ sein, und weil keine dieser Kräfte negativ werden kann, so müssen beide Null sein. An den wagerechten Berührungsstellen treten die lothrechten Widerstände A und B auf, die sich genau berechnen wie im vorhergehenden Falle.

Fig. 191.



Das Gewicht der Dachsparren übt daher auf die die Pfetten tragenden Wände nur lothrechte Drücke (das Entgegengesetzte von A und B) aus, wenn man von der Reibung absieht.

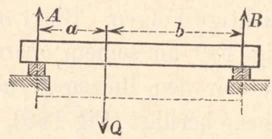
Fig. 192.



Anders ist aber die Sache, wenn die Pfetten für die Auflagerung der Sparren schräg abgeschnitten sind (Fig. 192). Ist dann etwa nur bei B eine Nagelung ausgeführt, nicht aber in A, so werden die Widerstände W und W_1 beide schräg. Die Entgegengesetzten derselben wirken auf die Tragwände der Pfetten.

Die Richtung der Widerstände wird durch die gegenseitige Höhenlage der Stützflächen nicht beeinflusst; besonders häufig ist die Auflagerung eines wagerechten Balkens auf zwei Stützflächen (Fig. 193). Dann wird wiederum, wenn Q das Gesammtgewicht des Balkens (einschl. etwaiger Last) bezeichnet,

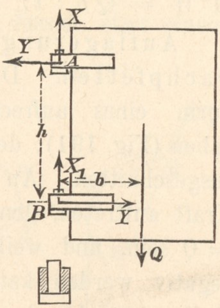
Fig. 193.



$$6)\qquad A = Q\,\frac{b}{l}\,;\quad B = Q\,\frac{a}{l}\,.$$

Liegt die Last Q in der Mitte, so wird natürlich $A = B = {}^1/_2\,Q$; rückt dann die Last näher an das linke Auflager, so wird dieses mehr belastet, das andere weniger. Der Abstand l der beiden Auflagerdrücke ist die rechnungsmässige Spannweite des Balkens. Um die Formel $B = Q\,{}^a/_l$ sofort zu erkennen, denkt man sich den Balken als Hebel mit dem Drehpunkte bei A und stellt sich die Kraft B als Hubkraft einer Hand vor, dann erscheint $a : l$ sofort als das Hebelverhältnis.

Fig. 194.



Eine Thür (Fig. 194) stützt sich drehbar auf zwei Zapfen. Das den Zapfen umschliessende Thürband berührt die Cylinderfläche und erfährt von dieser einen wagerechten Widerstand Y; es stützt sich aber auch auf die untere Verdickung des Zapfens und erfährt dort einen lothrechten Widerstand X. Daher treten an jedem Zapfen zwei unbekannte Kräfte auf. Wäre die Thür nur bei B gehalten, so würde sie durch Q rechtsherum gedreht werden; dem muss bei A ein nach links gerichteter Druck Y widerstehen. Nach der Gleichung der wagerechten Kräfte muss bei B der gleiche Druck Y nach rechts wirken. Die Gleichung der lothrechten Kräfte verlangt $X + X_1 = Q$; weiteres ist über X und X_1 nicht zu finden: wie sich das Gewicht Q auf beide Zapfen vertheilt, hängt von der Genauigkeit der Ausführung ab. Y ist aber durch die Momentengleichung, etwa um B, leicht zu berechnen: $0 = Qb - Yh$, oder $Y = Qb : h$.

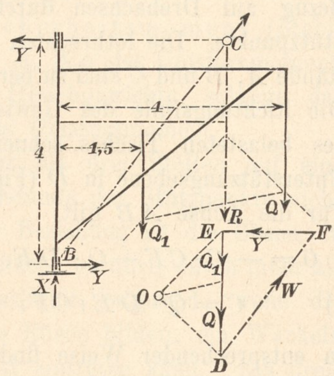
Bei näherer Besichtigung einer Thür wird man zuweilen finden, dass an einem der beiden Zapfen das Thürband mit der unteren Verdickung des Zapfens nicht in Berührung ist, dass daselbst ein Spielraum, eine offene Fuge sich zeigt. An einer solchen Stelle findet dann auch keine Druckübertragung statt, und es wird das Gewicht Q der Thür in solchem Fall allein von dem anderen Zapfen getragen.

Bei wichtigen Fällen, d. h. wenn grosse Kräfte auftreten, ist eine derartige Unbestimmtheit der Kraftwirkung zu vermeiden. Daher trifft man dann die Einrichtung so, dass die Kraft X nur an einer Unterstützungsstelle überhaupt auftreten kann, indem man an der anderen Stelle eine Berührung nur an der cylindrischen Fläche zulässt. Z. B. an dem Dreh-Krahne (Fig. 195). Hier muss (mit $Q = 3000$, $Q_1 = 2000$ kg) $X = Q + Q_1 = 5000$ kg, und in Bezug auf den unteren Stützpunkt B

$$0 = -Y4 + 2000 \cdot 1{,}5 + 3000 \cdot 4$$

mithin $Y = 3750$ kg sein. Man kann die Aufgabe auch rein zeichnerisch lösen: Nach irgend einem Mafsstabe trägt man in einer Nebenfigur Q_1 und Q zu einem Krafteck an einander, wählt einen beliebigen Pol O, zeichnet zu den Polstrahlen ein Seileck in der Hauptfigur, deren äusserste Seiten durch ihren Schnittpunkt die Lage des Gesammtgewichtes $R = 5000$ bestimmen. Mit dieser Kraft R müssen nun der wage-

Fig. 195.



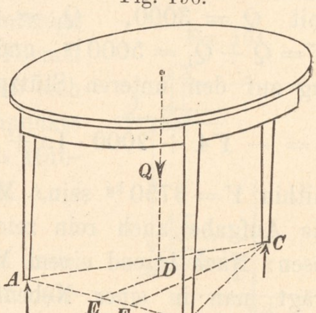
rechte Widerstand Y des oberen Lagers und der schräge Gesammtwiderstand W des unteren Lagers im Gleichgewichte sein, sich also auf ihr schneiden. Der Schnitt C von Y und R bestimmt sonach die Richtung BC von W. Zieht man im Krafteck EF wagerecht, $DF \parallel BC$, so ist $DF = W$ und $FE = Y$.

6. Dreifach und mehrfach befestigter bezw. unterstützter Körper.

Hat ein Körper drei feste Punkte, so lässt sich der Widerstand jedes der Punkte in je drei Seitenkräfte zerlegen; man hat also 9 Unbekannte. Die Zahl der Gleichgewichts-Bedingungen beträgt im Allgemeinen 6, mithin fehlen 3 Gleichungen zur völligen Bestimmung der Kräfte, oder die Aufgabe ist dreifach statisch unbestimmt.

Ist aber der Körper ein nur lothrecht belasteter dreibeiniger Tisch oder Schemel, der sich an drei Stellen auf eine wagerechte Ebene stützt, so sind von den drei Widerständen die Richtungen bekannt und die Grössen gesucht. Benutzt man die Lothrechte als z-Richtung, so sind von den 6 Gleichgewichts-Bedingungen (S. 146) benutzbar: Gl. 3, 4 und 5, und diese genügen zur Bestimmung der 3 Unbekannten; doch wendet man zur Bestimmung der Unbekannten vortheilhaft nur Momenten-Gleichungen an in Bezug auf Drehachsen durch je 2 Stützpunkte. Die lothrechten Widerstände A, B und C sind zu berechnen. Die Richtungslinie des Gewichtes Q des belasteten Tisches schneide die Unterstützungsebene in D (Fig. 196). Für die Achse AB gilt:

Fig. 196.



$$0 = -C \cdot CF + Q \cdot DE, \text{ also}$$

$$1) \qquad C = Q \cdot \overline{DE} : \overline{CF}.$$

In entsprechender Weise findet man A und B.

Ist der Tisch nur einfach auf den Boden gestellt ohne Bindemittel und ohne Verklammerung, so können die Widerstände nicht negativ werden. Es wird aber $C = 0$, wenn $DE = 0$, d. h. wenn