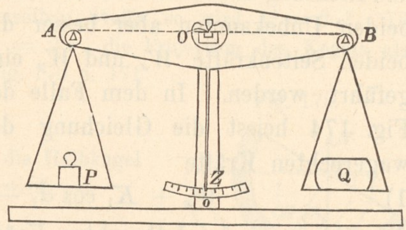
man dann aus den Gleichungen 1 u. 2 auch W_x und W_y berechnen. Die für die Momente in Frage kommenden Hebelarme sind im Allgemeinen nicht die Abstände der Angriffspunkte der Kräfte von der Drehachse, sondern die **rechtwinkligen** Abstände der Kraftrichtungen von der Drehachse.

Fig. 175 zeigt die Vereinigung zweier Hebel zu einem Nussknacker, Fig. 176 einen um O drehbaren Pumpenschwengel; K_1 ist die Triebkraft, K_2 der Widerstand der Pumpenstange.

4. Hebelwaagen.

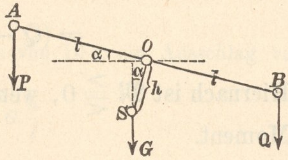
Gleicharmige Hebelwaage. Der Waagebalken ist mit einer wagerechten Drehachse O versehen (Fig. 177), welche zur Verminderung der Reibung durch eine auf eine sog. Pfanne sich stützende Stahlschneide gebildet wird. Bei A und B sind in gleichen Abständen l von O ebenfalls Schneiden angeordnet, an denen gleich schwere Waagschalen aufgehängt sind. Die geometrischen Drehachsen A, O und B mögen in einer Flucht liegen. Es ist zunächst erforderlich, dass der Waagebalken unter der Last der beiden gleich schweren Schalen sich wagerecht stelle und diese Stellung durch einen Zeiger Z markire. Diese Bedingung wird, wie sich aus dem Folgenden ergiebt, erfüllt, wenn der Waagebalken für sich allein, d. h. ohne die Waagschalen in sicherem Gleichgewicht ist, d. h. wenn sein Schwerpunkt S um eine Grösse h unterhalb der Drehachse O liegt. Im Ruhezustande üben die bei A und B angehängten Waagschalen auch gleiche Kräfte auf den Balken aus und halten ihn im Gleichgewichte. Dasselbe gilt, wenn die Waagschalen mit Körpern von gleichem Gewichte belastet werden. Ist aber der Körper vom Gewichte Q auf der rechten Seite schwerer als das Gewichtstück P auf der linken (Fig. 178), so entsteht eine Drehung des Balkens, bei der die rechtsseitige Schale sinkt; weil aber S unterhalb O liegt, so tritt nun das Gewicht G des Balkens auf die linke Seite und kommt mit seinem Momente dem der kleineren Belastung zu

Fig. 177.



Hülfe, so dass bei einem bestimmten Ausschlagwinkel α wieder sicheres Gleichgewicht eintritt. Die Beziehung zwischen dem Gewichtsunterschiede $Q - P$ und dem Winkel α ist sehr einfach, wenn A, O und B in einer Geraden liegen, ist aber auch nicht schwierig, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist. Hier soll nur der einfachste Fall betrachtet werden. Da es nur auf den Gewichtsunterschied ankommt, so mögen die Gewichte der Schalen und Ketten in P und Q mit enthalten sein. Dann entsteht die Momentengleichung $Ql \cos\alpha = Pl \cos\alpha + Gh \sin\alpha$, oder

Fig. 178.



$$1) \qquad Q - P = G\frac{h}{l}\operatorname{tg}\alpha.$$

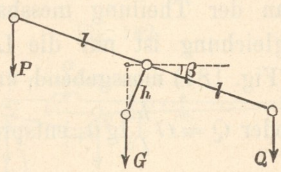
Bei der vorausgesetzten einfachen Anordnung ist der Gewichtsunterschied $Q - P$ mit der Tangente des Ausschlagwinkels verhältnisgleich, so dass aus der Beobachtung von α der Unterschied $Q - P$ ersehen werden kann.

Beispiel: Es sei G (Gewicht des Waagebalkens) 2^{kg}, $h = 1{,}5^{\text{cm}}$, $l = 30^{\text{cm}}$, $\alpha = 6^0$, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}1$, dann ist $Q - P = 2\frac{1{,}5}{30} \cdot 0{,}1 = \frac{1}{100}{}^{\text{kg}} = 10^{\text{g}}$. Einem Winkel von 6^0 muss also an der Zeigertheilung die Bezeichnung 10^{g} entsprechen.

Beim Gebrauche der Waage kann natürlich die Gleichgewichtsstellung nicht sofort eintreten; es muss aber dann ein Moment vorhanden sein, welches die Waage zum Einspielen bringt. Unter Einspielen versteht man das Schwingen um eine sichere Gleichgewichtslage, das Bestreben, dieselbe einzunehmen.

Einem Gewichtsunterschiede $Q - P$ möge ein Ausschlagwinkel α entsprechen, so dass $Gh = (Q - P)\,l : \operatorname{tg}\alpha$. Beträgt dann der augenblickliche Abweichungswinkel von der Wagerechten β und hält man die Waage für einen Augenblick fest, so entsteht, wenn $\beta > \alpha$ gedacht wird, ein links herum drehendes, nach der Gleichgewichtslage treibendes Moment

Fig. 179.



$$\mathfrak{M} = Gh \sin\beta - (Q - P)\,l \cos\beta.$$

Setzt man hierin den vorstehenden Werth für Gh ein, so wird

$$\mathfrak{M} = \frac{(Q-P)\,l}{\operatorname{tg}\alpha}\sin\beta - (Q-P)\,l\cos\beta$$

$$= (Q-P)\,l\cos\beta\left(\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} - 1\right).$$

Hiernach ist $\mathfrak{M} \gtreqless 0$, wenn $\beta \gtreqless \alpha$. $\mathfrak{M}$ nennen wir das Einspielungs-Moment.

Da $Q-P$ für Gleichgewicht verhältnisgleich mit $\operatorname{tg}\alpha$, wobei $\operatorname{tg}\alpha$ zwischen 0 und ∞ jeden Werth haben kann, so kann man theoretisch jeden beliebig grossen Gewichtsunterschied $Q-P$ mit Hülfe des Ausschlagwinkels α messen, kann also ein Gewichtstück P ganz entbehren, Q allein durch α ermitteln. Nach diesem Grundgedanken ist eingerichtet die

Zeigerwaage, welche zum Wägen von Briefen, Garnen, Papieren bestimmt ist. Fig. 180 entspricht einer Garnwaage, bei welcher keine Schale benutzt, sondern das Garn unmittelbar an dem rechtsseitigen Haken aufgehängt wird. Die Fig. 180 stellt den unbelasteten Zustand dar, wobei der Zeiger auf Null steht; der Schwerpunkt S des Waagebalkens muss entsprechend um h lothrecht unter der Drehachse O liegen. Wird bei A ein Gewicht Q eingehängt, so bildet sich eine neue Gleichgewichtslage mit einem Ausschlagwinkel α, um den sich der ganze Hebel AOB verdreht und der an der Theilung messbar wird. Für die Momentengleichung ist nur die Lage der Punkte A, O und S (Fig. 181) massgebend, und es wird $Ql\cos\alpha = Gh\sin\alpha$ oder $Q = G\frac{h}{l}\operatorname{tg}\alpha$, entsprechend Gl. 1, S. 153 für $P=0$.

Fig. 180.

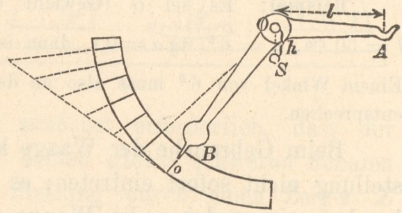
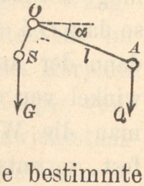


Fig. 181.



$Gh:l$ ist ein unveränderlicher Festwerth für eine bestimmte Waage. Auf dem Kreisbogen wird man bei den Theilstrichen nicht Zahlen für die Winkel α, sondern sogleich für die entsprechenden Gewichte Q einritzen. Die Theilung ist dann selbstverständlich nicht gleichmässig, da mit wachsendem Winkel die Tangente immer schneller wächst. Die Gewichtstheilung wird daher mit zunehmendem α enger und enger werden; darin findet aber die Anwendbarkeit der Waage ihre Grenze.

Beispiel: Entspricht z. B. einem Gewichte von 10 g ein Ausschlag von 10°, so ist

$$10 = G\frac{h}{l}\,\mathrm{tg}\,10 = 0{,}176\,G\frac{h}{l}.$$

Will man nun die Ausschlagwinkel für Vielfache von 10 g haben, so hat man zu bedenken, dass tg α mit Q verhältnisgleich wächst.

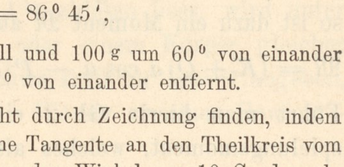
Für 20 g	ist $\mathrm{tg}\,\alpha = 2 \cdot 0{,}176 = 0{,}352$;	$\alpha = 19^0\ 24'$,
„ 100 g	„ $\mathrm{tg}\,\alpha = 1{,}76$;	$\alpha = 60^0\ 24'$,
„ 200 g	„ $\mathrm{tg}\,\alpha = 3{,}52$;	$\alpha = 74^0\ 9'$,
„ 300 g	„ $\mathrm{tg}\,\alpha = 5{,}28$;	$\alpha = 79^0\ 17'$,
„ 400 g	„ $\mathrm{tg}\,\alpha = 7{,}04$;	$\alpha = 81^0\ 55'$,
„ 500 g	„ $\mathrm{tg}\,\alpha = 8{,}80$;	$\alpha = 83^0\ 31'$,
„ 1000 g	„ $\mathrm{tg}\,\alpha = 17{,}60$;	$\alpha = 86^0\ 45'$,

Während also die Theilstriche für Null und 100 g um 60° von einander abstehen, sind die für 500 und 1000 g nur 3° von einander entfernt.

Die Theilung der Wage kann man leicht durch Zeichnung finden, indem man bei der Nullstellung des Zeigers OB eine Tangente an den Theilkreis vom Halbmesser r legt. Trägt man von OB aus den Winkel von 10 Graden ab, welcher dem Gewichte von 10 Grammen entsprach, so bekommt man auf der Berührungsgeraden sofort $r \cdot \mathrm{tg}\,10^0$. Dieses Maſs $r\,\mathrm{tg}\,10^0 = 0{,}176\,r$ hat man dann auf der Berührungsgeraden 100 Mal abzutragen bis zu einer Länge $= 17{,}6\,r$. Zieht man nun von der Achse O aus Strahlen nach diesen Theilpunkten, so bekommt man auf dem Theilkreise die Striche, welche den Gewichten bis 1000 g zugehören.

Bei der Schnellwaage (Fig. 182) wird nicht der Ausschlagwinkel α benutzt, vielmehr dient zum Abwägen ein der Grösse nach unveränderliches, auf dem wagerecht einzustellenden Hebel aber verschiebbares, sog. Laufgewicht. Es liegt bei dieser Waage der Schwerpunkt S des unbelasteten Waagebalkens nicht lothrecht unter der Drehschneide O, sondern um c nach rechts und um h nach unten. Die Grösse h ist, wie sich zeigen wird, für das Einspielen massgebend.

Fig. 182.



Ist K das Gewicht der leeren Schale, so gilt für das Gleichgewicht mit angehängter leerer Schale

$$1) \qquad Ka = Gc + Pb.$$

Legt man dann noch die Last Q auf die Schale, so muss das Laufgewicht P um x nach rechts verschoben werden, und wenn dann wieder eine wagerechte Ruhestellung des Hebels erreicht ist, so gilt dafür

$$2) \qquad (K + Q)\, a = Gc + P(b + x);$$

nach Abziehen der früheren Gleichung bleibt

$$3) \qquad Qa = Px, \text{ mithin } Q = Px : a.$$

$P : a$ ist der Festwerth der Waage, Q mit x verhältnisgleich; die Theilung des Laufhebels also gleichmässig.

Bringt man die für wagerechte Ruhestellung belastete Waage durch Rechtsdrehung um den Winkel α aus dem Gleichgewichte, so ist dazu ein Moment $\mathfrak{M}$ aufzuwenden, welches man leicht findet zu

$$\mathfrak{M} = (K + Q)\, a \cos \alpha - P(b + x) \cos \alpha - Gc \cos \alpha + Gh \sin \alpha.$$

Führt man hierin Gl. 2 ein, so bleibt $\mathfrak{M} = Gh \sin \alpha$ als Einspielungsmoment, welches also ein positives h bedingt, aber von c unabhängig ist.

Alle diese Waagen, bei denen zur Ausführung der Wägung Gewichtstücke oder das eigene Gewicht eines Theiles der Waage (des Balkens) benutzt werden, liefern nicht eigentlich das wirkliche Gewicht des vorliegenden Körpers, d. h. die Grösse der Anziehungskraft, welche der Körper von der Erde erfährt, sondern nur das Verhältnis seines Gewichtes zu dem Gewichte eines anderen Körpers an derselben Stelle der Erdoberfläche. Ein Körper, welcher eine richtige gleicharmige Hebelwaage mit einem Gewichtstücke von der Bezeichnung „1 Kilogramm" auf der anderen Seite wagerecht (bezw. auf Null) stellt, erfährt am Meeresspiegel unter 45^0 geogr. Breite von der Erde eine Anziehungskraft $= 1^{\text{kg}}$, am Äquator aber beträgt die Schwerkraft des Körpers sowohl wie des Gewichtstückes nach S. 94 nur $0{,}997^{\text{kg}}$. Eine solche Wägung stellt also eigentlich die Masse eines Körpers fest; so ist die Masse des eben beschriebenen Körpers ebenso wie diejenige des Gewichtstückes auf Grund der in diesem Buche gewählten Einheiten (S. 34) $1 : g = 1 : 9{,}806$ Masseneinheiten, u. zw. unveränderlich an jeder Stelle der Erde und des Weltenraumes.

Federwaagen dagegen, welche durch bestimmte Kräfte eine bestimmte, ablesbare Formänderung erleiden, zeigen die auf einen Körper ausgeübte Schwerkraft. Eine Federwaage, deren Theilung an einem Orte angefertigt war, wo die Fallbeschleunigung 9,806 beträgt, wird an diesem Orte unter einer Belastung mit einem Gewichtstück der Bezeichnung „1 Kilogramm“ oder mit 1 ^{l} Wasser die Schwerkraft zu 1 ^{kg} angeben, wird aber am Äquator unter derselben Last nur 0,997 ^{kg} zeigen. Beim Kaufe und Verkaufe kommt es im Grunde genommen auf die Masse eines Körpers an. Für den Käufer sind daher solche Federwaagen nachtheilig, die an einem Orte getheilt wurden, wo die Fallbeschleunigung kleiner ist als an dem Gebrauchsorte. Eine Federwaage, deren Theilung am Äquator angefertigt wurde, die also dort unter Belastung mit 1 ^{l} Wasser von 4 ^{0} C. oder einem ebenso schweren Gewichtstücke der Bezeichnung „1 Kilogramm“ die Schwerkraft mit 1 ^{kg} ablesen liess, wird unter Belastung mit dem gleichen Körper oder einem Körper gleicher Masse unter 45 ^{0} geogr. Breite die Schwerkraft zu 1,003 ^{kg} angeben, also schon durch eine Last von 0,997 ^{l} Wasser zu einer Gewichtsangabe von 1 ^{kg} gebracht werden.

5. Zweifach befestigter bezw. unterstützter Körper.

Ist ein unter Einwirkung seines Gewichtes Q stehender Körper an zwei Punkten A und B befestigt (Fig. 183), so wirken an diesen Widerstände W und W_1, welche mit Q im Gleichgewichte sein müssen. Die Mittelkraft von W und W_1 muss also das Entgegengesetzte von Q sein, oder es müssen W, W_1 und Q in einer Ebene liegen, und zwar in einer lothrechten Ebene, weil Q lothrecht ist. Da nun Q durch S geht, W und W_1 durch A bezw. B, so ist Ruhe des Körpers nur möglich, wenn der Schwerpunkt desselben in einer durch A und B gehenden lothrechten Ebene liegt. Nehmen wir an, diese Bedingung sei in Fig. 183 erfüllt, dann stehen für die Ermittelung der unbekannten Widerstände

Fig. 183.