Für Gleichgewicht haben also die äusseren Kräfte im Allgemeinen sechs Bedingungen zu erfüllen.

Liegen die Kräfte aber durchweg in derselben Ebene, so wähle man diese zur xy-Ebene; es fällt dann die Gl. 3 (S. 112) aus, weil in der z-Richtung überhaupt keine Seitenkräfte sich ergeben; auch die Momentengleichungen 4 und 5 fallen fort, weil die in der xy-Ebene liegenden Kräfte in Bezug auf die x- und y-Achsen, welche mit ihnen in derselben Ebene liegen, keine Momente haben (S. 100). $\mathfrak{M}_z$ bedeutet dann die Momentensumme für einen beliebigen Punkt der Kräfteebene. Ausserdem wird noch $\cos\beta = \sin\alpha$, und es verbleiben die drei Bedingungen:

7) $$\Sigma \boldsymbol{K} \cos\alpha = 0; \quad \Sigma \boldsymbol{K} \sin\alpha = 0; \quad \mathfrak{M}_z = \Sigma \boldsymbol{K} l = 0.$$

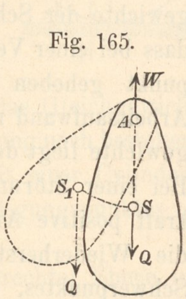
Liegt die x-Achse wagerecht, die y-Achse lothrecht, so heissen die Bedingungen in Worten:

Die algebraische Summe aller wagerechten Seitenkräfte, die algebraische Summe aller lothrechten Seitenkräfte und die Momentensumme für einen beliebigen Punkt der Ebene müssen Null sein.

2. An einem Punkte befestigter Körper.

Ist ein Punkt A eines starren Körpers unwandelbar befestigt und soll der Körper in Ruhe bleiben, so muss der Punkt eine Widerstandskraft W leisten, welche den sonstigen an dem Körper auftretenden Kräften das Gleichgewicht hält. Sind diese Kräfte nur Schwerkräfte, so lassen sie sich zu dem durch den Schwerpunkt S gehenden Gesammtgewichte Q zusammensetzen. Es muss daher W genau das Entgegengesetzte von Q sein. Daher muss der Befestigungspunkt A in der Schwerpunkts-Lothrechten des Körpers liegen. Hierbei verhält sich aber der Körper, wenn er durch eine Verrückung aus der Gleichgewichtslage gebracht wurde, verschieden, je nach der Höhenlage des Befestigungspunktes A.

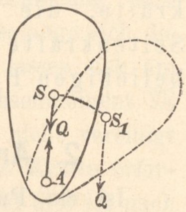
Fig. 165.



Lag nämlich beim Ruhezustande der Befestigungspunkt A oberhalb des Schwerpunktes (Fig. 165), so kann der aus der Ruhelage in die punktirte schräge Lage gebrachte Körper, wenn man ihn loslässt, nicht mehr im Gleichgewichte sein, weil Q nicht durch A hindurchgeht. Vielmehr dreht sich nun der Körper um den Befestigungspunkt und kommt (nach einer gewissen Anzahl Schwingungen) erst wieder zur Ruhe, wenn er die ursprüngliche Lage wieder erreicht hat. Er kehrt also unter Einwirkung der Schwere in den früheren Gleichgewichtszustand zurück, deshalb nennt man diesen einen sicheren (stabilen) Gleichgewichtszustand.

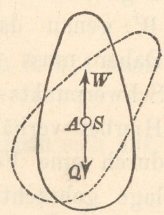
Im Ruhezustande geht hiernach die Schwerpunkts-Lothrechte durch den Aufhängepunkt. Hängt man daher einen Körper nach einander in verschiedenen Punkten A und B auf, so bestimmt sich dadurch in jeder Ruhelage eine Gerade, die den Schwerpunkt enthalten muss. Mittels zweimaliger Aufhängung kann also der Schwerpunkt eines Körpers durch Versuche gefunden werden.

Fig. 166.



Lag der Befestigungspunkt A lothrecht unter dem Schwerpunkt (Fig. 166), so kann der Körper nach einer seitlichen Verrückung nicht wieder von selbst in die ursprüngliche Lage zurückkehren, vielmehr entfernt sich der Körper gänzlich aus der früheren Lage und sucht sich eine neue sichere Gleichgewichtslage, wobei der Schwerpunkt unterhalb S zu liegen kommt. Der anfängliche Zustand heisst dabei ein unsicherer (labiler) Gleichgewichtszustand; derselbe kann nur durch vorsichtiges Balanciren erhalten werden. Unentschieden (indifferent) heisst der Zustand, wenn der Befestigungspunkt A mit dem Schwerpunkt zusammenfällt (Fig. 167). In diesem Falle besteht bei jeder Richtung des Körpers Gleichgewicht.

Fig. 167.



Zu beachten ist noch, dass im sicheren Gleichgewichte der Schwerpunkt so tief wie möglich liegt, dass bei einer Verrückung aus derselben der Schwerpunkt gehoben werden muss, wozu ein äusserer Arbeitsaufwand nöthig ist. Beim unsicheren Gleichgewichte liegt der Schwerpunkt so hoch wie möglich. Bei einer Störung desselben verrichtet die Schwerkraft positive Arbeit und erzeugt Geschwindigkeit; die Wiederherstellung des Gleichgewichts verlangt Hebung des Schwerpunktes, d. h. Aufwendung äusserer Arbeit. Beim unentschiedenen Gleichgewichte ist zu einer Drehung um den Schwerpunkt weder positive noch negative Arbeit erforderlich.

Die Befestigung eines Körpers an nur einem Punkte kommt ziemlich selten vor, ist auch gar nicht sehr einfach zu verwirklichen. Viel häufiger und einfacher ist die Befestigung an einer wagerechten geraden Linie, oder die Aufhängung eines Körpers an einer wagerechten Achse, etwa durch Hindurchtreiben eines glatten, runden Drahtstiftes oder Hindurchstecken eines glatten Bolzens durch ein cylindrisches Loch. Dafür gelten die vorstehenden Figuren ebenfalls, indem A die Projektion der Achse darstellt; die Bedingungen für die verschiedenen Arten des Gleichgewichtes sind die gleichen.

Unterstützte Körper. Ähnliche Betrachtungen gelten für den Gleichgewichtszustand eines Körpers, der sich mittels kugelförmiger Fläche auf eine wagerechte Ebene stützt (Fig. 168). Hierbei geht der Normalwiderstand N durch den Krümmungsmittelpunkt O der Kugelfläche hindurch, auch wenn man den Körper etwas aus der aufrechten Lage entfernt (Fig. 169), und dieser Punkt O tritt nun für die Beurtheilung der Sicherheit des Gleichgewichts an die Stelle des Befestigungspunktes A. Stellt man den Körper schief durch Drehung nach rechts, so geht der Normalwiderstand N nicht mehr durch A, sondern durch den neuen Berührungspunkt B, stets aber auch durch O. N und Q bilden ein Kräftepaar, welches den Körper, falls S unterhalb O lag, in die Gleichgewichtslage zurückführt; zugleich hat S in der Gleichgewichtsstellung die tiefste mögliche Lage, und zur Störung des Gleichgewichts ist äusserer Arbeitsaufwand erforderlich. Das Gleichgewicht war daher ein g e s i c h e r t e s. Liegt S oberhalb O, so entspricht dem Gleichgewichte die höchste mögliche Lage von S, das Gleichgewicht ist ein u n s i c h e r e s. Fallen S und O zusammen, so ist das Gleichgewicht u n e n t s c h i e d e n, bleibt auch nach einer kleinen Drehung noch bestehen.

Fig. 168.

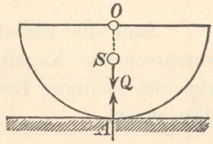
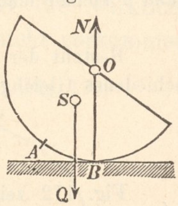


Fig. 169.



Die Vertauschung der unteren Kugelfläche mit einer Cylinderfläche entspricht der obigen Ersetzung eines Befestigungspunktes A durch eine Drehachse.

Eine homogene Kugel befindet sich auf wagerechter Ebene im unentschiedenen Gleichgewicht, ebenso ein Cylinder. Halbkugel und Halbcylinder aber sind im sicheren Gleichgewichte.

Beispiel: Wie hoch muss in Fig. 170 der Kegel sein, damit der aus Halbkugel und Kegel bestehende Körper im unentschiedenen Gleichgewichte sei? Der Gesammtschwerpunkt S muss in O liegen, und dazu ist erforderlich

$$M_1 \cdot SS_1 = M_2 \cdot SS_2 .$$

Die Dichte des Kegels sei γ_1, die der Halbkugel γ_2, dann kann man statt des Verhältnisses der Massen das Verhältnis der Gewichte setzen, und weil $SS_1 = {}^1\!/\!_4\, h$, $SS_2 = {}^3\!/\!_8\, r$, so wird

$$\gamma_1 \frac{r^2 \pi h}{3} \frac{h}{4} = \gamma_2 \frac{2}{3} r^3 \pi \frac{3}{8} r.$$

Daraus folgt $h^2 = \dfrac{3\,\gamma_2}{\gamma_1} r^2.$

Fig. 170.

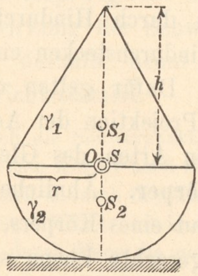
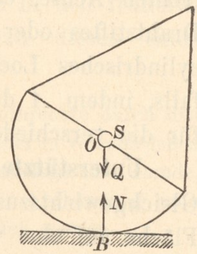
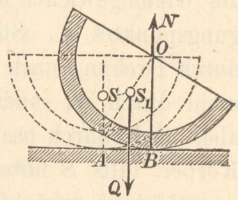


Fig. 171.



Sind die Einzelkörper von demselben Stoffe, so wird $h^2 = 3\,r^2$. Die entsprechende Kegelseite wird dann $= 2\,r$, die Projektion des Kegels also ein gleichseitiges Dreieck (wie in Fig. 170 u. 171 gezeichnet).

Fig. 172.



Ist aber der Kegel aus Holz, die Halbkugel aus Metall, etwa mit $\gamma_2 = 9\,\gamma_1$, so wird

$$h = 3\,r\sqrt{3} = 5{,}20\ r.$$

Soll das Gleichgewicht sicher sein, so muss man h kleiner machen.

Besteht der Aufsatz aus einem Cylinder, so ist die Bedingung für unentschiedenes Gleichgewicht

$$h^2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{r^2}{2}.$$

Fig. 173.

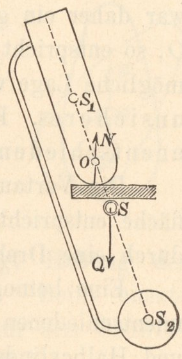


Fig. 172 zeigt den sicheren Gleichgewichtszustand einer Halbkugelschale. Ist bei einer solchen die Wandstärke gering, so liegt der Schwerpunkt nach S. 135 im Abstande ${}^1\!/\!_2\, r$ vom Mittelpunkte O.

Fig. 173 (aus Ritter's Mechanik entnommen) zeigt, wie der obere Körper mit hoch liegendem Schwerpunkte S_1 durch starre Verbindung mit einer tiefer liegenden Kugel S_2 zu einem zusammengesetzten Körper mit dem Schwerpunkte S und mit sicherem Gleichgewicht umgeändert werden kann.