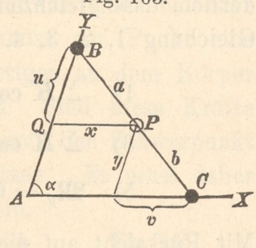
II. A. Gleichgewicht starrer Körper.

I. Gleichgewichts-Bedingungen.

Man bezeichnet einen Körper als im Gleichgewichte befindlich, wenn seine sämmtlichen Massenpunkte im Gleichgewichte sind, d. h. eine geradlinig-gleichförmige Bewegung ausführen, oder (als Sonderfall) in Ruhe sind; in letzterem Falle haben sie weder Geschwindigkeit noch Beschleunigung. Solcher Gleichgewichtszustand besteht offenbar, wenn der Körper eine gleichförmige und geradlinige Verschiebung erleidet, u. zw. ist eine derartige Verschiebung auch die einzige Möglichkeit des Gleichgewichtes. Man könnte vielleicht meinen, dass die Punkte eines Körpers sich auch geradlinig bewegen könnten, ohne dass diese Bahnlinien nothwendig einander parallel sein müssten, doch lässt sich zeigen, dass dies bei starren Körpern nicht möglich ist.

Denkt man sich den Punkt B (Fig. 163) längs einer Geraden AY, den Punkt C längs einer Geraden AX geführt und haben B und C eine unveränderliche Entfernung, so wird ein beliebiger Punkt P der Verbindungsgeraden, der von B und C um a bezw. b absteht, eine Ellipse beschreiben.

Fig. 163.



Nennt man nämlich die auf AX und AY bezogenen schiefwinkligen Koordinaten des Punktes P x und y, setzt $AB - y = u$, $AC - x = v$, so ist in dem Dreiecke BPQ:

$$a^2 = u^2 + x^2 - 2\,u\,x \cos\alpha .$$

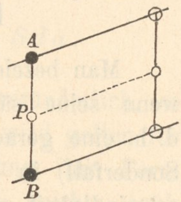
Ferner ist nach der Figur $u : y = a : b$; setzt man dies ein, so wird

$$a^2 = \frac{a^2}{b^2}\,y^2 + x^2 - 2\,\frac{a}{b}\,y\,x \cos\alpha ,$$

oder
$$1 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - 2\,\frac{y}{b}\,\frac{x}{a}\cos\alpha .$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse. Führt man also 2 Punkte A und B eines starren Körpers in nicht parallelen Geraden, so bewegen sich die sonstigen Punkte der Geraden AB nicht in geraden Linien. Nur wenn die Führungslinien der Punkte A und B parallele Gerade sind (Fig. 164), beschreibt auch jeder andere Punkt der AB eine Gerade. Ein Körper ist also nur im Gleichgewichte bei einer gleichförmig-geradlinigen Verschiebung oder beim Ruhezustande (Verschiebung mit der Geschwindigkeit und Beschleunigung Null). Hierbei haben alle Massenpunkte die Beschleunigung Null, es sind mithin alle Ergänzungskräfte Null. Nach dem Satze d'Alembert's (S. 141) müssen sich also sämmtliche äussere Kräfte schon unter sich allein aufheben

Fig. 164.



Umgekehrt folgt aber aus dem gegenseitigen Aufheben der äusseren Kräfte noch nicht, dass der Körper im Gleichgewichte sei; vielmehr muss dazu ausserdem noch die Bedingung erfüllt sein, dass der Körper auch zu Anfang keine Drehbewegung hatte. Ist im Anfange Ruhe oder gleichförmige geradlinige Verschiebung, also Gleichgewicht, vorhanden, so wird dieses andauern, solange sich die äusseren Kräfte aufheben. Etwaige äussere Kräfte lassen sich am starren Körper auf eine Mittelkraft R und ein Achsenmoment $\mathfrak{M}$ zurückführen; und weil R und $\mathfrak{M}$ im Allgemeinen nicht vereinigt werden können, so ist zum Aufheben der gegebenen Kräfte erforderlich, dass gleichzeitig $R = 0$ und $\mathfrak{M} = 0$ sei, und dies ist nach Gleichung 1, 2, 3, 4, 6 (S. 112) nur möglich, wenn

$$1)\quad \Sigma K \cos\alpha = 0; \qquad 2)\quad \Sigma K \cos\beta = 0;$$

$$3)\quad \Sigma K \cos\gamma = 0; \qquad 4)\quad \mathfrak{M}_x = 0;$$

$$5)\quad \mathfrak{M}_y = 0; \qquad 6)\quad \mathfrak{M}_z = 0.$$

Mit Rücksicht auf die Bedeutung von $\mathfrak{M}_x$ u. s. w. nach S. 114 kann man also aussprechen:

Die an einem starren Körper wirkenden Kräfte heben sich auf, wenn in Bezug auf ein beliebiges Achsenkreuz

1. die algebraische Summe der bei rechtwinkliger Zerlegung parallel zu jeder Achsenrichtuug fallenden Seitenkräfte Null ist, und wenn zugleich

2. die algebraische Summe der Momente der Kräfte in Bezug auf jede der Achsen Null ist.

Für Gleichgewicht haben also die äusseren Kräfte im Allgemeinen sechs Bedingungen zu erfüllen.

Liegen die Kräfte aber durchweg in derselben Ebene, so wähle man diese zur xy-Ebene; es fällt dann die Gl. 3 (S. 112) aus, weil in der z-Richtung überhaupt keine Seitenkräfte sich ergeben; auch die Momentengleichungen 4 und 5 fallen fort, weil die in der xy-Ebene liegenden Kräfte in Bezug auf die x- und y-Achsen, welche mit ihnen in derselben Ebene liegen, keine Momente haben (S. 100). $\mathfrak{M}_z$ bedeutet dann die Momentensumme für einen beliebigen Punkt der Kräfteebene. Ausserdem wird noch $\cos\beta = \sin\alpha$, und es verbleiben die drei Bedingungen:

$$7)\qquad \Sigma \boldsymbol{K} \cos\alpha = 0;\quad \Sigma \boldsymbol{K} \sin\alpha = 0;\quad \mathfrak{M}_z = \Sigma \boldsymbol{K} l = 0.$$

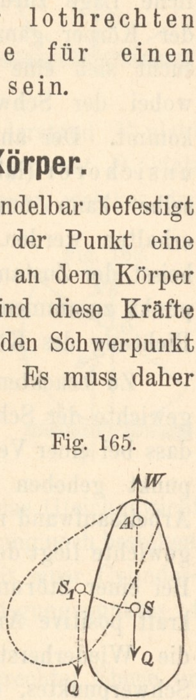
Liegt die x-Achse wagerecht, die y-Achse lothrecht, so heissen die Bedingungen in Worten:

Die algebraische Summe aller wagerechten Seitenkräfte, die algebraische Summe aller lothrechten Seitenkräfte und die Momentensumme für einen beliebigen Punkt der Ebene müssen Null sein.

2. An einem Punkte befestigter Körper.

Ist ein Punkt A eines starren Körpers unwandelbar befestigt und soll der Körper in Ruhe bleiben, so muss der Punkt eine Widerstandskraft W leisten, welche den sonstigen an dem Körper auftretenden Kräften das Gleichgewicht hält. Sind diese Kräfte nur Schwerkräfte, so lassen sie sich zu dem durch den Schwerpunkt S gehenden Gesammtgewichte Q zusammensetzen. Es muss daher W genau das Entgegengesetzte von Q sein. Daher muss der Befestigungspunkt A in der Schwerpunkts-Lothrechten des Körpers liegen. Hierbei verhält sich aber der Körper, wenn er durch eine Verrückung aus der Gleichgewichtslage gebracht wurde, verschieden, je nach der Höhenlage des Befestigungspunktes A.

Fig. 165.



Lag nämlich beim Ruhezustande der Befestigungspunkt A oberhalb des Schwerpunktes (Fig. 165), so kann der aus der Ruhelage in die punktirte schräge Lage gebrachte Körper, wenn man ihn loslässt,