

II. A. Gleichgewicht starrer Körper.

I. Gleichgewichts-Bedingungen.

Man bezeichnet einen Körper als im Gleichgewichte befindlich, wenn seine sämtlichen Massenpunkte im Gleichgewichte sind, d. h. eine geradlinig-gleichförmige Bewegung ausführen, oder (als Sonderfall) in Ruhe sind; in letzterem Falle haben sie weder Geschwindigkeit noch Beschleunigung. Solcher Gleichgewichtszustand besteht offenbar, wenn der Körper eine gleichförmige und geradlinige Verschiebung erleidet, u. zw. ist eine derartige Verschiebung auch die einzige Möglichkeit des Gleichgewichtes. Man könnte vielleicht meinen, dass die Punkte eines Körpers sich auch geradlinig bewegen könnten, ohne dass diese Bahnlinien nothwendig einander parallel sein müssten, doch lässt sich zeigen, dass dies bei starren Körpern nicht möglich ist.

Denkt man sich den Punkt B (Fig. 163) längs einer Geraden AY , den Punkt C längs einer Geraden AX geführt und haben B und C eine unveränderliche Entfernung, so wird ein beliebiger Punkt P der Verbindungsgeraden, der von B und C um a bzw. b absteht, eine Ellipse beschreiben.

Nennt man nämlich die auf AX und AY bezogenen schiefwinkligen Koordinaten des Punktes P x und y , setzt $AB - y = u$, $AC - x = v$, so ist in dem Dreiecke BPQ :

$$a^2 = u^2 + x^2 - 2ux \cos \alpha.$$

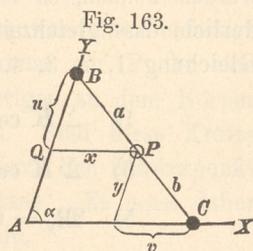
Ferner ist nach der Figur $u : y = a : b$; setzt man dies ein, so wird

$$a^2 = \frac{a^2}{b^2} y^2 + x^2 - 2 \frac{a}{b} y x \cos \alpha,$$

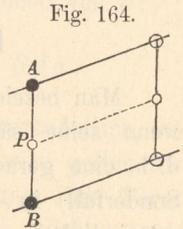
oder

$$1 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{y}{b} \frac{x}{a} \cos \alpha.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse. Führt man also 2 Punkte A und B eines starren Körpers in nicht parallelen Geraden, so bewegen sich die sonstigen Punkte der Geraden AB nicht in



geraden Linien. Nur wenn die Führungslinien der Punkte A und B parallele Gerade sind (Fig. 164), beschreibt auch jeder andere Punkt der AB eine Gerade. Ein Körper ist also nur im Gleichgewichte bei einer gleichförmig - geradlinigen Verschiebung oder beim Ruhezustande (Verschiebung mit der Geschwindigkeit und Beschleunigung Null). Hierbei haben alle Massenpunkte die Beschleunigung Null, es sind mithin alle Ergänzungskräfte Null. Nach dem Satze d'Alembert's (S. 141) müssen sich also sämtliche äussere Kräfte schon unter sich allein aufheben



Umgekehrt folgt aber aus dem gegenseitigen Aufheben der äusseren Kräfte noch nicht, dass der Körper im Gleichgewichte sei; vielmehr muss dazu ausserdem noch die Bedingung erfüllt sein, dass der Körper auch zu Anfang keine Drehbewegung hatte. Ist im Anfange Ruhe oder gleichförmige geradlinige Verschiebung, also Gleichgewicht, vorhanden, so wird dieses andauern, solange sich die äusseren Kräfte aufheben. Etwaige äussere Kräfte lassen sich am starren Körper auf eine Mittelkraft R und ein Achsenmoment \mathfrak{M} zurückführen; und weil R und \mathfrak{M} im Allgemeinen nicht vereinigt werden können, so ist zum Aufheben der gegebenen Kräfte erforderlich, dass gleichzeitig $R = 0$ und $\mathfrak{M} = 0$ sei, und dies ist nach Gleichung 1, 2, 3, 4, 6 (S. 112) nur möglich, wenn

$$\begin{array}{ll} 1) \quad \Sigma K \cos \alpha = 0; & 2) \quad \Sigma K \cos \beta = 0; \\ 3) \quad \Sigma K \cos \gamma = 0; & 4) \quad \mathfrak{M}_x = 0; \\ 5) \quad \mathfrak{M}_y = 0; & 6) \quad \mathfrak{M}_z = 0. \end{array}$$

Mit Rücksicht auf die Bedeutung von \mathfrak{M}_x u. s. w. nach S. 114 kann man also aussprechen:

Die an einem starren Körper wirkenden Kräfte heben sich auf, wenn in Bezug auf ein beliebiges Achsenkreuz

1. die algebraische Summe der bei rechtwinkliger Zerlegung parallel zu jeder Achsenrichtung fallenden Seitenkräfte Null ist, und wenn zugleich

2. die algebraische Summe der Momente der Kräfte in Bezug auf jede der Achsen Null ist.

Für Gleichgewicht haben also die äusseren Kräfte im Allgemeinen sechs Bedingungen zu erfüllen.

Liegen die Kräfte aber durchweg in derselben Ebene, so wähle man diese zur xy -Ebene; es fällt dann die Gl. 3 (S. 112) aus, weil in der z -Richtung überhaupt keine Seitenkräfte sich ergeben; auch die Momentengleichungen 4 und 5 fallen fort, weil die in der xy -Ebene liegenden Kräfte in Bezug auf die x - und y -Achsen, welche mit ihnen in derselben Ebene liegen, keine Momente haben (S. 100). \mathfrak{M}_z bedeutet dann die Momentensumme für einen beliebigen Punkt der Kräfteebene. Ausserdem wird noch $\cos \beta = \sin \alpha$, und es verbleiben die drei Bedingungen:

$$7) \quad \Sigma K \cos \alpha = 0; \quad \Sigma K \sin \alpha = 0; \quad \mathfrak{M}_z = \Sigma Kl = 0.$$

Liegt die x -Achse wagerecht, die y -Achse lothrecht, so heissen die Bedingungen in Worten:

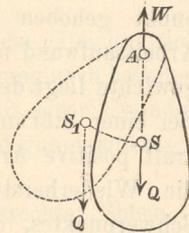
Die algebraische Summe aller wagerechten Seitenkräfte, die algebraische Summe aller lothrechten Seitenkräfte und die Momentensumme für einen beliebigen Punkt der Ebene müssen Null sein.

2. An einem Punkte befestigter Körper.

Ist ein Punkt A eines starren Körpers unwandelbar befestigt und soll der Körper in Ruhe bleiben, so muss der Punkt eine Widerstandskraft W leisten, welche den sonstigen an dem Körper auftretenden Kräften das Gleichgewicht hält. Sind diese Kräfte nur Schwerkräfte, so lassen sie sich zu dem durch den Schwerpunkt S gehenden Gesamtgewichte Q zusammensetzen. Es muss daher W genau das Entgegengesetzte von Q sein. Daher muss der Befestigungspunkt A in der Schwerpunkts-Lothrechten des Körpers liegen. Hierbei verhält sich aber der Körper, wenn er durch eine Verrückung aus der Gleichgewichtslage gebracht wurde, verschieden, je nach der Höhenlage des Befestigungspunktes A .

Lag nämlich beim Ruhezustande der Befestigungspunkt A oberhalb des Schwerpunktes (Fig. 165), so kann der aus der Ruhelage in die punktirte schräge Lage gebrachte Körper, wenn man ihn loslässt,

Fig. 165.



nicht mehr im Gleichgewichte sein, weil Q nicht durch A hindurchgeht. Vielmehr dreht sich nun der Körper um den Befestigungspunkt und kommt (nach einer gewissen Anzahl Schwingungen) erst wieder zur Ruhe, wenn er die ursprüngliche Lage wieder erreicht hat. Er kehrt also unter Einwirkung der Schwere in den früheren Gleichgewichtszustand zurück, deshalb nennt man diesen einen sicheren (stabilen) Gleichgewichtszustand.

Im Ruhezustande geht hiernach die Schwerpunkts-Lothrechte durch den Aufhängepunkt. Hängt man daher einen Körper nach einander in verschiedenen Punkten A und B auf, so bestimmt sich dadurch in jeder Ruhelage eine Gerade, die den Schwerpunkt enthalten muss. Mittels zweimaliger Aufhängung kann also der Schwerpunkt eines Körpers durch Versuche gefunden werden.

Lag der Befestigungspunkt A lothrecht unter dem Schwerpunkt (Fig. 166), so kann der Körper nach einer seitlichen Verrückung nicht wieder von selbst in die ursprüngliche Lage zurückkehren, vielmehr entfernt sich der Körper gänzlich aus der früheren Lage und sucht sich eine neue sichere Gleichgewichtslage, wobei der Schwerpunkt unterhalb S zu liegen kommt. Der anfängliche Zustand heisst dabei ein unsicherer (labiler) Gleichgewichtszustand; derselbe kann nur durch vorsichtiges Balanciren erhalten werden. Unentschieden (indifferent) heisst der Zustand, wenn der Befestigungspunkt A mit dem Schwerpunkt zusammenfällt (Fig. 167). In diesem Falle besteht bei jeder Richtung des Körpers Gleichgewicht.

Zu beachten ist noch, dass im sicheren Gleichgewichte der Schwerpunkt so tief wie möglich liegt, dass bei einer Verrückung aus derselben der Schwerpunkt gehoben werden muss, wozu ein äusserer Arbeitsaufwand nöthig ist. Beim unsicheren Gleichgewichte liegt der Schwerpunkt so hoch wie möglich. Bei einer Störung desselben verrichtet die Schwerkraft positive Arbeit und erzeugt Geschwindigkeit; die Wiederherstellung des Gleichgewichts verlangt Hebung des Schwerpunktes, d. h. Aufwendung äusserer Arbeit. Beim unentschiedenen Gleichgewichte ist zu einer Drehung um den Schwerpunkt weder positive noch negative Arbeit erforderlich.

Fig. 166.

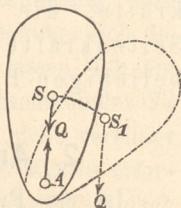
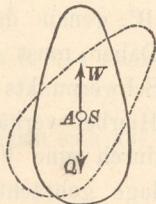


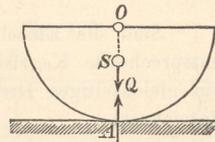
Fig. 167.



Die Befestigung eines Körpers an nur einem Punkte kommt ziemlich selten vor, ist auch gar nicht sehr einfach zu verwirklichen. Viel häufiger und einfacher ist die Befestigung an einer wagerechten geraden Linie, oder die Aufhängung eines Körpers an einer wagerechten Achse, etwa durch Hindurchtreiben eines glatten, runden Drahtstiftes oder Hindurchstecken eines glatten Bolzens durch ein cylindrisches Loch. Dafür gelten die vorstehenden Figuren ebenfalls, indem A die Projektion der Achse darstellt; die Bedingungen für die verschiedenen Arten des Gleichgewichtes sind die gleichen.

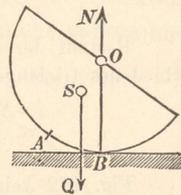
Unterstützte Körper. Ähnliche Betrachtungen gelten für den Gleichgewichtszustand eines Körpers, der sich mittels kugelförmiger Fläche auf eine wagerechte Ebene stützt (Fig. 168). Hierbei geht der Normalwiderstand N durch den Krümmungsmittelpunkt O der Kugelfläche hindurch, auch wenn man den Körper etwas aus der aufrechten Lage entfernt (Fig. 169), und dieser Punkt O tritt nun für die Beurtheilung der Sicherheit des Gleichgewichts an die Stelle des Befestigungspunktes A . Stellt man den Körper schief

Fig. 168.



durch Drehung nach rechts, so geht der Normalwiderstand N nicht mehr durch A , sondern durch den neuen Berührungspunkt B , stets aber auch durch O . N und Q bilden ein Kräftepaar, welches den Körper, falls S unterhalb O lag, in die Gleichgewichtslage zurückführt; zugleich hat S in der Gleichgewichtsstellung die tiefste mögliche Lage, und zur Störung des Gleichgewichts ist äußerer Arbeitsaufwand erforderlich. Das Gleichgewicht war daher ein gesichertes. Liegt S oberhalb O , so entspricht dem Gleichgewichte die höchste mögliche Lage von S , das Gleichgewicht ist ein unsicheres. Fallen S und O zusammen, so ist das Gleichgewicht unentschieden, bleibt auch nach einer kleinen Drehung noch bestehen.

Fig. 169.



Die Vertauschung der unteren Kugelfläche mit einer Cylinderfläche entspricht der obigen Ersetzung eines Befestigungspunktes A durch eine Drehachse.

Eine homogene Kugel befindet sich auf wagerechter Ebene im unentschiedenen Gleichgewicht, ebenso ein Cylinder. Halbkugel und Halbcylinder aber sind im sicheren Gleichgewichte.

Beispiel: Wie hoch muss in Fig. 170 der Kegel sein, damit der aus Halbkugel und Kegel bestehende Körper im unentschiedenen Gleichgewichte sei? Der Gesamtschwerpunkt S muss in O liegen, und dazu ist erforderlich

$$M_1 \cdot SS_1 = M_2 \cdot SS_2.$$

Die Dichte des Kegels sei γ_1 , die der Halbkugel γ_2 , dann kann man statt des Verhältnisses der Massen das Verhältnis der Gewichte setzen, und weil $SS_1 = \frac{1}{4} h$, $SS_2 = \frac{3}{8} r$, so wird

$$\gamma_1 \frac{r^2 \pi h}{3} \frac{h}{4} = \gamma_2 \frac{2}{3} r^3 \pi \frac{3}{8} r.$$

Daraus folgt $h^2 = \frac{3 \gamma_2}{\gamma_1} r^2.$

Sind die Einzelkörper von demselben Stoffe, so wird $h^2 = 3 r^2$. Die entsprechende Kegelseite wird dann $= 2 r$, die Projektion des Kegels also ein gleichseitiges Dreieck (wie in Fig. 170 u. 171 gezeichnet).

Ist aber der Kegel aus Holz, die Halbkugel aus Metall, etwa mit $\gamma_2 = 9 \gamma_1$, so wird

$$h = 3 r \sqrt{3} = 5,20 r.$$

Soll das Gleichgewicht sicher sein, so muss man h kleiner machen.

Besteht der Aufsatz aus einem Cylinder, so ist die Bedingung für unentschiedenes Gleichgewicht

$$h^2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{r^2}{2}.$$

Fig. 172 zeigt den sicheren Gleichgewichtszustand einer Halbkugelschale. Ist bei einer solchen die Wandstärke gering, so liegt der Schwerpunkt nach S. 135 im Abstände $\frac{1}{2} r$ vom Mittelpunkte O .

Fig. 173 (aus Ritter's Mechanik entnommen) zeigt, wie der obere Körper mit hoch liegendem Schwerpunkte S_1 durch starre Verbindung mit einer tiefer liegenden Kugel S_2 zu einem zusammengesetzten Körper mit dem Schwerpunkte S und mit sicherem Gleichgewicht umgeändert werden kann.

Fig. 170.

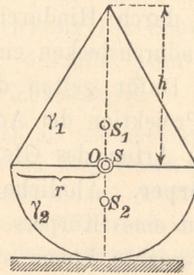


Fig. 171.

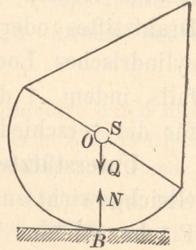


Fig. 172.

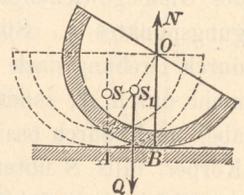
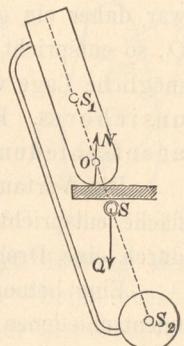


Fig. 173.



3. Hebel.

Ein Hebel ist ein fester Körper, der nur um eine feste Achse O drehbar und zum Angriffe verschiedener Kräfte eingerichtet ist. Das eigene Gewicht wird ebenso wie jede andere am Hebel auftretende Kraft behandelt und kann häufig gegen die sonstigen Kräfte vernachlässigt werden.

Die Kräfte mögen sämtlich in der Bildebene, rechtwinklig zur Achse O liegen

(Fig. 174). Die Achse, völlig glatt angenommen, leistet einen durch die geometrische Drehachse gehenden Widerstand W , der nach Grösse und Richtung unbekannt ist, für welche beiden Unbekannten aber besser die beiden Seitenkräfte W_x und W_y eingeführt werden. In dem Falle der Fig. 174 heisst die Gleichung der wagerechten Kräfte

$$1) \quad W_x + K_1 \cos \alpha_1 - K_2 \cos \alpha_2 = 0,$$

die Gleichung der lothrechten Kräfte

$$2) \quad W_y + K_1 \sin \alpha_1 + K_2 \sin \alpha_1 - K_3 = 0;$$

die Gleichung der Momente wird am besten auf die wirkliche Drehachse bezogen, weil dann W_x und W_y in ihr nicht vorkommen, sondern nur die bewegendenden Kräfte K . Es ist

$$3) \quad 0 = -K_1 l_1 + K_2 l_2 - K_3 l_3.$$

Häufig kommt es auf die Kenntnis des Widerstandes W der Drehachse nicht an; dann ist letzte Gleichung die allein maßgebende: Bei einem Hebel muss für den Gleichgewichtszustand die Momentensumme aller Kräfte in Bezug auf die Drehachse Null sein. Oder die Kräfte K müssen eine durch O gehende Mittelkraft haben.

Sind sämtliche Hebelarme gegeben, auch die beiden Kraftgrössen K_2 und K_3 , so ist durch die Momentengleichung K_1 bestimmt. Hiernach kann

Fig. 174.

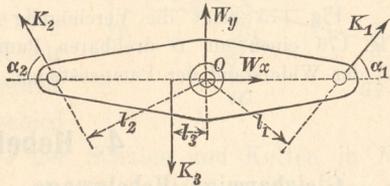


Fig. 175.

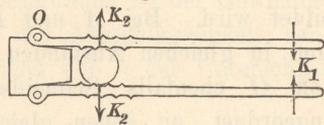
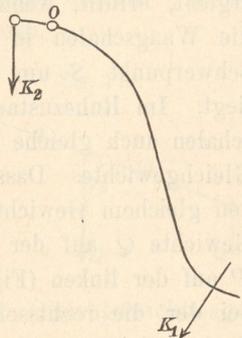


Fig. 176.



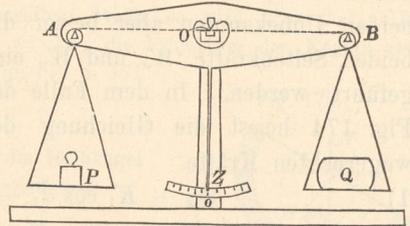
man dann aus den Gleichungen 1 u. 2 auch W_x und W_y berechnen. Die für die Momente in Frage kommenden Hebelarme sind im Allgemeinen nicht die Abstände der Angriffspunkte der Kräfte von der Drehachse, sondern die rechtwinkligen Abstände der Kraftrichtungen von der Drehachse.

Fig. 175 zeigt die Vereinigung zweier Hebel zu einem Nussknacker, Fig. 176 einen um O drehbaren Pumpenschwengel; K_1 ist die Triebkraft, K_2 der Widerstand der Pumpenstange.

4. Hebelwaagen.

Gleicharmige Hebelwaage. Der Waagebalken ist mit einer wagerechten Drehachse O versehen (Fig. 177), welche zur Verminderung der Reibung durch eine auf eine sog. Pfanne sich stützende Stahlschneide gebildet wird. Bei A und B sind in gleichen Abständen l von O ebenfalls Schneiden angeordnet, an denen gleich schwere Waagschalen aufgehängt sind. Die geometrischen Drehachsen A , O und B mögen in einer Flucht liegen. Es ist zunächst erforderlich, dass der Waagebalken unter der Last der beiden gleich schweren Schalen sich wagerecht stelle und diese Stellung durch einen Zeiger Z markire. Diese Bedingung wird, wie sich aus dem Folgenden ergibt, erfüllt, wenn der Waagebalken für sich allein, d. h. ohne die Waagschalen in sicherem Gleichgewicht ist, d. h. wenn sein Schwerpunkt S um eine Grösse h unterhalb der Drehachse O liegt. Im Ruhezustande üben die bei A und B angehängten Waagschalen auch gleiche Kräfte auf den Balken aus und halten ihn im Gleichgewichte. Dasselbe gilt, wenn die Waagschalen mit Körpern von gleichem Gewichte belastet werden. Ist aber der Körper vom Gewichte Q auf der rechten Seite schwerer als das Gewichtstück P auf der linken (Fig. 178), so entsteht eine Drehung des Balkens, bei der die rechtsseitige Schale sinkt; weil aber S unterhalb O liegt, so tritt nun das Gewicht G des Balkens auf die linke Seite und kommt mit seinem Momente dem der kleineren Belastung zu

Fig. 177.



Hülfe, so dass bei einem bestimmten Ausschlagwinkel α wieder sicheres Gleichgewicht eintritt. Die Beziehung zwischen dem Gewichtsunterschiede $Q - P$ und dem Winkel α ist sehr einfach, wenn A , O und B in einer Geraden liegen, ist aber auch nicht schwierig, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist. Hier soll nur der einfachste Fall betrachtet werden. Da es nur auf den Gewichtsunterschied ankommt, so mögen die Gewichte der Schalen und Ketten in P und Q mit enthalten sein. Dann entsteht die Momentengleichung $Ql \cos \alpha = Pl \cos \alpha + Gh \sin \alpha$, oder

$$1) \quad Q - P = G \frac{h}{l} \operatorname{tg} \alpha.$$

Bei der vorausgesetzten einfachen Anordnung ist der Gewichtsunterschied $Q - P$ mit der Tangente des Ausschlagwinkels verhältnismäßig, so dass aus der Beobachtung von α der Unterschied $Q - P$ ersehen werden kann.

Beispiel: Es sei G (Gewicht des Waagebalkens) 2 kg, $h = 1,5$ cm, $l = 30$ cm, $\alpha = 6^\circ$, $\operatorname{tg} \alpha = 0,1$, dann ist $Q - P = 2 \frac{1,5}{30} \cdot 0,1 = \frac{1}{100}$ kg = 10 g. Einem Winkel von 6° muss also an der Zeigertheilung die Bezeichnung 10 g entsprechen.

Beim Gebrauche der Waage kann natürlich die Gleichgewichtstellung nicht sofort eintreten; es muss aber dann ein Moment vorhanden sein, welches die Waage zum Einspielen bringt. Unter Einspielen versteht man das Schwingen um eine sichere Gleichgewichtslage, das Bestreben, dieselbe einzunehmen.

Einem Gewichtsunterschiede $Q - P$ möge ein Ausschlagwinkel α entsprechen, so dass $Gh = (Q - P)l \operatorname{tg} \alpha$. Beträgt dann der augenblickliche Abweichungswinkel von der Wagerechten β und hält man die Waage für einen Augenblick fest, so entsteht, wenn $\beta > \alpha$ gedacht wird, ein links herum drehendes, nach der Gleichgewichtslage treibendes Moment

$$\mathfrak{M} = Gh \sin \beta - (Q - P)l \cos \beta.$$

Fig. 178.

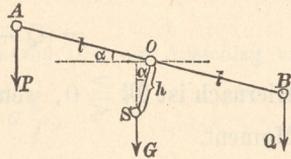
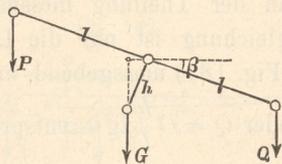


Fig. 179.



Setzt man hierin den vorstehenden Werth für Gh ein, so wird

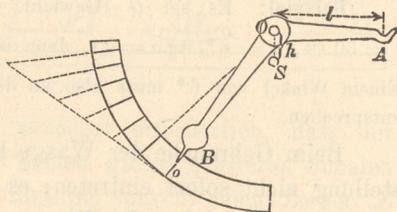
$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{(Q - P)l}{\operatorname{tg} \alpha} \sin \beta - (Q - P)l \cos \beta \\ &= (Q - P)l \cos \beta \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} - 1 \right). \end{aligned}$$

Hiernach ist $\mathfrak{M} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0$, wenn $\beta \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \alpha$. \mathfrak{M} nennen wir das Einspielungs-Moment.

Da $Q - P$ für Gleichgewicht verhältnissgleich mit $\operatorname{tg} \alpha$, wobei $\operatorname{tg} \alpha$ zwischen 0 und ∞ jeden Werth haben kann, so kann man theoretisch jeden beliebig grossen Gewichtsunterschied $Q - P$ mit Hülfe des Ausschlagwinkels α messen, kann also ein Gewichtstück P ganz entbehren, Q allein durch α ermitteln. Nach diesem Grundgedanken ist eingerichtet die

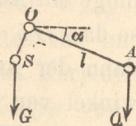
Zeigerwaage, welche zum Wägen von Briefen, Garnen, Papieren bestimmt ist. Fig. 180 entspricht einer Garnwaage, bei welcher keine Schale benutzt, sondern das Garn unmittelbar an dem rechtsseitigen Haken aufgehängt wird. Die Fig. 180 stellt den unbelasteten Zustand dar, wobei der Zeiger auf Null steht; der Schwerpunkt S des Waagebalkens muss entsprechend um h lothrecht unter der Drehachse O liegen.

Fig. 180.



Wird bei A ein Gewicht Q eingehängt, so bildet sich eine neue Gleichgewichtslage mit einem Ausschlagwinkel α , um den sich der ganze Hebel AOB verdreht und der an der Theilung messbar wird. Für die Momentengleichung ist nur die Lage der Punkte A , O und S (Fig. 181) massgebend, und es wird $Ql \cos \alpha = Gh \sin \alpha$ oder $Q = G \frac{h}{l} \operatorname{tg} \alpha$, entsprechend Gl. 1, S. 153 für $P = 0$.

Fig. 181.



$Gh : l$ ist ein unveränderlicher Festwerth für eine bestimmte Waage. Auf dem Kreisbogen wird man bei den Theilstrichen nicht Zahlen für die Winkel α , sondern sogleich für die entsprechenden Gewichte Q einritzen. Die Theilung ist dann selbstverständlich

nicht gleichmässig, da mit wachsendem Winkel die Tangente immer schneller wächst. Die Gewichtstheilung wird daher mit zunehmendem α enger und enger werden; darin findet aber die Anwendbarkeit der Waage ihre Grenze.

Beispiel: Entspricht z. B. einem Gewichte von 10 g ein Ausschlag von 10° , so ist

$$10 = G \frac{h}{l} \operatorname{tg} 10 = 0,176 G \frac{h}{l}.$$

Will man nun die Ausschlagwinkel für Vielfache von 10 g haben, so hat man zu bedenken, dass $\operatorname{tg} \alpha$ mit Q verhältnissgleich wächst.

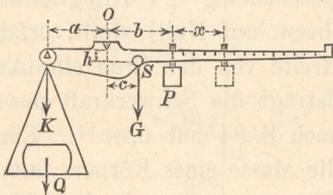
Für 20 g	ist $\operatorname{tg} \alpha = 2 \cdot 0,176 = 0,352$	$\alpha = 19^\circ 24'$,
„ 100 g	„ $\operatorname{tg} \alpha = 1,76$	$\alpha = 60^\circ 24'$,
„ 200 g	„ $\operatorname{tg} \alpha = 3,52$	$\alpha = 74^\circ 9'$,
„ 300 g	„ $\operatorname{tg} \alpha = 5,28$	$\alpha = 79^\circ 17'$,
„ 400 g	„ $\operatorname{tg} \alpha = 7,04$	$\alpha = 81^\circ 55'$,
„ 500 g	„ $\operatorname{tg} \alpha = 8,80$	$\alpha = 83^\circ 31'$,
„ 1000 g	„ $\operatorname{tg} \alpha = 17,60$	$\alpha = 86^\circ 45'$,

Während also die Theilstriche für Null und 100 g um 60° von einander abstehen, sind die für 500 und 1000 g nur 3° von einander entfernt.

Die Theilung der Waage kann man leicht durch Zeichnung finden, indem man bei der Nullstellung des Zeigers OB eine Tangente an den Theilkreis vom Halbmesser r legt. Trägt man von OB aus den Winkel von 10 Graden ab, welcher dem Gewichte von 10 Grammen entsprach, so bekommt man auf der Berührungsgerechten sofort $r \cdot \operatorname{tg} 10^\circ$. Dieses Maass $r \operatorname{tg} 10^\circ = 0,176 r$ hat man dann auf der Berührungsgerechten 100 Mal abzutragen bis zu einer Länge $= 17,6 r$. Zieht man nun von der Achse O aus Strahlen nach diesen Theilpunkten, so bekommt man auf dem Theilkreise die Striche, welche den Gewichten bis 1000 g zugehören.

Bei der Schnellwaage (Fig. 182) wird nicht der Ausschlagwinkel α benutzt, vielmehr dient zum Abwägen ein der Grösse nach unveränderliches, auf dem waagrecht einzustellenden Hebel aber verschiebbares, sog. Laufgewicht. Es liegt bei dieser Waage der Schwerpunkt S des unbelasteten Waagebalkens nicht lothrecht unter der Drehschneide O , sondern um c nach rechts und um h nach unten. Die Grösse h ist, wie sich zeigen wird, für das Einspielen massgebend.

Fig. 182.



Ist K das Gewicht der leeren Schale, so gilt für das Gleichgewicht mit angehängter leerer Schale

$$1) \quad K a = G c + P b.$$

Legt man dann noch die Last Q auf die Schale, so muss das Laufgewicht P um x nach rechts verschoben werden, und wenn dann wieder eine wagerechte Ruhestellung des Hebels erreicht ist, so gilt dafür

$$2) \quad (K + Q) a = G c + P(b + x);$$

nach Abziehen der früheren Gleichung bleibt

$$3) \quad Q a = P x, \text{ mithin } Q = P x : a.$$

$P : a$ ist der Festwerth der Waage, Q mit x verhältnissgleich; die Theilung des Laufhebels also gleichmässig.

Bringt man die für wagerechte Ruhestellung belastete Waage durch Rechtsdrehung um den Winkel α aus dem Gleichgewichte, so ist dazu ein Moment \mathfrak{M} aufzuwenden, welches man leicht findet zu

$$\mathfrak{M} = (K + Q) a \cos \alpha - P(b + x) \cos \alpha - G c \cos \alpha + G h \sin \alpha.$$

Führt man hierin Gl. 2 ein, so bleibt $\mathfrak{M} = G h \sin \alpha$ als Einspielungsmoment, welches also ein positives h bedingt, aber von c unabhängig ist.

Alle diese Waagen, bei denen zur Ausführung der Wägung Gewichtstücke oder das eigene Gewicht eines Theiles der Waage (des Balkens) benutzt werden, liefern nicht eigentlich das wirkliche Gewicht des vorliegenden Körpers, d. h. die Grösse der Anziehungskraft, welche der Körper von der Erde erfährt, sondern nur das Verhältniss seines Gewichtes zu dem Gewichte eines anderen Körpers an derselben Stelle der Erdoberfläche. Ein Körper, welcher eine richtige gleicharmige Hebelwaage mit einem Gewichtstücke von der Bezeichnung „1 Kilogramm“ auf der anderen Seite wagerecht (bezw. auf Null) stellt, erfährt am Meeresspiegel unter 45° geogr. Breite von der Erde eine Anziehungskraft = 1 kg , am Äquator aber beträgt die Schwerkraft des Körpers sowohl wie des Gewichtstückes nach S. 94 nur $0,997 \text{ kg}$. Eine solche Wägung stellt also eigentlich die Masse eines Körpers fest; so ist die Masse des eben beschriebenen Körpers ebenso wie diejenige des Gewichtstückes auf Grund der in diesem Buche gewählten Einheiten (S. 34) $1 : g = 1 : 9,806$ Massen-

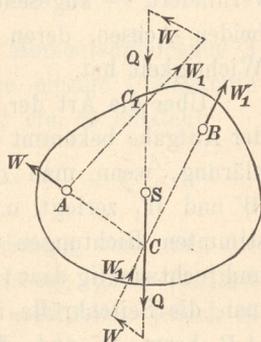
einheiten, u. zw. unveränderlich an jeder Stelle der Erde und des Weltenraumes.

Federwaagen dagegen, welche durch bestimmte Kräfte eine bestimmte, ablesbare Formänderung erleiden, zeigen die auf einen Körper ausgeübte Schwerkraft. Eine Federwaage, deren Theilung an einem Orte angefertigt war, wo die Fallbeschleunigung $9,806$ beträgt, wird an diesem Orte unter einer Belastung mit einem Gewichtstück der Bezeichnung „1 Kilogramm“ oder mit 1^l Wasser die Schwerkraft zu 1^{kg} angeben, wird aber am Äquator unter derselben Last nur $0,997^{\text{kg}}$ zeigen. Beim Kaufe und Verkaufe kommt es im Grunde genommen auf die Masse eines Körpers an. Für den Käufer sind daher solche Federwaagen nachtheilig, die an einem Orte getheilt wurden, wo die Fallbeschleunigung kleiner ist als an dem Gebrauchsorte. Eine Federwaage, deren Theilung am Äquator angefertigt wurde, die also dort unter Belastung mit 1^l Wasser von 4° C. oder einem ebenso schweren Gewichtstücke der Bezeichnung „1 Kilogramm“ die Schwerkraft mit 1^{kg} ablesen liess, wird unter Belastung mit dem gleichen Körper oder einem Körper gleicher Masse unter 45° geogr. Breite die Schwerkraft zu $1,003^{\text{kg}}$ angeben, also schon durch eine Last von $0,997^l$ Wasser zu einer Gewichtsangabe von 1^{kg} gebracht werden.

5. Zweifach befestigter bzw. unterstützter Körper.

Ist ein unter Einwirkung seines Gewichtes Q stehender Körper an zwei Punkten A und B befestigt (Fig. 183), so wirken an diesen Widerstände W und W_1 , welche mit Q im Gleichgewichte sein müssen. Die Mittelkraft von W und W_1 muss also das Entgegengesetzte von Q sein, oder es müssen W , W_1 und Q in einer Ebene liegen, und zwar in einer lothrechten Ebene, weil Q lothrecht ist. Da nun Q durch S geht, W und W_1 durch A bzw. B , so ist Ruhe des Körpers nur möglich, wenn der Schwerpunkt desselben in einer durch A und B gehenden lothrechten Ebene liegt. Nehmen wir an, diese Bedingung sei in Fig. 183 erfüllt, dann stehen für die Ermittlung der unbekanntenen Widerstände

Fig. 183.

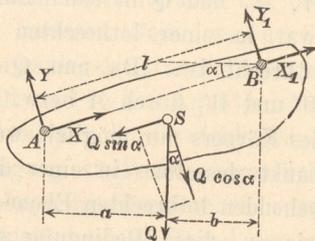


W und W_1 nur die drei Gleichgewichts-Bedingungen für Kräfte in einer Ebene (S. 147) zur Verfügung. Jeder Widerstand ist aber nach Grösse und Richtung unbekannt, oder hat, nach bestimmten Richtungen zerlegt, zwei unbekannte Seitenkräfte. Sonach liegen für die Ermittlung der Widerstände der Befestigungspunkte vier Unbekannte und nur drei Gleichungen vor. Die Aufgabe ist also mittels der Gleichgewichtsbedingungen allein nicht zu lösen, man nennt sie daher „statisch unbestimmt“, und zwar im Besonderen „einfach statisch unbestimmt“, weil gerade eine Gleichung zu wenig vorhanden ist. Man kann diese Unbestimmtheit auch geometrisch erkennen. W , W_1 und Q müssen sich in einem Punkte schneiden, oder, da die Richtung von Q gegeben, W und W_1 müssen sich in einem Punkte der Geraden Q schneiden; in welcher Höhe dieser Punkt aber liegt, ist unbestimmt, richtet sich nach der besonderen Art, wie die Befestigung vorgenommen wurde, und ist im Allgemeinen nur schwierig, in vielen Fällen auch gar nicht festzustellen. Nimmt man einen Schnittpunkt C der Kräfte an, so sind die Richtungen von W und W_1 bestimmt, es ist dann leicht das Kräfte-dreieck der drei Kräfte für Gleichgewicht (S. 63) zu zeichnen, womit auch die Grössen von W und W_1 feststehen. Ein anderer Punkt C_1 aber liefert ein anderes Ergebnis für W und W_1 .

Ähnlich sind die Verhältnisse, wenn die Befestigung nicht an zwei Punkten A und B , sondern an zwei zur Bildebene rechtwinkligen wagerechten Achsen A und B erfolgt. Dann fällt die erste Frage, ob und wann der Körper im Ruhezustande sein kann, fort. Der Körper ist unwandelbar befestigt, an jeder Bewegung verhindert, — abgesehen vielleicht von einer Verschiebung längs der beiden Achsen, deren Möglichkeit für diese Untersuchungen keine Wichtigkeit hat.

Über die Art der Unbestimmtheit der Aufgabe bekommt man einige Aufklärung, wenn man die Widerstände W und W_1 zerlegt, u. zw. in den bestimmten Richtungen von A nach B und rechtwinklig dazu (Fig. 184). Nennt man die Seitenkräfte in der Richtung AB bzw. X und X_1 , rechtwinklig dazu Y und Y_1 und bedenkt, dass, wenn AB mit der Wagerechten

Fig. 184.



mit der Wagerechten

den Winkel α bildet, Q in $Q \sin \alpha$ und $Q \cos \alpha$ zerlegt werden kann, so lauten die Gleichungen der Kräftesummen in den beiden Achsenrichtungen

$$1) \quad X + X_1 - Q \sin \alpha = 0$$

$$2) \quad Y + Y_1 - Q \cos \alpha = 0.$$

Die Momente beziehen wir zweckmässig auf eine der Befestigungsachsen z. B. A , weil dann die unbekanntnen Kräfte X , X_1 und Y aus der Momentengleichung fortbleiben; auch führen wir in diese Gleichung zweckmässig die ursprüngliche Kraft Q , nicht aber ihre Seitenkräfte ein. Dann ist nach den Bezeichnungen der Figur

$$3) \quad 0 = -Y_1 l + Q a \text{ oder } Y_1 = \frac{Q a}{l}.$$

In den Gleichungen 2 und 3 kommen nur die Unbekannten Y und Y_1 vor, die daraus also zu bestimmen sind. Für X und X_1 steht aber nur die Gleichung 1 zur Verfügung. Von diesen Kräften ist also nur die Summe bestimmbar, nicht aber die einzelnen Antheile. In der Richtung AB kann der Körper bei der Befestigung jede beliebige Anspannung erfahren, die sich im Allgemeinen nicht erkennen lässt. Befestigt man z. B. ein hölzernes Brett mittels zweier Drahtstifte A und B an einer Holzwand, so kommt es bezüglich der Grösse von X und X_1 auf die Art der Eintreibung der Drahtstifte an; durch die letzten Schläge kann man erreichen, dass zwischen den Stellen A und B in dem Körper eine innere Zugkraft oder Druckkraft entsteht, deren Grösse die Widerstände X und X_1 beeinflusst, bei Annahme starrer Körper aber völlig unbestimmbar ist

Die in zweckmässiger Weise aufgestellte Momentengleichung 3 hat die gute Eigenschaft, dass darin nur eine einzige Unbekannte vorkommt. Setzt man Y_1 nach Gl. 3 in Gl. 2 ein, so entsteht

$$4) \quad Y = Q \left(\cos \alpha - \frac{a}{l} \right) = Q \left(\frac{a+b}{l} - \frac{a}{l} \right) = Q \frac{b}{l}.$$

Unmittelbar aber kommt man zu diesem Resultate, wenn man die Gleichung der Kräftesumme in der Y -Richtung ganz fortlässt und dafür nochmals eine Momentengleichung anschreibt, jedoch in Bezug auf einen von A abweichenden Drehpunkt, den man so wählen muss, dass in der Gleichung womöglich nur diejenige Unbe-

kannte vorkommt, um deren Auffindung sich's gerade handelt, in diesem Falle also Y . Das wird erreicht durch die Wahl von B als Drehpunkt, nämlich

$$5) \quad 0 = Yl - Qb \quad \text{oder} \quad Y = Q \frac{b}{l},$$

wie in Gl. 4.

Von dieser Bevorzugung der Momentengleichungen in Bezug auf immer neue Drehpunkte wird in der Folge häufig Anwendung gemacht werden. Nur muss man nicht erwarten, dadurch die Zahl der überhaupt verfügbaren Gleichungen vergrössern zu können. Für das Gleichgewicht von Kräften in einer Ebene giebt es drei von einander unabhängige Gleichungen, mag man dieselben für Kräftesummen oder für Momente aufstellen. Vergrössert man die Zahl der Momentengleichungen durch Wahl immer neuer Drehpunkte, so bleiben die Gleichungen nicht mehr von einander unabhängig, so dass dadurch für eine unlösbare Aufgabe nichts gewonnen wird.

Die vorstehend behandelte Aufgabe verliert ihre Unbestimmtheit, wenn an einer der beiden Stellen, z. B. bei A , die Befestigung so geändert wird, dass über die Richtung des Widerstandes W keine Unbestimmtheit herrscht, indem man, statt den hindurchgesteckten Bolzen oder Drahtstift von dem Körper rings umschliessen zu lassen, etwa einen länglichen Schlitz anbringt. Hat der Schlitz wie in Fig. 185, die Richtung von A nach B , so kann bei A ein Widerstand X gar nicht geleistet werden; es wird $X=0$ und $Y=W$; mithin $X_1 = Q \sin \alpha$, womit die Widerstände sämtlich bestimmt sind. Auch die geometrische Lösung ist jetzt leicht möglich: Verlängert man die nun gegebene Richtung von W bis zum Schnitte C mit Q , so sind W und W_1 nach Fig. 183, S. 157, leicht bestimmt. Auch erkennt man, dass die zeichnerische Behandlung

Fig. 185.

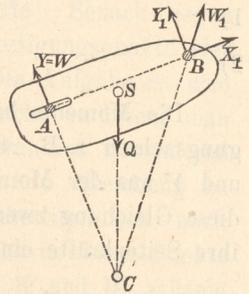


Fig. 186.

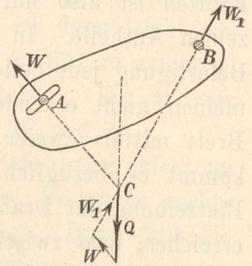
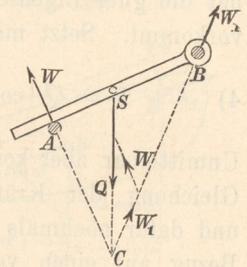


Fig. 187.



von gleicher Einfachheit ist, welche Richtung auch der Schlitz haben mag, wenn man nur die Richtung eines der Widerstände W oder W_1 bestimmt zu erkennen vermag (Fig. 186).

In Fig 187 ist die Richtung von W durch den runden Auflagerbolzen A gegeben, dadurch der Punkt C und die Richtung von W_1 bestimmt, und man erkennt, dass nun auch eine völlige Umschliessung des Bolzens B nicht mehr nöthig wäre, sondern eine Stützung nach Fig. 188 für das Gleichgewicht hinreichen würde. Fig. 187 bietet nur eine grössere Sicherheit gegen Störungen des Gleichgewichts durch Erschütterungen, Stösse und das Hinzutreten neuer Kräfte. Scheinbar unwesentliche Änderungen der Form des Körpers in der Nähe der Unterstützungsstellen haben zuweilen sehr wichtige Folgen. Biegt man z. B. den Stab der Fig. 189 an seinem oberen Ende derartig um, dass er den Bolzen B mit einer wagerechten Ebene berührt (Fig. 190), so wird W_1 lothrecht, der Schnittpunkt von W und W_1 rückt in unendliche Ferne, und dadurch wird W ebenfalls lothrecht, so dass nun die bei Fig. 189 erforderlich gewesene seitliche Sicherung bei A entbehrlich wird. Die Grössen von W und W_1 ergeben sich mittels der Momentengleichungen zu $W = Q b : l$; $W_1 = Q \cdot a : l$.

Auflagerung der Dachsparren auf Dachpfetten. Die Dachpfette möge die Form eines aufrecht stehenden Rechtecks haben (Fig. 191); der Sparren sei für die Auflagerung entsprechend ausgeschnitten. An den lothrechten Berührungsstellen kann keine Kraft auftreten, denn es müsste $H + H_1 = 0$ sein, und weil keine dieser Kräfte negativ werden kann, so müssen beide Null sein. An den wagerechten Berührungsstellen treten die lothrechten Widerstände A und B auf, die sich genau berechnen wie im vorhergehenden Falle.

Fig. 188.

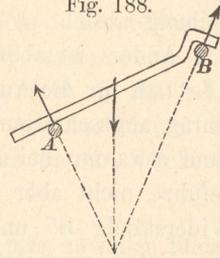


Fig. 189.

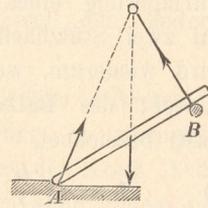


Fig. 190.

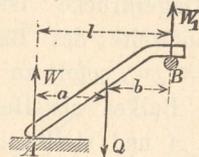
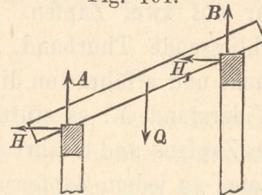


Fig. 191.



Das Gewicht der Dachsparren übt daher auf die die Pforten tragenden Wände nur lothrechte Drücke (das Entgegengesetzte von A und B) aus, wenn man von der Reibung absieht.

Anders ist aber die Sache, wenn die Pforten für die Auflagerung der Sparren schräg abgeschnitten sind (Fig. 192). Ist dann etwa nur bei B eine Nagelung ausgeführt, nicht aber in A , so werden die Widerstände W und W_1 beide schräg. Die Entgegengesetzten derselben wirken auf die Tragwände der Pforten.

Die Richtung der Widerstände wird durch die gegenseitige Höhenlage der Stützflächen nicht beeinflusst; besonders häufig ist die Auflagerung eines wagerechten Balkens auf zwei Stützflächen (Fig. 193). Dann wird wiederum, wenn Q das Gesamtgewicht des Balkens (einschl. etwaiger Last) bezeichnet,

$$6) \quad A = Q \frac{b}{l}; \quad B = Q \frac{a}{l}.$$

Liegt die Last Q in der Mitte, so wird natürlich $A = B = 1/2 Q$; rückt dann die Last näher an das linke Auflager, so wird dieses mehr belastet, das andere weniger. Der Abstand l der beiden Auflagerdrücke ist die rechnermässige Spannweite des Balkens. Um die Formel $B = Q a/l$ sofort zu erkennen, denkt man sich den Balken als Hebel mit dem Drehpunkte bei A und stellt sich die Kraft B als Hubkraft einer Hand vor, dann erscheint $a : l$ sofort als das Hebelverhältnis.

Eine Thür (Fig. 194) stützt sich drehbar auf zwei Zapfen. Das den Zapfen umschliessende Thürband berührt die Cylinderfläche und erfährt von dieser einen wagerechten Widerstand Y ; es stützt sich aber auch auf die untere Verdickung des Zapfens und erfährt dort einen lothrechten Widerstand X . Daher treten an jedem Zapfen zwei unbekannte Kräfte auf. Wäre die Thür

Fig. 192.

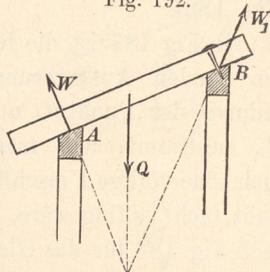


Fig. 193.

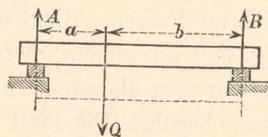
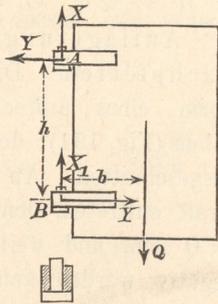


Fig. 194.



nur bei B gehalten, so würde sie durch Q rechtsherum gedreht werden; dem muss bei A ein nach links gerichteter Druck Y widerstehen. Nach der Gleichung der wagerechten Kräfte muss bei B der gleiche Druck Y nach rechts wirken. Die Gleichung der lothrechten Kräfte verlangt $X + X_1 = Q$; weiteres ist über X und X_1 nicht zu finden: wie sich das Gewicht Q auf beide Zapfen vertheilt, hängt von der Genauigkeit der Ausführung ab.

Y ist aber durch die Momentengleichung, etwa um B , leicht zu berechnen: $0 = Qb - Yh$, oder $Y = Qb : h$.

Bei näherer Besichtigung einer Thür wird man zuweilen finden, dass an einem der beiden Zapfen das Thürband mit der unteren Verdickung des Zapfens nicht in Berührung ist, dass daselbst ein Spielraum, eine offene Fuge sich zeigt. An einer solchen Stelle findet dann auch keine Druckübertragung statt, und es wird das Gewicht Q der Thür in solchem Fall allein von dem anderen Zapfen getragen.

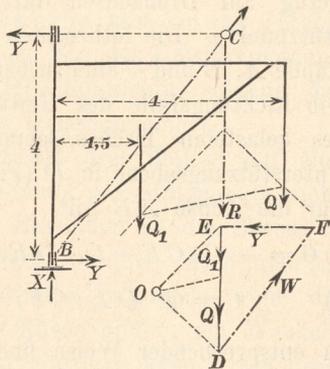
Bei wichtigen Fällen, d. h. wenn grosse Kräfte auftreten, ist eine derartige Unbestimmtheit der Kraftwirkung zu vermeiden. Daher trifft man dann die Einrichtung so, dass die Kraft X nur an einer Unterstützungsstelle überhaupt auftreten kann, indem man an der anderen Stelle eine Berührung nur an der cylindrischen Fläche zulässt. Z. B. an dem Drehkrahne (Fig. 195). Hier muss (mit $Q = 3000$, $Q_1 = 2000$ kg) $X = Q + Q_1 = 5000$ kg, und in Bezug auf den unteren Stützpunkt B

$$0 = -Y4 + 2000 \cdot 1,5 + 3000 \cdot 4$$

mithin $Y = 3750$ kg sein. Man kann die Aufgabe auch rein zeichnerisch lösen: Nach irgend einem Mafsstabe trägt man in einer Nebenfigur Q_1 und Q zu einem Kräfteck an einander, wählt einen beliebigen Pol O , zeichnet

zu den Polstrahlen ein Seileck in der Hauptfigur, deren äusserste Seiten durch ihren Schnittpunkt die Lage des Gesamtgewichtes $R = 5000$ bestimmen. Mit dieser Kraft R müssen nun der wage-

Fig. 195.



rechte Widerstand Y des oberen Lagers und der schräge Gesamtwiderstand W des unteren Lagers im Gleichgewichte sein, sich also auf ihr schneiden. Der Schnitt C von Y und R bestimmt sonach die Richtung BC von W . Zieht man im Krafteck EF wagerecht, $DF \parallel BC$, so ist $DF = W$ und $FE = Y$.

6. Dreifach und mehrfach befestigter bezw. unterstützter Körper.

Hat ein Körper drei feste Punkte, so lässt sich der Widerstand jedes der Punkte in je drei Seitenkräfte zerlegen; man hat also 9 Unbekannte. Die Zahl der Gleichgewichts-Bedingungen beträgt im Allgemeinen 6, mithin fehlen 3 Gleichungen zur völligen Bestimmung der Kräfte, oder die Aufgabe ist dreifach statisch unbestimmt.

Ist aber der Körper ein nur lothrecht belasteter dreibeiniger Tisch oder Schemel, der sich an drei Stellen auf eine wagerechte Ebene stützt, so sind von den drei Widerständen die Richtungen bekannt und die Grössen gesucht. Benutzt man die Lothrechte als z -Richtung, so sind von den 6 Gleichgewichts-Bedingungen (S. 146) benutzbar: Gl. 3, 4 und 5, und diese genügen zur Bestimmung der 3 Unbekannten; doch wendet man zur Bestimmung der Unbekannten vortheilhaft nur Momenten-Gleichungen an in Bezug auf Drehachsen durch je 2 Stützpunkte. Die lothrechten Widerstände A , B und C sind zu berechnen. Die Richtungslinie des Gewichtes Q des belasteten Tisches schneide die Unterstüzungsebene in D (Fig. 196). Für die Achse AB gilt:

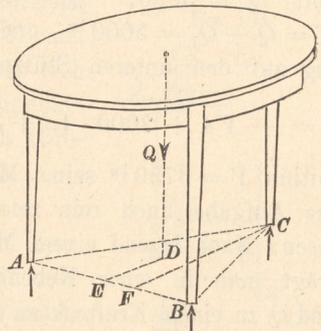
$$0 = -C \cdot CF + Q \cdot DE, \text{ also}$$

$$1) \quad C = Q \cdot \overline{DE} : \overline{CF}.$$

In entsprechender Weise findet man A und B .

Ist der Tisch nur einfach auf den Boden gestellt ohne Bindemittel und ohne Verklammerung, so können die Widerstände nicht negativ werden. Es wird aber $C = 0$, wenn $DE = 0$, d. h. wenn

Fig. 196.



Q durch die Seite AB des Unterstützungsdreiecks geht. Liegt D ausserhalb dieses Dreiecks, so ist Gleichgewicht nicht möglich, vielmehr kippt der Tisch dann um eine der Seiten des Dreiecks ABC .

Fällt D in den Schwerpunkt des Dreiecks ABC , so wird $C = \frac{1}{3}Q$, und ebenso gross werden A und B , so dass in diesem Falle das Gewicht sich gleichmässig auf die 3 Stützpunkte vertheilt.

Tritt zu dem Gewicht Q noch eine wagerechte Kraft K , so können die lothrechten Widerstände nicht mehr Gleichgewicht herbeiführen, sondern es müssen an den Auflagerstellen noch wagerechte Widerstände hinzutreten. Diese werden in Wirklichkeit bis zu einem gewissen Grade durch die Reibung geliefert; wir wollen statt dessen hier annehmen, dass eine vorgelegte Leiste die Verschiebung hindere. Es ist dann ausser dem Ruhezustande nur ein Kippen um die Leistenkante möglich.

Ersetzt man Q und K durch ihre Mittelkraft R , welche rechts von A im Abstände r vorbeigeht, so wird

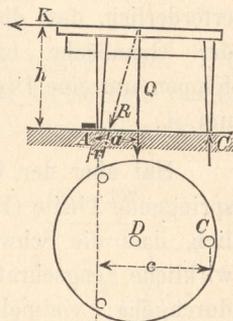
$$Cc = Rr \quad \text{oder} \quad C = Rr : c.$$

Gleichgewicht ist nur möglich, solange r positiv ist, d. h. innerhalb des Unterstützungsdreiecks durch die Grundebene hindurchgeht. Zugleich ist aber auch $Rr = Qa - Kh$.

Es ist also Gleichgewicht nur möglich, solange $Qa \geq Kh$. Qa heisst das Standsicherheitsmoment (Stabilitätsmoment) in Bezug auf die Kante A , Kh das Umsturzmoment. Der Körper ist nur im gesicherten Gleichgewichte, solange das Standsicherheitsmoment grösser als das Umsturzmoment.

Stützt sich ein Körper an mehr als drei Stellen auf eine wagerechte Ebene, so sind die Widerstände der Stützpunkte nicht mehr zu ermitteln. In geometrischer Beziehung ist die Ebene, in welcher der Körper die Unterstützungsfläche berührt, durch mehr als drei Punkte bestimmt, also überbestimmt, während, wenn die Unterstützungsstellen nicht genau eine Ebene bilden, ein Wackeln des Körpers bei Verschiebung der Last eintreten kann. Ein dreibeiniger Tisch kann nicht wackeln, ein mehrbeiniger aber bekanntlich sehr leicht; es hängt damit die Unbestimmtheit der Druckvertheilung zusammen.

Fig. 197.



Bezüglich der Sicherheit gegen ein Umsturzmoment gilt für einen vierbeinigen Tisch das Gleiche wie für einen dreibeinigen.

Ruht ein Körper unter Einwirkung seines Gewichtes Q mittels ebener Fläche auf wagerechter Ebene (Fig. 198), so müssen die lothrecht aufwärts gerichteten Widerstände der Flächentheilchen eine Mittelkraft N liefern, die durch den Schwerpunkt S des Körpers geht. Nach welchem Gesetze sich aber N auf die Berührungsfäche vertheilt, ist statisch unbestimmt. Da nun die Mittelkraft zweier Parallelkräfte gleichen Sinnes nach S. 102 zwischen den Parallelkräften liegt, so kann auch die Mittelkraft N nur innerhalb des Bereiches der Grundfläche liegen, oder es ist für Gleichgewicht erforderlich, dass die Schwerpunktslothrechte innerhalb des Bereiches der Grundfläche bleibe; andernfalls tritt ein Kippen um eine Drehkante ein, z. B. in Fig. 199 um A .

Fig. 198.

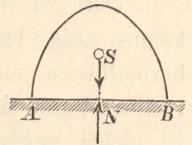
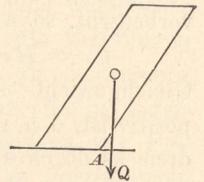
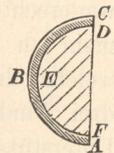


Fig. 199.



Hat aber der Umfang der Grundfläche einspringende Theile (Fig. 200), so ist nicht erforderlich, dass die Schwerpunktslothrechte durch die wirkliche engschraffierte Berührungsfäche hindurchgehe; vielmehr erhält man den für die Standsicherheit massgebenden Bereich der Grundfläche, indem man die wirkliche Berührungsfäche so weit ergänzt, dass einspringende Winkel fortfallen. Denn eine Seite oder Tangente der Grundfläche kann nur dann zu einer Drehkante werden, wenn ihre Verlängerung die Berührungsfäche nicht mehr durchschneidet. Sämmtliche Tangenten, die man an den einspringenden Bogen FED der Figur legt, sind keine möglichen Drehkanten. Es muss daher die leichte schraffierte Halbkreisfläche FED mit zu dem Bereiche der Grundfläche gerechnet werden, aus dem die Schwerpunktslothrechte nicht hinaustreten darf. Der Bereich der Grundfläche ist diejenige ebene Fläche, welche umschlossen wird von einer beweglichen Geraden, die die Unterstützungsfläche umhüllt, d. h. sich so um dieselbe bewegt, dass sie sie stets berührt, ohne sie aber zu schneiden.

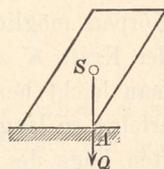
Fig. 200.



Bekanntlich kann ein zusammengebogenes Papier- oder Kartenblatt auf einem Tische sicher stehen, wiewohl die Schwerlinie nicht durch die schmale Auflagerfläche hindurch geht. Ebenso bildet bei dem Tische (Fig. 196, S. 164) die gesammte Dreieckfläche ABC den Bereich der Grundfläche.

Geht die Schwerpunkts-Lothrechte gerade durch eine mögliche Drehkante (Fig. 201), so ist der Ruhezustand unsicher. Der Widerstand des Bodens vertheilt sich nicht mehr über die Berührungsfläche, sondern wird nur noch von der Drehkante geleistet.

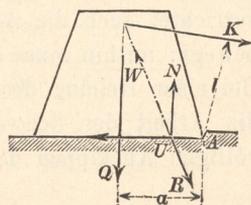
Fig. 201.



Tritt zu dem Gewichte Q des Körpers noch eine beliebig gerichtete Kraft K hinzu, die mit Q in derselben Ebene liegt (Fig. 202), so kann man die Mittelkraft R beider bestimmen, und letztere muss durch den Widerstand W des Bodens aufgehoben werden, wenn der Körper in Ruhe bleiben soll.

Die seitliche Verschiebung im Sinne der wagerechten Seitenkraft von K sei durch einen Vorsprung am Boden verhindert; dann kommt nur noch die Möglichkeit der Drehung um die Kante in Frage, deren Verschiebung durch den Vorsprung gehindert ist.

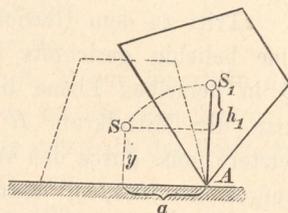
Fig. 202.



Der Boden kann innerhalb des Bereiches der Grundfläche jeden beliebigen Normalwiderstand N leisten, der Vorsprung einen seitlichen Widerstand von beliebiger Grösse; der aus beiden sich zusammensetzende Gesamtwiderstand W kann daher innerhalb des Bereiches der Grundfläche jede beliebige Grösse und Richtung haben, kann aber nicht aus diesem Bereiche heraustreten. Es muss daher die Lage von R die Unterstüzungsebene ebenfalls im Bereiche der Grundfläche schneiden, wenn der Körper soll in Ruhe bleiben können. Ist der Hebelarm von Q in Bezug auf die Drehkante A wieder a , der der Kraft K aber l , so ist wieder Standsicherheit vorhanden, wenn $Qa > Kl$, d. h. wenn das Sicherheitsmoment grösser als das Umstürzmoment. Für $Kl = Qa$ geht die Mittelkraft R aus K und Q durch die Drehkante, und der Körper ist im unsicheren Gleichgewichte. Wird Kl im geringsten grösser als Qa , so wird der Körper sich um die Kante A drehen.

Erfolgt diese Drehung, so beschreibt der Schwerpunkt S (Fig 203³) einen Kreisbogen um A , die Richtungslinie des Gewichtes Q rückt der Kante immer näher, das Moment von Q wird immer kleiner und endlich zu Null, sobald der Schwerpunkt in S_1 lothrecht über A liegt. Setzen wir voraus, dass die umstürzende Kraft K in der Weise abnehme, dass ihr Moment stets gleich dem Momente von Q in Bezug auf A sei, so wird das Moment ihrer Mittelkraft R stets Null sein, R also stets durch A gehen. Es wird dann ein langsames, allmähliches Aufkippen des Körpers möglich sein. Die hierzu von der Kraft K zu leistende Arbeit kann man leicht berechnen. Die Bewegung erfolge so langsam, dass bei der höchsten Lage des Schwerpunktes die Geschwindigkeit aller Punkte des Körpers Null sei. Dann ist, von der sicheren Ruhelage aus gerechnet, die Zunahme am Arbeitsvermögen Null. Mithin muss auch die Arbeitssumme Null sein. Nach S. 144 verrichten aber die inneren Kräfte die Arbeit Null, der in der Drehkante A auftretende Widerstand W verrichtet auch die Arbeit Null, weil sein Angriffspunkt sich nicht bewegt; mithin muss die Arbeit von Q und K zusammen Null sein. Bei einer Hebung des Schwerpunktes um h_1 ist aber (nach S. 139) die Arbeit der Schwerkraft $-Qh_1$, folglich ist die Arbeit zum völligen Aufkippen des Körpers

Fig. 203.



1)

$$\mathfrak{A} = Qh_1.$$

Diese Arbeit heisst die dynamische Standsicherheit, sie kommt in Frage, wenn es sich darum handelt, ob ein Körper durch einen Stoss oder Wurf umzustürzen ist. In einem geworfenen Körper steckt ein bestimmtes Arbeitsvermögen; trifft er einen aufgestellten Körper, so kann ein gewisser Theil des Arbeitsvermögens zum Umstürzen wirksam werden.

Das Standsicherheitsmoment war das zum ersten Anheben erforderliche Moment und unabhängig von der Höhenlage des Schwerpunktes. Die zum völligen Aufkippen erforderliche Arbeit \mathfrak{A}

aber ist auch von der Höhe y des Schwerpunktes abhängig. Es ist nämlich (Fig. 203)

$$AS = AS_1 = \sqrt{a^2 + y^2}; \quad h_1 = AS_1 - y = \sqrt{a^2 + y^2} - y,$$

was man aber, wenn man mit $\sqrt{a^2 + y^2} + y$ multipliziert und dividirt, auch schreiben kann

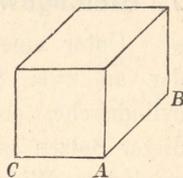
$$h_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + y^2} + y}, \quad \text{oder}$$

$$2) \quad \mathfrak{A} = Qa \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2} + y}.$$

Man erkennt, dass bei gleich bleibendem a die Arbeit \mathfrak{A} um so kleiner wird, je höher der Schwerpunkt liegt. Körper mit hoch liegendem Schwerpunkte lassen sich also durch einen Stoss verhältnismässig leicht umstürzen.

Beispiel: Ein parallelepipedischer Steinkörper (Fig. 204) von $1 \times 1 \times 2$ m wiegt, wenn $\gamma = 2000$ kg, $Q = 4000$ kg. Liegt er mit einer Langseite auf dem Boden, so ist $a = 0,5$ m, $y = 0,5$ m, daher das Moment zum ersten Aufkippen $\mathfrak{M} = Qa = 4000 \cdot 0,5 = 2000$ mkg. Oder es muss unter der linksseitigen Steinkante eine Hubkraft $K = 2000$ kg wirksam sein. Die Arbeit zum völligen Aufkippen, so dass er dann von selbst weiter umkippt, ist

Fig. 204.

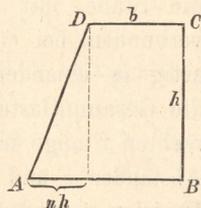


$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= Qa \frac{0,5}{\sqrt{0,5^2 + 0,5^2} + 0,5} = \frac{2000}{\sqrt{2} + 1} = 2000 (\sqrt{2} - 1) \\ &= 2000 \cdot 0,414 = 828 \text{ mkg}. \end{aligned}$$

Steht aber der Körper hochkantig, so ist $a = 0,5$ m, $y = 1$ m, mithin ist \mathfrak{M} ebenso gross wie vorher, dagegen $\mathfrak{A} = Qa (\sqrt{1 + 4} - 2) = 2000 \cdot 0,236 = 472$ mkg, also erheblich kleiner.

Fig. 205.

Eine Mauer von trapezförmigem Querschnitte (Fig. 205) habe eine Höhe h , eine obere Breite b ; der Grundriss der geneigten Seite AD betrage nh ; dann setzt sich das Standsicherheitsmoment aus den Beiträgen des rechteckigen und des dreieckigen Theiles zusammen, in welche man den Querschnitt zerlegen kann. Für eine



Länge = 1 rechtwinklig zur Zeichenebene ist dann in Bezug auf die Kante A das Standsicherheitsmoment \mathfrak{M}_a :

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_a &= \gamma h \left\{ b \left(\frac{1}{2} b + nh \right) + \frac{1}{2} nh \cdot \frac{2}{3} nh \right\} \\ &= \gamma h \left\{ \frac{1}{2} b^2 + b nh + \frac{1}{3} n^2 h^2 \right\}.\end{aligned}$$

In Bezug auf die Kante B :

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_b &= \gamma h \left\{ \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} nh (b + \frac{1}{3} nh) \right\} \\ &= \gamma h \left\{ \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} b nh + \frac{1}{6} n^2 h^2 \right\},\end{aligned}$$

mithin $\mathfrak{M}_a > \mathfrak{M}_b$, weil der Gesamtschwerpunkt näher an B als an A liegt. Würde man das Trapez mit einem flächengleichen Rechtecke von der Höhe h und der Breite $b + \frac{1}{2} nh$ vertauschen, so betrüge das Standsicherheitsmoment nur

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} &= \gamma h \frac{1}{2} (b + \frac{1}{2} nh)^2 \\ &= \gamma h \left\{ \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} b nh + \frac{1}{8} n^2 h^2 \right\},\end{aligned}$$

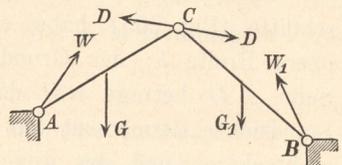
also wiederum weniger als \mathfrak{M}_b .

7. Gleichgewicht einer Verbindung von Gelenkstangen.

Unter einer Gelenkstange verstehen wir einen starren Körper, der an zwei Stellen mit sog. Augen versehen ist, in welchen cylindrische, einander parallele Bolzen angebracht sind. Mittels dieser Bolzen sind die Körper mit einander bzw. mit festen, unbeweglichen Widerlagern derartig verbunden, dass in den Gelenken nur Kräfte auftreten können, welche durch die Achsen der Gelenkbolzen hindurch gehen und zu diesen rechtwinklig stehen. Die Form der Körper ist im Übrigen gleichgültig, dieselben können die Gestalt von geraden oder einfach gekrümmten Stäben haben; der Einfachheit wegen mögen sie geradlinig gezeichnet werden. Die Reibung an den Bolzen wird vernachlässigt.

Verbindung zweier Gelenkstäbe. In A und B (Fig. 206) seien die Stäbe mit Widerlagergelenken verbunden, bei C greifen sie gelenkartig in einander. G und G_1 seien die Gesamtlasten der linken bzw. rechten Stange mit den wagerechten Abständen c und c_1 von A bzw. B . Es seien b und b_1 die wagerechten, h und h_1 die senkrechten Projektionen der Stangen. Den Widerstand W

Fig. 206.



des Widerlagergelenks A zerlegen wir in A (senkrecht) und X (wage-
recht); den Widerstand W_1 des Gelenks B in B bzw. X_1 , während
die gegenseitige Kraft D , welche die Gelenkstangen bei C auf
einander ausüben, in V (senkrecht) und H (wagerecht) zerfallen möge.

Soll die Verbindung im Gleichgewichte sein, so muss jede
Stange für sich den Gleichgewichtsbedingungen
genügen. Da nun für Kräfte in einer Ebene
3 Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen sind,
so stehen im Ganzen 6 Gleichungen zur Ver-
fügung, mittels deren die Unbekannten A , X ,
 B , X_1 , H und V bestimmt werden können.

Zuerst sollen die gegenseitigen Kräfte im
Gelenke C berechnet werden. Dass an der
linksseitigen Stange H nach links wirken muss,
erkennt man leicht; der Sinn von V ist vorläufig
unbestimmt; wir nehmen ihn nach
oben an. Bei der Momentengleichung in Bezug
auf A (Fig. 207) fallen A und X aus, und man
erhält einfach: $0 = -Hh - Vb + Gc$. An der
rechtsseitigen Stange (Fig. 208) müssen H und V
entgegengesetzt angebracht werden, und man
erhält: $0 = Hh_1 - Vb_1 - G_1c_1$.

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$1) \quad H = \frac{Gc b_1 + G_1 c_1 b}{b h_1 + b_1 h}$$

$$2) \quad V = \frac{Gc h_1 - G_1 c_1 h}{b h_1 + b_1 h}$$

Wird hierbei V negativ, so ist es in Fig. 207 abwärts, in Fig. 208
aufwärts gerichtet.

Weiter folgt dann leicht an der linken Stange:

$$3) \quad A = G - V; \quad X = H;$$

an der rechten:

$$4) \quad B = G_1 + V; \quad X_1 = H.$$

Wirken aber an jeder Stange zwei
Lasten P und Q bzw. P_1 und Q_1
(Fig. 209), so kann man P und Q durch
ihre Mittelkraft G , P_1 und Q_1 durch
ihre Mittelkraft G_1 ersetzen, u. zw. ist dann einfach

$$Gc = Pd + Qe; \quad G_1 c_1 = P_1 d_1 + Q_1 e_1.$$

Fig. 207.

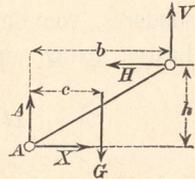


Fig. 208.

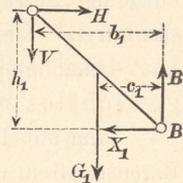
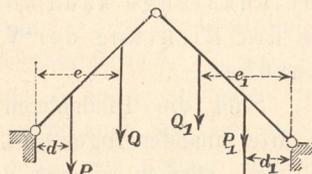


Fig. 209.



Führt man dies in die Gl. 1 und 2 ein, so entsteht:

$$5) \quad H = \frac{P d b_1 + Q e b_1 + P_1 d_1 b + Q_1 e_1 b}{b h_1 + b_1 h} \quad \text{und}$$

$$6) \quad V = \frac{P d h_1 + Q e h_1 - P_1 d_1 h - Q_1 e_1 h}{b h_1 + b_1 h}.$$

In diesen Gleichungen ist jede der 4 Lasten durch ein besonderes, von den anderen unabhängiges Glied vertreten; fallen die Lasten Q , Q_1 und P_1 fort, bleibt also nur P , so wird

$$H = \frac{P d b_1}{b h_1 + b_1 h}; \quad V = \frac{P d h_1}{b h_1 + b_1 h}.$$

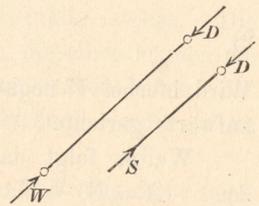
Jede der Lasten liefert hiernach zu den Kräften H und V ihren bestimmten, unabhängigen Beitrag; man kann daher beim gleichzeitigen Vorhandensein beliebig vieler Lasten den Einfluss jeder einzelnen Last auf H und V besonders ermitteln und braucht die einzelnen Beträge dann nur mit Rücksicht auf ihre Vorzeichen zu summieren. Das eigene Gewicht der Stangen wird ebenso wie jede Last behandelt; man kann daher die Stangen als an und für sich gewichtlos betrachten.

Eine unbelastete und gewichtlos gedachte Gelenkstange hat aber Eigenschaften, die für die Berechnung der Stangenverbindungen sehr wichtig sind (A. Ritter, Technische Mechanik). An einer solchen Stange müssen die Gelenkdrücke W und D sich allein im Gleichgewichte halten, also gleich und entgegengesetzt sein und in dieselbe Gerade fallen (Fig. 210), d. h. in die gerade Verbindungslinie beider Gelenke. Oder es gilt der Satz:

Eine gewichtlose unbelastete Gelenkstange kann nur Widerstände in der Richtung der Verbindungsgeraden ihrer Gelenke ausüben.

Sind die Pfeilspitzen der an beiden Gelenken auftretenden Kräfte einander zugewandt, wie in Fig. 210, so erfährt die Stange Druck. Denken wir uns die Stange an irgend einer Stelle zwischen den Gelenken durchschnitten, so haben wir an der Schnittstelle eine innere Spannkraft S anzubringen, welche die Wirkung des

Fig. 210.



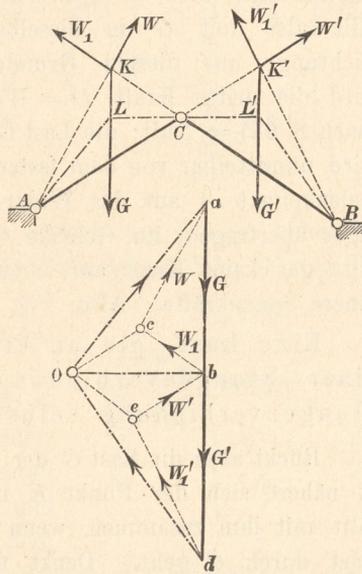
abgeschnittenen Stückes ersetzt; diese Spannkraft ist ebenfalls $= D$ und ihr entgegengesetzt, oder:

Die Spannkraft einer unbelasteten Stange fällt in die Verbindungsgerade der beiden Gelenkpunkte.

Ist nun (Fig. 211) die linke der beiden Stangen mit G belastet, die rechte einstweilen unbelastet, so übt letztere einen Gegendruck $D = W_1$ in der Richtung BC , welche sich mit G im Punkte K schneidet; durch K muss dann auch der Widerstand W des Gelenkes A hindurchgehen, weil an der Stange AC die drei Kräfte: W_1 , G und W sich im Gleichgewichte halten müssen. Nachdem hierdurch die Richtungen von W und W_1 gefunden sind, lässt sich leicht ein Kräfteck abc dieser 3 Kräfte zeichnen, aus welchen dann die Grössen W und $D = W_1$ abgegriffen werden können.

Für eine Belastung der rechten Stange mit G' findet man in entsprechender Weise die zugehörigen Widerstände W' und W_1' im Kräfteck bde . Sind nun die Lasten G und G' gleichzeitig vorhanden, so treten auch die entsprechenden Widerstände gleichzeitig auf. Der Gesamtwiderstand im Punkte A ist dann die Mittelkraft aus W und W' . Diese ist aber leicht zu finden, wenn man aus bc und eb ein Parallelogramm $Ocbe$ zeichnet; dann finden sich $Oc = W'$ und $ca = W$ an einander gereiht, und ihre geometrische Summe Oa ist der Gesamtdruck W_a in A . Ebenso ist dO der Gesamtdruck W_b in B . Bringt man diese Gesamtkräfte in A und B an, so schneiden sie G und G' in Punkten L und L' , durch welche auch der Gesamtdruck des Gelenkes C hindurch gehen muss, die deshalb mit C in einer Geraden liegen müssen, und zwar muss diese Gerade $LCL' \parallel Ob$ sein, weil Ob den Gesamtdruck des Gelenkes C nach Richtung und Grösse darstellt.

Fig. 211.



Rückt die Last G (Fig. 212) dem Widerlagergelenke A näher und näher, so verschiebt sich der Schnittpunkt K der drei Kräfte auf der Verlängerung von BC mehr und mehr nach oben, und die Richtung von W nähert sich mehr und mehr der Lothrechten. Im Grenzfalle, wo G mit A zusammenfällt, wird W lothrecht, fällt also mit G in dieselbe Richtung; aus diesem Grunde wird die dritte Kraft $D = W_1$ (nach S. 63) = Null; die Last G wird unmittelbar von dem festen Gelenkpunkt A auf das Widerlager übertragen; im Gelenke C tritt gar keine Kraft auf, und die Stangenverbindung bleibt ohne innere Spannkraft. Also:

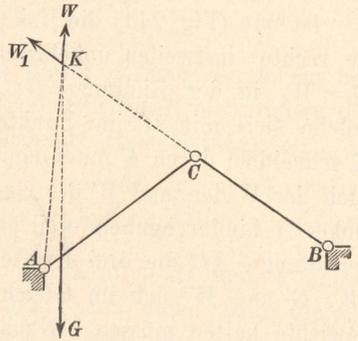


Fig. 212.

Eine Last, die an einem Widerlagergelenkpunkt einer Stangenverbindung angreift, bringt in der Stangenverbindung selbst keine Spannkraft hervor.

Rückt aber die Last G der linken Stange nach C hin (Fig. 213), so nähert sich der Punkt K mehr und mehr dem Punkte C und fällt mit ihm zusammen, wenn die Last durch C geht. Denkt man sich nun die Stangen durchschnitten, so müssen ihre Spannkraften beide in die Richtungen AC und BC fallen. Oder:

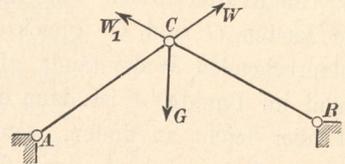


Fig. 213.

Greifen die Lasten nur in dem gemeinsamen Gelenkpunkte einer Stangenverbindung an, so fallen die Spannkraften der Stangen in die Verbindungsgeraden der Gelenkpunkte (die Stangenrichtungen).

Die beiden vorstehenden Sätze gelten, wie man leicht erkennt, auch für eine Verbindung von beliebigen vielen Stangen.

Die Bestimmung der Widerstände der festen Gelenke geschieht in derselben Weise, wie auf S. 173 beschrieben, wenn auch die

einzig vorhandene Last K an der Verlängerung einer Gelenkstange angreift und etwa von der lothrechten Richtung abweicht (Fig. 214).

In Fig. 215 ergeben sich leicht die Spannkraften S und S_1 der beiden Gelenkstangen, und zwar wirkt die Spannkraft S auf Zug, S_1 auf Druck.

Ist bei einem Bogenträger mit drei Gelenken (Fig. 216) nur die linke Hälfte durch eine Einzellast G belastet, so kann, ohne Rücksicht auf die

Form, die rechte Hälfte wie eine gewichtlose Stange behandelt werden, so dass die Richtungen der Widerlagerdrücke W und W_1 in einfacher Weise bestimmt sind und daher die Zeichnung des Kräftecks aus G , W und W_1 ermöglicht ist.

Liegt das gemeinsame Gelenk C oberhalb der Geraden AB , so erfordert eine Last G (Fig. 213, S. 174) schräg aufwärts gerichtete Widerstände W und W_1 ; diese Kräfte haben nach dem Gesetze der Wechselwirkung das Bestreben, die Widerlager schräg nach unten und aus einander zu drängen; die Stangen erfahren Druckkräfte. Liegt aber C unterhalb AB (Fig. 217), so verkehren sich alle Verhältnisse ins Entgegengesetzte: die Stangen werden gezogen und suchen die Widerlager nach innen zu ziehen.

Solche innere Zugkräfte, deren Richtung mit der Verbindungsgeraden zweier Gelenke zusammenfällt, können auch durch ein Seil aufgenommen werden. An Stelle der Gelenke hat man sich dann Seilknoten zu denken.

Verbindung von mehr als zwei Stangen. Eine Verbindung von zwei Gelenkstangen wie Fig. 217 bildet eine bestimmte Figur,

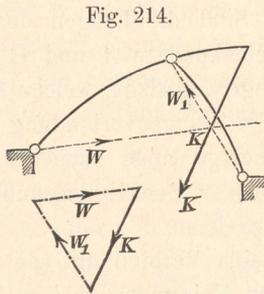


Fig. 214.

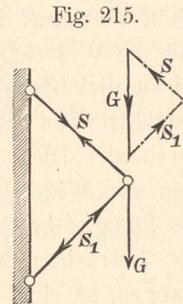


Fig. 215.

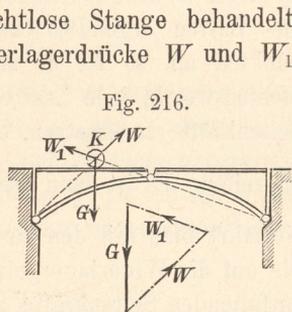


Fig. 216.

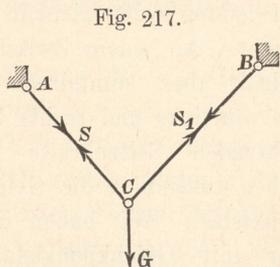
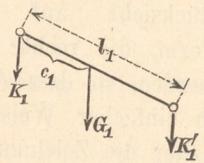


Fig. 217.

nämlich ein durch drei Seiten bestimmtes Dreieck, weil die festen Punkte A und B die Seite AB festlegen. Eine Verbindung von mehr als zwei Stangen bildet aber eine verschiebliche Figur, weil ein Vieleck von mehr als drei Seiten nicht mehr durch die Seiten allein bestimmt ist. Sind die Längen der Stangen, deren Lasten, und die Widerlagergelenkpunkte A und B gegeben, so giebt es nur eine gesicherte Gleichgewichtslage, welche sich allmählich von selbst einstellt, wenn man die Stangenverbindung der Wirkung der Lasten überlässt. Diese Ruhelage muss zunächst ermittelt werden, bevor man die Widerstände der Befestigungspunkte und die Spannkkräfte der Stangen bestimmen kann.

Betrachten wir eine Verbindung von drei Stangen, so sind deren Neigungswinkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in der Gleichgewichtslage unbekannt. Greifen die Lasten irgendwo zwischen den Gelenkpunkten an, so ist es zur Vereinfachung empfehlenswerth, jede Last G durch zwei parallele Seitenkräfte zu ersetzen, die je in einem Gelenk

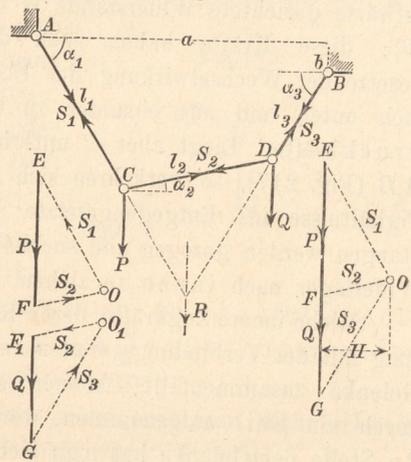
Fig. 218.



angreifen. Es ist dann (Fig. 218) $K_1 = G_1 \left(1 - \frac{c_1}{l_1}\right)$; $K_1' = G_1 \frac{c_1}{l_1}$.

Verfährt man mit den Lasten der anderen Stangen ebenso, so werden die auf die Widerlagergelenke entfallenden Seitenkräfte, z. B. K_1 , unmittelbar von diesen aufgenommen und kommen für das Gleichgewicht der Stangenverbindung weiter nicht in Betracht. An jedem Zwischen-

Fig. 219.



gelenk aber summiren sich die von links und rechts her-rührenden Seitenkräfte und geben zusammen die Gelenk-punktlast. Wir haben dann nur mit Gelenk-punktlasten P und Q zu thun (Fig. 219), und die Spannkkräfte der Stäbe

können nach dieser Änderung mit Rücksicht auf den Satz S. 174 als in die Stabrichtungen fallend angesehen werden.

An dem Gelenkbolzen C hängt die Last P ; die anschliessenden Stäbe üben auf ihn die Kräfte S_1 und S_2 aus, und diese 3 Kräfte müssen sich das Gleichgewicht halten, weil der Bolzen in Ruhe sein soll. Es müssen daher diese Kräfte ein geschlossenes Krafteck OEF bilden. Da nun S_1 mit der Wagerechten den Winkel α_1 bildet, ist $90^\circ - \alpha_1$ der Winkel zwischen S_1 und P ; der Winkel bei O im Krafteck beträgt aber für die angenommenen Neigungen $\alpha_1 + \alpha_2$, derjenige bei F ist $90^\circ - \alpha_2$. Mithin wird nach dem Sinus-Satze:

$$P : S_2 = \sin(\alpha_1 + \alpha_2) : \cos \alpha_1.$$

Ebenso müssen die in D angreifenden Kräfte S_2 , Q und S_3 ein geschlossenes Dreieck O_1F_1G bilden, für welches die Gleichung gilt:

$$Q : S_2 = \sin(\alpha_3 - \alpha_2) : \cos \alpha_3.$$

Durch Division ergeben diese beiden Gleichungen:

$$1) \quad \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin(\alpha_3 - \alpha_2)} \frac{\cos \alpha_3}{\cos \alpha_1} = \frac{P}{Q}.$$

Dies ist die einzige Beziehung, welche zwischen den gegebenen Lasten und den Gleichgewichts-Neigungen α_1 , α_2 und α_3 aufgestellt werden kann. Haben aber die Punkte A und B einen gegebenen wagerechten Abstand a , einen Höhenunterschied b , so müssen diese Werthe gleich sein der algebraischen Summe der wagerechten bezw. senkrechten Projektionen der Stangen, oder

$$2) \quad l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos \alpha_2 + l_3 \cos \alpha_3 = a;$$

$$3) \quad l_1 \sin \alpha_1 - l_2 \sin \alpha_2 - l_3 \sin \alpha_3 = b.$$

Die Gleichungen 1 bis 3 enthalten die Bedingungen für die 3 Unbekannten α_1 , α_2 und α_3 , sind aber nach diesen Grössen nur durch mühsames Probiren aufzulösen.

In anderer Gestalt lässt sich die Bedingung für die Gleichgewichtsform der Stangenverbindung aussprechen, wenn man die beiden Kraftecke so zusammenschiebt, dass O_1F_1 mit OF zusammenfällt. In der so entstehenden Figur (Fig. 219, rechts) bildet EFG den Streckenzug der gegebenen parallelen Lasten, O den Pol, OE , OF , OG die Polstrahlen, und wenn man nun bedenkt, dass $OE \parallel AC$, $OF \parallel CD$ und $OG \parallel DB$ gezeichnet waren, so ist nach S. 118 der Linienzug $ACDB$ ein zu den Lasten P und Q gezeichnetes Seileck. Die Polstrahlen des Kraftecks geben Grösse und Richtung der Stab-Spannkkräfte.

Nach der Bedeutung der Seileckseiten (S. 118) bedeutet DB die Richtungslinie einer Kraft S_3 mit dem Sinne von B nach D , welche die Mittelkraft von S_1 (aufwärts), P und Q darstellt. Nach den Lehren über die Zusammensetzung und das Gleichgewicht der Kräfte am starren Körper würden daher die an einem starren Körper wirkenden Kräfte S_1 , P und Q mittels eines Seilecks zu einer Mittelkraft S_3 vereinigt werden können; und eine entgegengesetzt gerichtete Kraft S_3 (mit dem Sinne von D nach B) würde den Kräften S_1 , P und Q das Gleichgewicht halten. Bei der Stangenverbindung haben wir nun gezeigt, dass sie unter Einwirkung der Stabkräfte S_1 und S_3 und den Gelenkpunktlasten P und Q im Gleichgewichte sei. Da sich dieselben Kräfte auch am starren Körper im Gleichgewichte halten, so folgt daraus, dass, wenn eine Gelenkverbindung im Gleichgewichte ist, in dem Gleichgewichts- und Kräftezustande nichts geändert wird, wenn man den Gelenken die Beweglichkeit nimmt, also z. B. sie zu einem starren Körper zusammengeschweisst denkt.

Nach der Eigenschaft des Seilecks (S. 119) schneiden sich die Richtungen von S_1 und S_3 auf der Mittelkraft R der Lasten P und Q . Die Spannkkräfte S_1 , S_2 und S_3 haben im Kräfteck übereinstimmende wagerechte Projektion, d. h. übereinstimmende wagerechte Seitenkraft H , gemessen durch den rechtwinkligen Abstand des Poles O von der Lastlinie EFG .

Man erkennt leicht, dass das vorstehend für drei Stangen entwickelte im Wesentlichen auch für beliebig viele, nur in den Gelenkpunkten belastete Stangen gilt; wir fassen dies unter Annahme reibungsloser Gelenke zu folgenden Sätzen zusammen:

1. Die Spannkraft einer jeden Stange fällt mit ihrer Richtung, d. h. mit der Verbindungsgeraden ihrer Gelenke zusammen.
2. An jedem Gelenkpunkte halten die Spannkkräfte der beiden benachbarten Stangen der Last des Gelenkpunktes das Gleichgewicht.
3. Die Gleichgewichtsform der Stangenverbindung ist ein zu den Lasten gezeichnetes Seileck.
4. Die Spannkkräfte irgend zweier Stangen halten den an den zwischenliegenden Gelenkpunkten angreifenden Lasten das Gleichgewicht (d. h. genügen den Bedingungen für das Gleichgewicht starrer Körper). Die Mittelkraft dieser Lasten geht durch den Schnittpunkt der beiden Spannkkräfte.

Die vorstehenden Sätze gelten auch, wenn die Gelenkpunktlasten nicht lothrecht, sondern beliebig gerichtet sind. Werden die Lasten aber ausschliesslich durch lothrechte Kräfte gebildet, so ist noch

5. die wagerechte Seitenkraft aller Spannkkräfte von der gleichen Grösse H .

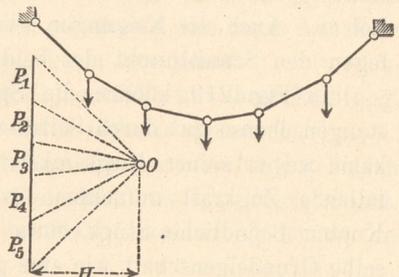
Sind nun n Stangen der Längen $l_1, l_2 \dots, n - 1$ Gelenklasten gegeben, so kann man damit unendlich viele Gleichgewichtsformen herstellen. Bei drei Stangen liess sich aus den Gleichgewichtsbedingungen nur eine Gleichung (Gl. 1, S. 177) mit den drei Unbekannten a_1, a_2, a_3 entwickeln; die beiden anderen Gleichungen waren geometrische Bedingungen. Ähnlich ist es auch bei n Stangen: Sind die Abstände a und b der Befestigungspunkte in wagerechtem und lothrechtem Sinne gegeben, so lassen sich ausser den geometrischen Bedingungen nach Art der Gl. 2 u. 3, S. 177, in derselben Weise wie bei drei Stangen noch $n - 2$ Gleichgewichtsbedingungen herleiten. Die Auflösung der Gleichungen nach den unbekanntem Winkeln $a_1, a_2 \dots$ ist aber nur durch umständliches Probiren möglich. Viel leichter wird die Aufgabe, wenn statt der gegenseitigen Lage der Befestigungspunkte zwei andere Stücke gegeben sind. Die Neigungswinkel α sind sofort bestimmt, wenn im Krafteck (Fig. 219, rechts, S. 176) die Lage des Poles gegen den Streckenzug der Lasten gegeben ist. Sind also von irgend einer Spannkraft, z. B. von S_1 , wagerechte und senkrechte Seitenkraft gegeben, so steht S_1 nach Grösse und Richtung fest und bestimmt damit den Pol O . Auch die Neigungen zweier Stäbe (d. h. ihrer Spannkkräfte) legen den Schnittpunkt der beiden Polstrahlen, d. h. den Pol fest.

In Fig. 219 können die Spannkkräfte S_1, S_2, S_3 der Gelenkstangen ebenso gut durch Seilstücke aufgenommen werden. Ein Seil kann wegen seiner Biegsamkeit nur eine in seine Längenrichtung fallende Zugkraft aufnehmen (vergl. S. 64). Das zwischen zwei Knoten befindliche Stück eines gewichtlosen Seiles hat daher dieselbe Grundeigenschaft wie eine gewichtlose und unbelastete Gelenkstange, jedoch mit der noch hinzutretenden Beschränkung, dass im Seile nur Zugkräfte möglich sind. Das Viereck $ACDB$ ist also die Gleichgewichtsform einer in den Knoten C und D belasteten Seilverbindung. Hiermit erklärt sich die S. 118 (nach dem Vorschlage von G. Lang) eingeführte Bezeichnung Seileck.

Würde im Krafteck (Fig. 219, rechts) der Pol O nach der linken Seite von EG symmetrisch verlegt, so erhielten S_1 , S_2 und S_3 dieselben Grössen wie bisher, S_1 würde dann aber im Seileck von A aus nach rechts ansteigen mit dem Anstiegswinkel α_1 gegen die Wagerechte. Das in solcher Weise zu den Lasten P und Q erhaltene Seileck würde eine Figur sein, in welcher die Knickpunkte C und D oberhalb AB liegen; S_1 , S_2 , S_3 würden wie in Fig. 213 (S. 174) Druckkräfte werden. Diese Figur ist als Gleichgewichtsform eines Seiles nicht möglich, gleichwohl hat man den Namen Seileck auch für solche Fälle beibehalten, während man eigentlich richtiger Gelenkviereck sagen würde. Ein solches Gelenkviereck aus mehr als zwei Gelenkstangen mit hochliegenden Zwischen Gelenken (nach oben gekehrten Knien), in welchen durch abwärts gerichtete Lasten Druckkräfte entstehen, ist nur in unsicherem Gleichgewichte, kann nur künstlich gehalten werden und geräth bei der geringsten Veränderung in beschleunigte Abwärtsbewegung; in Bezug auf die Ermittlung der Gleichgewichtsform und der entsprechenden Kräfte ist sonst kein Unterschied zwischen der unsicheren und der sicheren Gleichgewichtsform, ebensowenig wie zwischen Fig. 213 und 217.

Beispiel: Sechs Stangen mögen die Längen: $l_1 = 0,98$ m; $l_2 = 0,87$ m; $l_3 = 0,84$ m; $l_4 = 0,69$ m; $l_5 = 1,01$ m; $l_6 = 0,86$ m haben; die Lasten seien $P_1 = 62$ kg; $P_2 = 54$ kg; $P_3 = 44$ kg; $P_4 = 60$ kg; $P_5 = 62$ kg. Die äussersten Seiten des Seilecks mögen je unter 45° gegen die Wagerechte geneigt sein. Trägt man die Lasten zu einem Streckenzuge zusammen (im Mafsstabe $1 \text{ mm} = 10 \text{ kg}$) (Fig. 220), so wird die Gesamtlast 282 kg, und weil die äussersten Strahlen davon je um 45° abweichen, so ist der Polabstand $H = \frac{1}{2} \Sigma P = 141$ kg die wagerechte Kraft, die durch die ganze Verbindung hindurchgeht. Die Stäbe sind der Reihe nach parallel den Polstrahlen in den gegebenen Längen (im Mafsstab $1 : 100$) aufzutragen. Die Längen der Polstrahlen geben die Grösse der Spannkkräfte der parallelen Stäbe.

Fig. 220.

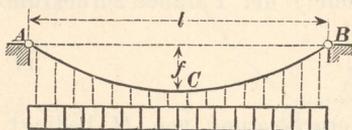


8. Kettenlinien.

Wird die Zahl der Gelenkstangen immer grösser, ihre Länge immer kleiner, so nähert sich die vieleckige Gleichgewichts-Figur immer mehr einer stetig gekrümmten Kurve. Immer aber bleiben dieselben Gesetze gültig: namentlich also fällt die Richtung der Spannkraft einer Stange mit der Richtung der Stange zusammen. Werden die einzelnen Stangen unendlich klein, so kommt man zu einer an jeder Stelle völlig biegsamen Kette oder einem biegsamen Faden mit stetiger Belastung. Die Spannkraft an irgend einer Stelle ist dann tangential gerichtet. Die Belastung der einzelnen Bogentheilchen der Kette kann überall gleich oder verschieden sein; danach wird die Gleichgewichtsform der Kette, die Kettenlinie, eine verschiedene.

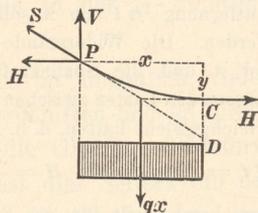
Wir betrachten zunächst den einfachen Fall, dass die Belastung sich gleichförmig über die wagerechte Projektion der Kette vertheile, dass also jede Längeneinheit (jedes Meter) dieser Projektion ein bestimmtes Gewicht q zu tragen habe. Dies können wir uns vorstellen durch einen prismatischen Belastungskörper mit dem Gewichte q für die Längeneinheit, der durch lothrechte Schnitte in unendlich viele Scheiben geschnitten ist, welche mittels gewichtloser Fäden oder Hängestangen an der selbst gewichtlosen Kette aufgehängt sind (Fig. 221).

Fig. 221.



Im tiefsten Punkte C ist die Kette und daher auch die Spannkraft H an dieser Stelle wagerecht gerichtet. Schneiden wir die Kette nochmals in einem wagerechten Abstände x von C , so ist hier, bei P (Fig. 222) eine Spannkraft S anzubringen. Die Kräfte S und H müssen nun den zwischenliegenden Lasten das Gleichgewicht halten. Die Mittelkraft dieser Lasten ist qx mit dem Abstände $\frac{1}{2}x$ von P . Die Momentengleichung in Bezug auf P liefert dann:

Fig. 222.



$0 = -Hy + \frac{1}{2}qx^2$, also:

$$1) \quad y = \frac{qx^2}{2H} \quad \text{oder} \quad x^2 = 2\left(\frac{H}{q}\right)y.$$

Die Gleichgewichtsform der Kette ist also eine Parabel mit lothrechter Achse vom Parameter $H:q$.

Für $x = \frac{1}{2} l$ wird $y = f$, daher nach Gl. 1:

$$2) \quad f = \frac{q l^2}{8 H};$$

durch Division beider Gleichungen entsteht dann:

$$3) \quad \frac{y}{f} = \frac{4 x^2}{l^2}.$$

Bemerkenswerth ist auch, dass der Schnitt der 3 Kräfte S , H und $q x$ in der Mitte der Strecke x liegt, so dass wenn man die Richtung der Tangente S bis zur Lothrechten durch C verlängert, der hier entstehende Schnittpunkt D in der Tiefe y unter C , d. h. in der Tiefe $2 y$ unter P liegt. Dies ist eine kennzeichnende Eigenschaft der Parabel.

Die wagerechte Seitenkraft oder Projektion von S ist $= H$, die lothrechte $V = q x$.

Zu einer gegebenen Last q sind unendlich viele parabolische Kettenlinien möglich, je nachdem H grösser oder kleiner gewählt wird. Es lässt sich diese bestimmende Grösse aber auf die Pfeilhöhe f der Parabel zurückführen; denn aus Gl. 2 folgt:

$$4) \quad H = \frac{q l^2}{8 f}.$$

Vergrößerung von H bedingt also Verkleinerung der Pfeilhöhe f , und umgekehrt. Der Parameter $\frac{H}{q}$ kann also auch $\frac{l^2}{8 f}$ geschrieben werden.

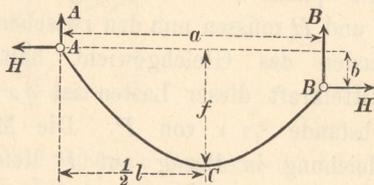
Liegen die Befestigungspunkte A und B in einem wagerechten Abstände a , liegt aber B um b tiefer als A , so liegt der tiefste Punkt C nicht in der Mitte (Fig. 223). Seine wagerechte Entfernung $\frac{1}{2} l$ von A soll berechnet werden. Die Widerstände A und H bei A und die Spannkraft H bei C müssen den Lasten zwischen A und C das Gleichgewicht halten, d. h. $A = \frac{1}{2} q l$;

$$H f = \frac{1}{8} q l^2 \text{ also } H = \frac{q l^2}{8 f}.$$

Entsprechendes gilt für das Stück rechts von C , wo statt $\frac{1}{2} l$ zu setzen ist

$$a - \frac{1}{2} l, \text{ statt } f \text{ aber } f - b. \quad \text{Mithin } H = \frac{q}{8} \frac{(2 a - l)^2}{f - b}.$$

Fig. 223.



Die beiden Werthe H sind aber, wie bei jeder lothrecht belasteten Stangenverbindung, dieselben, mithin

$$\frac{(2\alpha - l)^2}{l^2} = \frac{f - b}{f} = 1 - \frac{b}{f}$$

$$\text{oder } \frac{b}{f} = 1 - \frac{(2\alpha - l)^2}{l^2} = \frac{-4\alpha^2 + 4\alpha l}{l^2}.$$

Weil aber $f = \frac{gl^2}{8H}$, so wird $\frac{b}{f} = \frac{8bH}{ql^2} = \frac{4\alpha l - 4\alpha^2}{l^2}$

$$\text{oder } \alpha(l - \alpha) = \frac{2bH}{q}$$

$$\text{und } l = \alpha + \frac{2b}{a} \frac{H}{q} \quad \text{oder} \quad \frac{l}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{b}{a} \frac{H}{q}.$$

Wichtig ist auch die Gleichung der parabolischen Kettenlinie, bezogen auf den Anfangspunkt A . Man kann dieselbe entwickeln, indem man von der Gl. 1 (S. 181) ausgeht, kann sie aber ebenso leicht unmittelbar ableiten: Im Punkte A (Fig. 221 und 224) wirken die Widerstände

$$A = \frac{1}{2} ql \quad \text{und} \quad H = \frac{ql^2}{8f},$$

und in Bezug auf den Punkt P gilt die Momentengleichung:

$$0 = \frac{1}{2} qlx - Hy - \frac{1}{2} qx^2, \quad \text{oder}$$

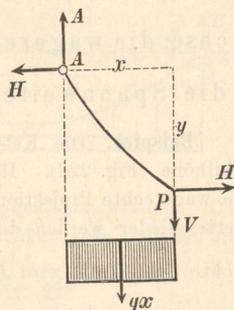
$$5) \quad y = \frac{q}{2H} x(l - x) = \frac{4f}{l^2} x(l - x).$$

Dies ist also eine andere Form der Gleichung einer Parabel vom Parameter $\frac{H}{q} = \frac{l^2}{8f}$.

Auch künftig werden wir öfter auf eine Gleichung der Form $y = Cx(l - x)$ kommen; diese bedeutet stets eine Parabel, deren Achse parallel der y -Achse und welche die in der x -Richtung liegende Sehne l symmetrisch überspannt.

Ist der prismatische Lastkörper nicht an unendlich vielen Stellen, sondern nur an einzelnen Stellen zerschnitten und an diesen Stellen mit der Kette verbunden, so wird die Gleichgewichtsform wieder ein Vieleck, ein Seileck, und zwar ist dies Seileck ein der Parabel (Gl. 5) eingeschriebenes Vieleck. Durchschneidet man (Fig. 225) die Stangenverbindung im Gelenkpunkte P (der Koordinaten x und y), so müssen die hier auftretenden Spannkkräfte H

Fig. 224.



und V nebst den in A auftretenden Widerständen $A = \frac{1}{2} ql$ und H wieder den zwischenliegenden Lasten qx das Gleichgewicht halten. Es entsteht dann ganz dieselbe Momentengleichung wie auf S. 183, und für irgend einen Knotenpunkt P gilt die Gl. 5. Liegen nämlich die Befestigungspunkte A und B in gleicher Höhe und in dem Abstände l , so ergibt sich leicht, dass $A = B = \frac{1}{2} ql$ sein muss, wie auch die Schnittstellen liegen mögen. Also:

Ist eine Stangenverbindung derartig belastet, dass die Last sich gleichförmig über die wagerechte Projektion vertheilt, aber nur in einzelnen, den Theillinien der Last entsprechenden Gelenkpunkten auf die Stangenverbindung übertragen wird, so ist die Gleichgewichtsform ein Sehnenvieleck einer Parabel mit lothrechter Achse; die wagerechte Spannkraft beträgt $H = \frac{ql^2}{8f}$, wenn l die Spannweite, f die Pfeilhöhe der Parabel.

Beispiel: Die Kette einer Hängebrücke habe 40 m Spannweite und 5 m Pfeilhöhe (Fig. 226). Ihre Belastung vertheile sich nahezu gleichmässig über die wagerechte Projektion und betrage $q = 1000$ kg für das Meter Länge. Die Kettenglieder werden demnach einer Parabel eingeschrieben sein. Die wagerechte Spannkraft wird $H = \frac{ql^2}{8f} = \frac{1000 \cdot 40 \cdot 40}{8 \cdot 5} = 40\,000$ kg. Die ganze

Spannweite sei durch Hängestangen in 8 gleiche Fache von je 5 m Länge getheilt. Dann hat jede Stange das Gewicht zweier halben Fache = 5000 kg auf die Kette zu übertragen. Da 7 mittlere Knotenpunkte vorhanden sind, so kann man das entsprechende

Krafteck zeichnen, indem man die 7 Lasten von je 5000 kg auf einer Lothrechten aufträgt (5000 kg = 2 $\frac{1}{2}$ mm). Der Mitte der Lasten gegenüber

Fig. 225.

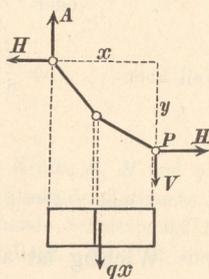
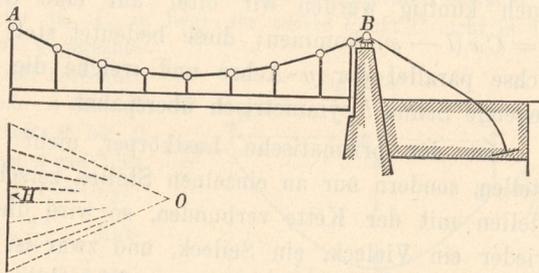


Fig. 226.



wählt man in einem Abstände $H = 40\,000 \text{ kg} = 20 \text{ m}$ den Pol O . Die Polstrahlen nach den Theilpunkten der Lastlinie geben dann Richtung und Grösse der Spannkraften der einzelnen Stäbe. Ein Punkt P der Kette in einem Abstände $x = \frac{1}{4}l$ von der Mitte hat eine Höhe y über dem Scheitel C (nach Gl. 3): $y = f \cdot 4x^2 : l^2 = f \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \text{ m}$. Würde man die Aufhängepunkte A und B an den Pfeilern befestigen, so würden diese einen Druck $A = B = \frac{1}{2}ql$ nach unten, zugleich aber eine nach innen gerichtete wagerechte Kraft $H = 40\,000 \text{ kg}$ erfahren. Letzterer würde ein hoher Pfeiler nicht leicht widerstehen können, daher führt man die Kette jenseits des Pfeilers fort und verankert sie in tiefer liegendem Mauerwerke, so dass der Pfeiler im Wesentlichen nur lothrechten Druck erfährt. Die Breite der Pfeiler macht es unmöglich, die Endpunkte A und B als Aufhängepunkte der Last zu benutzen. Die hierdurch veranlasste Abweichung ist auf der rechten Seite, bei B , berücksichtigt (auch im Krafteck), während auf der linken, bei A , der ideale Zustand beibehalten wurde.

Die nach aussen gerichtete Kraft H kann auf die beiden Punkte A und B auch durch eine steife gerade Verbindungsstange ausgeübt werden, welche diese Kraft H als Druckkraft auszuhalten hat (Fig. 227). Als dann brauchen die Stützen nur noch lothrecht aufwärts gerichtete Widerstände A und B zu leisten. Die Fahrbahn, welche bei Hängebrücken unter der Kette sich befindet, kann nun auch in Höhe der Stange AB gelegt und durch Druckstangen auf die Gelenke der Kette gestützt werden. Das Sehnenvieleck der Parabel bleibt aber nur im Gleichgewichte, solange die Last gleichförmig vertheilt ist. Kommt eine fremde Last hinzu, so wird die Stangenverbindung eine Verrückung erfahren; es treten Schwankungen ein, die bei Kettenbrücken bekannt sind, und erst nach längerer Zeit kann sich ein neuer Gleichgewichtszustand bilden, wenn keine fernere Änderung der Last erfolgt. Diese Bewegungen kann man mehr oder weniger verhindern, indem man die einzelnen, in Fig. 228 befindlichen Trapeze durch Einfügung je einer Diagonale oder Strebe zu geometrisch bestimmten Figuren umwandelt. Auf diese Weise entsteht ein parabolischer Fachwerkträger. Dreht man die Figur um eine wagerechte Achse, bis das parabolische Vieleck oberhalb der Sehne AB liegt, so hat man einen entsprechenden Träger. Die Stäbe des Vielecks erfahren dann Druck, die Sehne AB aber Zug. (S. A. Ritter, Techn. Mechanik, 2. Aufl., S. 244.) — Theilung und Aufhängung der Last nach Fig. 221 bedingt (nach Fig. 222) ein der Parabel umschriebenes Seileck.

Fig. 227.

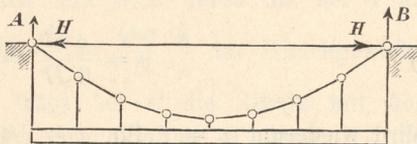
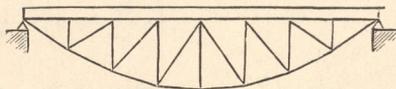


Fig. 228.



ein neuer Gleichgewichtszustand bilden, wenn keine fernere Änderung der Last erfolgt. Diese Bewegungen kann man mehr oder weniger verhindern, indem man die einzelnen, in Fig. 228 befindlichen Trapeze durch Einfügung je einer Diagonale oder Strebe zu geometrisch bestimmten Figuren umwandelt. Auf diese Weise entsteht ein parabolischer Fachwerkträger. Dreht man die Figur um eine wagerechte Achse, bis das parabolische Vieleck oberhalb der Sehne AB liegt, so hat man einen entsprechenden Träger. Die Stäbe des Vielecks erfahren dann Druck, die Sehne AB aber Zug. (S. A. Ritter, Techn. Mechanik, 2. Aufl., S. 244.) — Theilung und Aufhängung der Last nach Fig. 221 bedingt (nach Fig. 222) ein der Parabel umschriebenes Seileck.

Kettenlinie für gleichförmig veränderte Belastung. Besteht der Belastungskörper aus zwei symmetrischen Keilen (Fig. 229), so ist die Belastung q der Längeneinheit veränderlich, nämlich

$$q = q_1 \frac{x}{1/2 l},$$

wenn q_1 die Einheitsbelastung an den äusseren Enden ist. Zwischen C und P befindet sich dann eine Gesamtlast $1/2 q x$ mit dem Hebelarm $1/3 x$

in Bezug auf P . Daraus folgt die Momentengleichung

$$0 = Hy - \frac{qx}{2} \cdot \frac{x}{3}$$

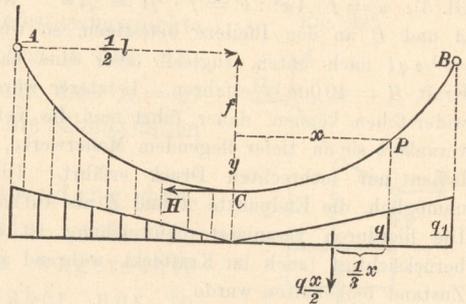
$$6) \quad y = \frac{qx^2}{6H} = \frac{q_1 x^3}{3Hl}.$$

Wird wiederum $y = f$ für $x = 1/2 l$, so ergibt sich auch leicht

$$7) \quad y : f = 8 x^3 : l^3.$$

Die Kettenlinie bildet also von C bis B einen Zweig einer kubischen Parabel; CA ist dazu symmetrisch.

Fig. 229.



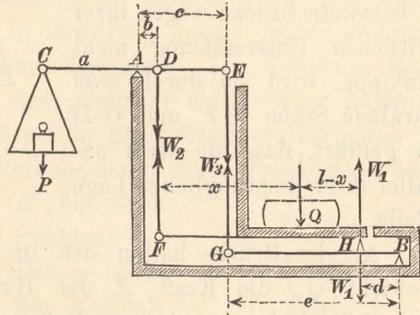
9. Brücken- und Tafelwaagen.

Bei den auf S. 152 behandelten Hebelwaagen wurde die Belastung einer Waagschale mittels Hängeketten auf einen bestimmten Punkt des Waagebalkens übertragen. Die dem Aufbringen der Last unter Umständen hinderlichen Ketten lassen sich entbehren, man kann für die Last eine freie Brücke oder Tafel schaffen und durch Anwendung geeigneter Stangenverbindungen erreichen, dass die Last an jede beliebige Stelle der Brücke oder Tafel gelegt werden darf, ohne das Ergebnis der Wägung zu beeinflussen.

Brückenwaage des Strassburger Mechanikers Quintenz (1821).

(Fig. 230.) Das Ganze hat 2 feste Drehpunkte A und B . Die Stange EG , welche in der Figur den Brückenbalken FH schneidet, geht in Wirklichkeit ungehindert daran vorbei, weil FH im Grundrisse aus 2 Theilen besteht. Die Last Q wird mittels des Brückenbalkens FH von zwei Kräften W_1 und W_2 im Gleichgewichte gehalten, u. zw. ist $W_1 = Qx : l$; $W_2 = Q - Qx : l$, wenn l die Länge des Balkens ist. W_2 wird mittels der Zugstange FD

Fig. 230.



auf den oberen Hebel CAE übertragen. W_1 drückt auf den untersten Hebel BG nach unten und wird durch die bei G angreifende Spannkraft $W_3 = W_1 \frac{d}{e} = \frac{Qx}{l} \frac{d}{e}$ im Gleichgewichte gehalten. Der oberste Hebel trägt bei C die Schale mit dem Gewichtsstücke P , welches den Spannkraften W_2 und W_3 das Gleichgewicht halten muss. Also

$$Pa = W_2 b + W_3 c = \left(Q - Q \frac{x}{l} \right) b + \frac{Qx}{l} \frac{d}{e} c,$$

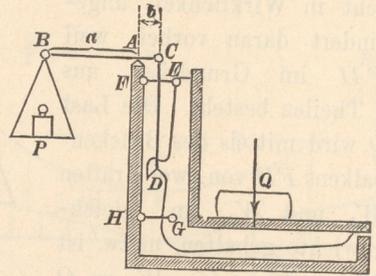
oder

$$Pa = Qb - Q \frac{x}{l} \left(b - \frac{d}{e} c \right).$$

Damit nun die Lage der Last auf der Brücke gleichgültig sei, muss in der letzten Gleichung das mit x behaftete Glied verschwinden, es muss $b = \frac{d}{e} c$ oder $b : c = d : e$ sein; d. h. die rechte Seite ADE des obersten Hebels muss mit dem untersten Hebel BG in gleichem Verhältnisse getheilt sein. Dann ist $Pa = Qb$, d. h. die Anwendung der Stangen und Hebel bewirkt, dass es für den obersten Hebel so ist, als ob die Last Q unmittelbar bei D hinge. Macht man dann noch $a = 10 b$, so hat man eine sog. Decimalwaage.

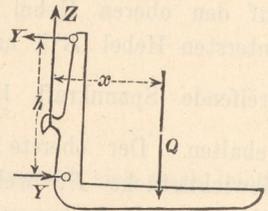
Brückenwaage von George (Paris), 1840. Die Brücke (Fig. 231) wird von einem L-förmigen Rahmen getragen. Dieser hängt im Punkte D mittels einer Hängestange DC an dem oberen Hebel CAB . Damit die durch Q belastete Brücke wegen ihrer seitlichen Unterstützung nicht umkippe, wird sie durch zwei parallele Stäbe EF und GH so geführt, dass sie stets parallel ihrer ursprünglichen Lage bleibt.

Fig. 231.



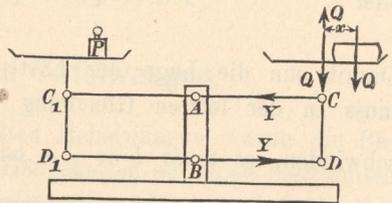
An der Brücke halten sich im Gleichgewichte (Fig. 232) das Gewicht Q , die Kraft Z der Hängestange und die Kräfte Y und Y der Führungsstangen. Daher muss $Yh = Qx$ sein und, was die Hauptsache, $Z = Q$, d. h. die Zugstange CD überträgt auf den obersten Hebel einfach die Last Q . Eine Verschiebung der Last beeinflusst nur die Kraft in den Führungsstangen; es wird also wieder $Pa = Qb$.

Fig. 232.



Tafelwaage. Auf demselben Grundgedanken beruhen die Tafelwaagen, welche einfach auf jeden Tisch gestellt werden können und bei denen die Schalen oben frei liegen (Fig. 233). Auch hier kann die Last an jede Stelle der Schale gelegt werden. In der Linie CD fügt man zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte Q hinzu, dann wirkt die abwärts gerichtete dieser beiden niederdrückend auf die parallelen Hebel $CA C_1$ und DBD_1 , während das ausserdem wirkende Moment Qx von den in der Längsrichtung dieser Hebel auftretenden, von den festen Drehpunkten A und B aufzunehmenden Kräften Y aufgehoben wird. Die Waage wirkt also wie eine gleich-armige Balkenwaage. Wagerechter Stand bedingt Gleichheit zwischen Last Q und Gewichtstück P .

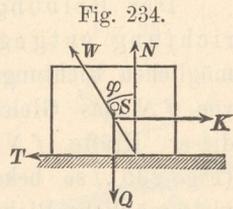
Fig. 233.



10. Reibung.

a) Reibungsziffer, Reibungswinkel und Reibungskegel.

Bisher haben wir die Körper als vollkommen glatt angenommen, wobei sie in Folge einfacher Berührung nur Normalkräfte auf einander ausüben konnten. Wäre dies wirklich der Fall, so würde ein Körper auf wagerechter Ebene, einmal in Bewegung gesetzt, seine Bewegung stets mit derselben Geschwindigkeit fortsetzen. Die Erfahrung lehrt aber, dass dies nicht zutrifft, dass vielmehr eine gewisse Zugkraft K erforderlich ist, um den Körper in gleichförmiger Bewegung zu erhalten. Daraus folgt das Vorhandensein eines Tangential- oder Reibungswiderstandes $T = K$ (Fig. 234). Die Reibung ist eine Folge der Rauheit der Oberflächen der Körper. Ihre Grösse ist in erster Linie von der Grösse des Normaldruckes N abhängig, und man nennt das Verhältnis $T : N = f$ (frictio) die Reibungsziffer oder den Reibungs-Koeffizienten.



Ergiebt sich, dass zum gleichmässigen Fortziehen eines 62 kg schweren Schlittens auf einer wagerechten Eisfläche eine wagerechte Zugkraft $K = 2$ kg erforderlich ist, so beträgt die Reibungsziffer $f = \frac{T}{N} = \frac{K}{Q} = \frac{2}{62} = \frac{1}{31}$.

Die Reibungsziffer zweier Körper hängt wesentlich von der Beschaffenheit der Berührungsflächen ab, also von der Natur der Körper, von der Art der Bearbeitung und der etwaigen Schmierung.

Daneben hat auch die Geschwindigkeit der Gleitbewegung einen Einfluss auf die Reibung. Beim Übergange aus der Ruhe in die Bewegung ist die Reibung am grössten und nimmt mit wachsender Geschwindigkeit ab. Auch von der Grösse des auf die Flächeneinheit kommenden Druckes hängt die Reibungsziffer ab. Bei sehr kleinem Einheitsdruck, also verhältnismässig grosser Berührungsfläche ist die Reibungsziffer gross, mit zunehmendem Einheitsdrucke nimmt sie anfänglich ab, dann aber wieder zu, wie durch Versuche erkannt wurde.

Diese Abhängigkeit von der Geschwindigkeit und der Grösse des Einheitsdruckes ist aber nur erst für einige Sonderfälle näher festgestellt. Im Allgemeinen müssen wir daher f als nur abhängig von der Beschaffenheit der Berührungsflächen behandeln, und voraussetzen, dass die entsprechende Zahl durch

Versuche, deren Umstände dem zu behandelnden Falle möglichst ähnlich sind, ermittelt wurde.

Gleitet ein Körper auf fester Fläche, so besteht die Einwirkung der letzteren auf den Körper in dem Normalwiderstande N und dem Tangentialwiderstande $T = fN$. Die Mittelkraft W beider heisst der Gesamtwiderstand der festen Fläche und schliesst mit der Normalen N einen Winkel φ ein, für den

$$\operatorname{tg} \varphi = T : N = fN : N = f, \text{ d. h.}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = f.$$

Wegen der festen Beziehung zwischen φ und f nennt man φ den Reibungswinkel.

Der Reibungswiderstand ist stets der Bewegungsrichtung entgegengesetzt. Da nun die Gleitbewegung alle möglichen Richtungen in der Berührungsebene haben kann, so gilt von fN das Gleiche. Setzt man jede dieser Kräfte fN mit N zusammen (Fig. 235), so bekommt man unendlich viele mögliche Richtungen von W , welche eine Kegelfläche mit der Achse N bilden, den sog. Reibungskegel.

Der Reibungskegel ist eine Kegelfläche, deren Spitze im Angriffspunkte von N , deren Achse in der Richtungslinie von N liegt und deren Seiten mit der Achse den Reibungswinkel φ einschliessen. Gleitet ein Körper auf einer festen Fläche, so leistet diese einen Gesamtwiderstand W , der in der Mantelfläche des Reibungskegels liegt.

Die von der Rauigkeit der Körper herrührende Reibung ist nun aber eine Widerstandskraft, welche die relative Gleitbewegung an der Fläche wohl hindern oder verzögern, niemals aber eine solche hervorbringen oder beschleunigen kann. Liegt z. B. (Fig. 236) ein Körper vom Gewichte $Q = 100 \text{ kg}$ auf wagerechter Ebene und ist $f = 0,3$, so ist zum gleichmässigen Fortziehen des Körpers (etwa mittels eines wagerecht gespannten Seiles) eine Kraft $K = 30 \text{ kg}$ erforderlich. Diese Kräfte werden auch an dem Körper noch im Gleichgewichte sein, wenn die Geschwindigkeit desselben zu Null wird.

Fig. 235.

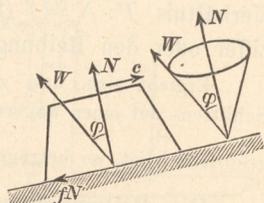
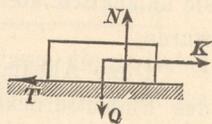


Fig. 236.



Zieht man aber an dem ruhenden Körper mit einer Kraft $K < 30 \text{ kg}$, vielleicht nur mit einer Kraft von 10 kg , so wird nicht etwa der Reibungswiderstand T das Übergewicht über $K = 10 \text{ kg}$ gewinnen und den Körper beschleunigt nach links bewegen, denn der Reibungswiderstand einer Fläche kann eine Gleitbewegung an derselben nicht erzeugen, vielmehr wird nun die Widerstandskraft T nur $= K = 10 \text{ kg}$ werden. Und lässt man K zu Null werden, so wird auch $T = 0$.

Ist also ein Körper auf einer festen Fläche in Ruhe, so hat der Reibungswiderstand T im Allgemeinen nicht den Werth fN , sondern er ist dann $\leq fN$, er tritt nur in derjenigen Grösse auf, die erforderlich ist, um den Ruhezustand zu erhalten. Dann ist aber auch der Winkel β zwischen W und $N \leq \varphi$, und die Richtungslinie von W liegt nicht in der Mantelfläche, sondern im Allgemeinen im Innern des Reibungskegels.

Soll ein Körper sich auf einer festen Ebene gleichmässig und geradlinig verschieben, wobei der Gesamtwiderstand W in der Mantelfläche des Reibungskegels liegt, so müssen die ausser W noch vorhandenen Kräfte eine Mittelkraft R liefern, welche mit der Kraft W im Gleichgewicht ist, also ebenfalls in der Mantelfläche des Reibungskegels liegt (Fig. 237).

Soll der Körper aber auf der festen Fläche in relativer Ruhe verbleiben, wobei W im Allgemeinen im Innern des Reibungskegels liegt (Fig. 238), so muss auch R eine solche Richtung und Lage haben. Liegt beim ruhenden Körper R auf der Mantelfläche des Reibungskegels, so genügen die Kräfte sowohl der Bedingung für die Ruhe als auch derjenigen für die Bewegung. Es befindet sich dann der Körper im Grenzzustande der Ruhe. Wird er in richtiger Weise (etwa durch einen Stoss) in Bewegung gesetzt, so verbleibt er auch in dieser.

Der Gesamtwiderstand W kann nur innerhalb des Bereiches der Unterstutzungsfläche (s. S. 166) angreifen. Durch diese Unterstutzungsfläche muss daher auch R hindurchgehen; andernfalls würde der Körper umkippen (Fig. 239)

Fig. 237.

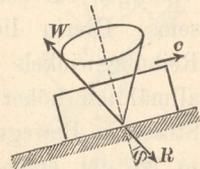


Fig. 237.

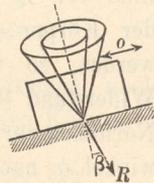
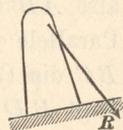


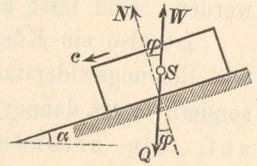
Fig. 239.



b) Schiefe Ebene.

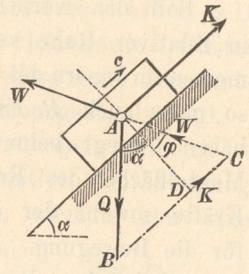
Ist die Unterstüzungsebene des Körpers unter dem Winkel α gegen die Wagerechte geneigt und hat man diesen Winkel so geregelt, dass der Körper unter alleiniger Wirkung der Schwere eine gleichmässige, geradlinige Abwärtsverschiebung ausführt, wobei der Gesamtwiderstand W in der Richtung aufwärts von N um den vollen Reibungswinkel φ abweicht, so muss die einzige bewegende Kraft, die Schwere Q des Körpers, das Entgegengesetzte von W sein (Fig. 240). Da aber die Lothrechte mit der Rechtwinkligen zur schiefen Ebene den Winkel α bildet, so muss $\alpha = \varphi$ sein. Hierin liegt das einfachste Mittel zur Bestimmung des Reibungswinkels φ durch Versuche: Hebt man die schiefe Ebene allmählich höher an, bis der darauf liegende Körper, durch kleine Stösse in Bewegung gebracht, die Bewegung gleichförmig fortsetzt, so ist der entsprechende Neigungswinkel α gleich dem Reibungswinkel φ für die beiden Stoffe, aus denen Körper und Bahn bestehen.

Fig. 240.



Es möge nun auf den Körper vom Gewichte Q noch eine, parallel zur schiefen Ebene, aufwärts gerichtete Zugkraft K wirken (Fig. 241). K möge sich mit der Richtungslinie von Q im Punkte A schneiden. Soll der Körper gleichförmig aufwärts gezogen werden, so übt die Ebene auf ihn einen Widerstand W aus, der von der (punktirten) Normalen zur Ebene um den vollen Reibungswinkel φ nach unten abweicht. Diese drei Kräfte Q , K und W müssen sich nun im Gleichgewichte halten, d. h. sie müssen sich in dem Punkte A schneiden und ausserdem ein geschlossenes Krafteck bilden. Man trage also AB als Q auf, verlängere W nach unten, ziehe durch B eine Parallele zu K , d. h. zur Ebene, so ist ABC das Krafteck und BC die Grösse K . Ohne Reibung wäre $W = N = DA$, mithin zeigt BD denjenigen Betrag, den K auf reibungsloser Ebene haben müsste ($= Q \sin \alpha$), während DC wegen der Reibung hinzukommt. Da nun der Winkel $BAC = \alpha + \varphi$, $\sphericalangle BCA$ aber $= 90^\circ - \varphi$,

Fig. 241.



so wird nach dem Sinus-Satze $K : Q = \sin(\alpha + \varphi) : \sin(90^\circ - \varphi)$,
oder:

1)
$$K : Q = \sin(\alpha + \varphi) : \cos \varphi,$$

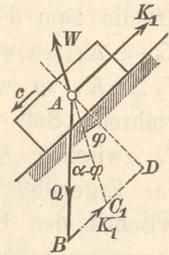
oder auch, bequemer für die Rechnung:

2)
$$K : Q = \sin \alpha + f \cos \alpha,$$

wenn man $\sin \varphi : \cos \varphi = \operatorname{tg} \varphi$ mit f vertauscht.

Soll aber der Körper nicht hinauf gezogen, sondern durch die aufwärts gerichtete Kraft, die nun K_1 genannt werden möge, etwa an einem Seile, gleichmässig hinabgelassen werden, so kehrt sich, wegen der entgegengesetzten Bewegung, die Reibung um, und der Widerstand W rückt in die zum ersten Falle symmetrische Lage, indem er von der Normalen nach oben hin abweicht. Die erforderliche Kraft K_1 wird nun durch das erheblich kleinere Stück BC_1 dargestellt.

Fig. 242.



$\sphericalangle BAC_1 = \alpha - \varphi; \sphericalangle BC_1A = 90^\circ + \varphi,$

mithin

3)
$$K_1 : Q = \sin(\alpha - \varphi) : \sin(90^\circ + \varphi)$$

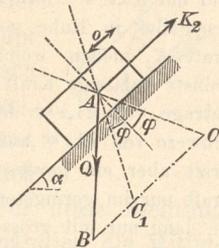
$$= \sin(\alpha - \varphi) : \cos \varphi$$

4)
$$= \sin \alpha - f \cos \alpha.$$

(Für $\varphi > \alpha$ müsste K_1 abwärts gerichtet sein.)

Soll die Kraft K aber den Körper weder hinaufziehen, noch hinunterlassen, soll sie vielmehr den in Ruhe befindlichen Körper in Ruhe erhalten, so hat man zur Bestimmung ihrer Grösse K_2 zu beachten, dass im Ruhezustande der Widerstand W irgend eine Richtung innerhalb des Reibungskegels, also hier innerhalb des doppelten Reibungswinkels einnehmen kann (Fig. 243), dass daher der Endpunkt der Kraft K_2 im Krafteck irgendwo zwischen C_1 und C liegen muss, so dass

Fig. 243.



$$K_2 \geq K_1 \text{ und zugleich } K_2 \leq K$$

sein muss, innerhalb dieser Grenzen aber völlig willkürlich gewählt werden kann.

Man kann diese Ergebnisse zusammenfassen in die einzige Gleichung:

$$5) \quad K = Q (\sin \alpha \pm f \cos \alpha).$$

Darin bezeichnet das obere Vorzeichen die grössere, zum Hinaufziehen erforderliche Zugkraft, welche neben der Seitenkraft der Schwere ($Q \sin \alpha$) noch die Reibung ($fQ \cos \alpha$) überwinden muss; das untere Vorzeichen die kleinere, zum Hinablassen erforderliche Kraft. Der Einfluss der entgegengesetzten Bewegung macht sich in der Formel durch Umkehrung der Vorzeichen von φ oder f geltend, wie auch in allen späteren Fällen sich zeigen wird. Diese beiden Werthe K und K_1 bilden dann zugleich die Grenzen für die zum Festhalten erforderliche Kraft K_2 . Wäre nämlich $K_2 < K_1$, so würde der Körper beschleunigt abwärts gleiten, wäre $K_2 > K$, so würde der Körper eine Beschleunigung nach oben erfahren. Soll weder das Eine, noch das Andere erfolgen, so muss K_2 zwischen K_1 und K bleiben, ist im übrigen aber beliebig. Das Ergebnis, dass die für den Ruhezustand erforderliche Kraft zwischen den beiden, für die abwärts, bezw. aufwärts gerichtete Bewegung erforderlichen Kräften bleiben muss, gilt auch für alle anderen im Nachstehenden behandelten Fälle dieser Art.

Beispiel: Eine Holzkiste von 100 kg Gewicht soll auf einer unter 45° geneigten Ebene mittels eines, parallel mit der Ebene gespannten Seiles aufwärts gezogen werden. Die Reibungsziffer betrage unter der Annahme einer hölzernen Bahn $f = 0,3$, entsprechend einem Reibungswinkel $\varphi = 17^\circ$. Für $\alpha = 45^\circ$ ist $\sin \alpha = \cos \alpha = \sqrt{1/2} = 0,707$. Mithin (Gl. 5)

$$K = 100 \cdot 0,707 (1 \pm 0,3) = 70,7 \pm 21,2 = 91,9 \text{ kg bezw. } 49,5 \text{ kg.}$$

Darin ist 70,7 der zur Überwindung der schräg abwärts gerichteten Seitenkraft der Schwere erforderliche Theil, 21,2 der Reibungswiderstand. Zum Hinaufziehen muss an dem Seile mit 91,9 kg gezogen werden, zum Hinablassen sind nur 49,5 kg erforderlich. Ist die Kiste in Ruhe und soll sie auch mittels des Seiles in Ruhe gehalten werden, so muss man an dem Seile mit einer Kraft K_2 ziehen, welche zwischen 49,5 und 91,9 kg liegt. Übt man nun die kleinste zulässige Kraft von 49,5 kg aus, so muss die Reibung mit ihrem vollen Betrage von 21,2 kg dem Arbeiter zu Hülfe kommen, um die Seitenkraft der Schwere von 70,7 kg aufzuheben. Es erfordert diese Verwendung der kleinsten Kraft aber ein gewisses Maf von Aufmerksamkeit; denn lässt die ausgeübte Kraft nur im geringsten nach, so erfolgt eine beschleunigte Abwärtsbewegung, die dann nur mit grösserer Anstrengung wieder aufzuheben ist. Übt man an dem Seile, der Sicherheit wegen, eine grössere Kraft aus als 49,5 kg, so ändert sich dadurch in dem sichtbaren Ruhezustande nichts; die Reibung tritt dann nur mit entsprechend geringerem Betrage auf. Hat die Spannkraft den Werth

70,7 kg, so kommt gar keine Reibung zur Wirkung, denn diese tritt im Ruhezustande stets nur in derjenigen Grösse auf, die nöthig ist, um das Gleiten zu verhindern. In diesem Falle würde auch bei völlig glatten Körpern kein Gleiten eintreten. Wächst die Spannkraft über 70,7 kg hinaus, so würde bei glatten Körpern schon ein beschleunigtes Gleiten nach oben eintreten; in Wirklichkeit wird der Überschuss einstweilen noch durch Reibung vernichtet, die nun aber sich nach unten richtet und der Schwere zu Hülfe kommt. Bei 91,9 kg Kraft nimmt diese Reibung den grössten möglichen Werth an. Würde der Körper nun durch einen kleinen Anstoss nach oben in Bewegung gesetzt, so würde er diese Bewegung auch fortsetzen. Erschütterungen können den Eingriff der Unebenheiten der Körper zeitweise aufheben oder vermindern und deshalb auch die Reibung theilweise aufheben.

Ist die Zugkraft K nicht parallel der Ebene, sondern weicht sie von der Normalen zur Ebene um einen Winkel β ab, so verfährt man im Übrigen wie oben. K und Q mögen sich in A schneiden. Von A aus trage man $Q = AB$ auf, zeichne W wie in Fig. 241, ziehe $BC \parallel K$, so ist $BC = K$ für die Aufwärtsbewegung. Und zwar ist

$$6) \quad K : Q = \sin(\alpha + \varphi) : \sin(\beta - \varphi).$$

Für gleichförmige Abwärtsbewegung ist wiederum nur $+\varphi$ mit $-\varphi$ und umgekehrt zu vertauschen, also

$$7) \quad K_1 : Q = \sin(\alpha - \varphi) : \sin(\beta + \varphi).$$

Für Ruhezustand ist erforderlich, dass K_2 zwischen K_1 und K verbleibe.

Denkt man sich die Richtung der Zugkraft K , etwa des Zugseiles, veränderlich, so ändert sich auch die Grösse von K .

In dem Dreieck ABC (Fig. 244) wird $K = BC$ offenbar am kleinsten, wenn BC rechtwinklig zu AC ist, wenn also $\sphericalangle ACB = \beta - \varphi = 90^\circ$, oder $\beta = 90^\circ + \varphi$; es weicht dann die Kraft K von der Parallelen zur Ebene um den Reibungswinkel nach oben hin ab, und ist (Fig. 245) $K_{min} = Q \sin(\alpha + \varphi)$. Dagegen wird $K = BC$ (Fig. 244) immer grösser, wenn der Winkel ACB abnimmt; ist endlich

$BC \parallel W$, d. h. $\beta = \varphi$, so wird $K = \infty$. Für diese Richtung einer zunächst endlich gedachten Kraft K fällt nämlich die Mittelkraft R aus K und Q in das Innere des Reibungskegels, wobei eine gleichförmige Gleitbewegung nicht möglich ist. Nur für

Fig. 244.

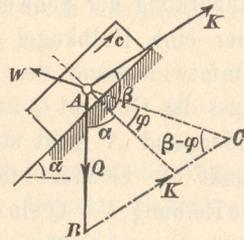
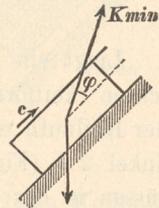


Fig. 245.



$K = \infty$ würde Q gegen K verschwinden und R mit K und W zusammenfallen.

Ist K wagerecht, so wird $\beta = 90^\circ - \alpha$. Dieser einfache Fall ist aber ebenso leicht unmittelbar zu entwickeln wie aus Gl. 6. Es ist (Fig. 246)

$$K : Q = \operatorname{tg}(\alpha + \varphi).$$

Schreibt man

$$8) \quad K = Q \operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi),$$

so hat man in dem kleineren Werthe wieder K_1 zum Hinablassen, und in K und K_1 die Grenzen für den Ruhezustand.

Halbkugel auf schiefer Ebene. Eine Kugel kann unter alleiniger Einwirkung der Schwere auf schiefer Ebene nicht in Ruhe sein, wohl aber eine Halbkugel (Fig. 247). Der Gesamtwiderstand des Berührungspunktes A muss das Gewicht Q aufheben. Der Normalwiderstand N geht stets durch den Mittelpunkt O . Es muss stattfinden $N = Q \cos \alpha$, die Reibung $T = Q \sin \alpha$, und in Bezug auf O :

$$0 = + Tr - Q \cdot \overline{SO} \sin \vartheta,$$

mithin, weil nach S. 136 $\overline{SO} = \frac{3}{8} r$:

$$\sin \vartheta = \frac{8}{3} \sin \alpha.$$

Die Grenzbedingungen für die Ruhe sind $\sin \alpha \leq \frac{3}{8}$, weil ϑ höchstens $= 90^\circ$ werden kann, und ausserdem $\alpha \leq \varphi$, weil die Halbkugel sonst ins Gleiten kommt.

Fig. 246.

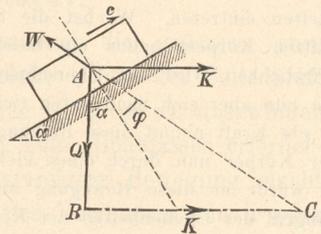
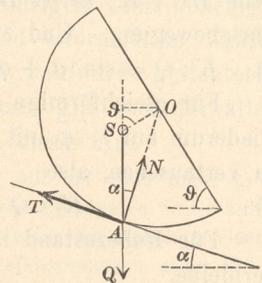


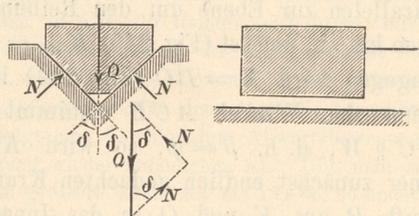
Fig. 247.



c) Bewegung in Keilnuthen.

Liegt ein Körper, statt auf wagerechter Ebene, in einer wagerechten keilförmigen Rinne oder Keilnuth mit dem Keilwinkel 2δ (Figur 248), so müssen in der Querschnittsebene die Gegendrücke N der Seitenflächen dem Gewichte Q das Gleichgewicht halten. Es wird

Fig. 248.



$$Q = 2 N \sin \delta \quad \text{oder} \quad 2 N = Q : \sin \delta.$$

Der Bewegung setzt sich an jeder Seitenfläche ein Reibungswiderstand fN entgegen, so dass die erforderliche Zugkraft wird

$$9) \quad K = 2fN = \frac{Qf}{\sin \delta}.$$

Das keilartige Einpressen des Körpers in die Nuth hat im Vergleich mit der Bewegung auf ebener Fläche denselben Einfluss, als wäre die Rauigkeit verstärkt, die Reibungsziffer f auf $f : \sin \delta$ vergrößert (A. Ritter, Technische Mechanik). Dasselbe Ergebnis findet man auch in anderen Fällen, wenn man aus dem Falle der Bewegung eines Körpers auf einer ebenen oder krummen Fläche zu denjenigen übergeht, wo in die Fläche keilförmige Rinnen eingearbeitet sind, in die der Körper keilartig eingreift. Man hat dann stets f zu vertauschen mit $f : \sin \delta$, oder auch den Reibungswinkel φ mit einem grösseren Werthe ψ , für den

$$10) \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{f}{\sin \delta} \text{ ist.}$$

Giebt man z. B. der Rinne eine Neigung α gegen die Wagerechte (Fig. 249), so ergibt sich $Q \cos \alpha$ als diejenige Seitenkraft von Q , welche der Körper an die Keilnuth eindrückt. In vorstehender Figur 248 ist dann Q mit $Q \cos \alpha$ zu vertauschen; daher wird

$$2N = Q \cos \alpha : \sin \delta$$

und der gesammte Reibungswiderstand

$$2fN = Q \cos \alpha \cdot f : \sin \delta.$$

Setzt man diesen Werth $= Q \sin \alpha$, so erhält man die Bedingung für gleichförmige Abwärtsbewegung durch die Schwere, nämlich $\operatorname{tg} \alpha = \frac{f}{\sin \delta} = \operatorname{tg} \psi$, oder $\alpha = \psi$.

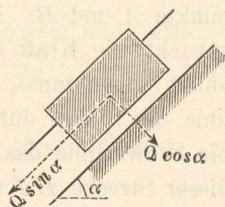
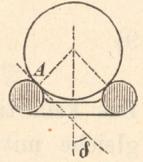


Fig. 249.

Es ist hierzu nicht erforderlich, dass eine wirkliche Keilnuth vorhanden sei; gleiche Wirkungen treten auch auf, wenn sich der Körper etwa zwischen 2 runde Bäume einkeilt, wenn also die von den bewegenden Kräften herrührende Seitenkraft (in der Richtung rechtwinklig zur Bewegung) von 2 Kräften N aufgehoben wird, die mit ihr in einer Ebene liegen, aber nicht parallel sind.

Soll ein runder Körper zwischen den Bäumen einer sog. Streichleiter gleiten (Fig. 250) und ist $\delta = 45^\circ$ der Winkel der Tangente bei A mit der Mittelebene, so wird $f : \sin \delta = 1,414 f$ als Reibungsziffer einzuführen sein, also wenn, wie in dem Beispiele auf S. 194, $f = 0,3$ ist, statt dessen $0,42$. Bei $\alpha = 45^\circ$ wird dann $K = 100,4$, $K_1 = 41 \text{ kg}$.

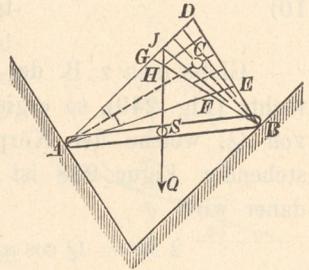
Fig. 250.



d) Stabförmiger Körper, von zwei Ebenen gestützt.

Der Körper mit dem Schwerpunkte S möge die Ebenen in den Punkten A und B berühren (Fig. 251), u. zw. sollen A , B und S in einer lothrechten Ebene liegen, zu welcher die beiden Stützebenen rechtwinklig sind. Wären die Körper völlig glatt, so könnten in A und B nur Normaldrücke N und N_1 entstehen, durch deren Schnittpunkt C die Schwerlinie des Stabes gehen müsste, wenn Gleichgewicht bestehen sollte. Bei vorhandener Rauigkeit aber hat man in A und B die Reibungskegel zu zeichnen; die Mittelschnitte derselben haben ein Viereck $DEFG$ gemeinsam, und dies Reibungsviereck ist der Bereich aller möglichen Schnittpunkte der

Fig. 251.



Widerstände W und W_1 der Stützpunkte A und B . Da nun für Gleichgewicht die Kraft Q mit W und W_1 einen gemeinsamen Schnittpunkt haben muss, so erfordert der Ruhezustand, dass die Schwerlinie des Stabes durch das Viereck hindurchgehen muss. Schneidet die Schwerlinie das Viereck aber vielleicht in HJ , so sind längs dieser Strecke HJ unendlich viele Schnittpunkte von W , W_1 und Q möglich, daher sind auch W und W_1 nach Richtung und Grösse unbestimmt. Nur wenn Q durch einen der Grenzpunkte E und G des Vierecks geht, ist die Richtung (und dann auch die Grösse) von W und W_1 bestimmt. In diesen Fällen befindet sich der Stab im Grenzzustande der Ruhe; W und W_1 liegen auf den Mantelflächen der Reibungskegel, es treten von A und B die vollen Reibungswerthe auf, und bei dem geringsten Anstosse geräth der Stab ins Gleiten.

Ruhezustand einer Leiter. Eine Leiter AB von der Länge l stütze sich bei A gegen den Boden, lehne sich bei B gegen eine lothrechte Wand (Fig. 252). Die Reibungsziffern für beide Ebenen seien die gleichen. Der Schwerpunkt S der (etwa belasteten) Leiter liege um $AS = nl$ von A entfernt. Gesucht wird der Neigungswinkel α , unter dem die Leiter an der Grenze des Ruhezustandes ist.

Wird die Leiter in gewöhnlicher Weise durch Besteigung belastet, so kann die Schwerlinie nur zwischen A und B hindurchgehen; es interessiert dann von dem Vierecke der Schnittpunkte nur der rechtsseitige Endpunkt E , bis zu dem die Schwerlinie nach rechts sich bewegen darf, wenn noch Ruhe möglich sein soll.

Dreieck $AE B$ ist bei E rechtwinklig, ferner ist $\sphericalangle ASE = 90^\circ + \alpha$, $\sphericalangle EBA = \alpha + \varphi$. Daher ist in $\triangle AES$:

$$AS : AE = \sin \varphi : \sin (90^\circ + \alpha) = \sin \varphi : \cos \alpha;$$

im Dreieck ABE :

$$AB : AE = 1 : \sin (\alpha + \varphi),$$

und aus beiden Gleichungen:

$$AS : AB = nl : l = n = \frac{\sin \varphi \cdot \sin (\alpha + \varphi)}{\cos \alpha}$$

$$\text{oder } n \cos \alpha = \sin \varphi (\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi).$$

Theilt man auf beiden Seiten durch $\cos \alpha \cdot \cos^2 \varphi$ und vertauscht $\operatorname{tg} \varphi$ mit f , $\cos^2 \varphi$ aber mit $1 : (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = 1 : (1 + f^2)$, so giebt sich:

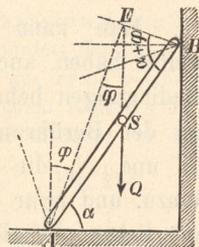
$$n (1 + f^2) = f (\operatorname{tg} \alpha + f), \text{ oder, nach } \operatorname{tg} \alpha \text{ aufgelöst:}$$

$$1) \quad \operatorname{tg} \alpha = n \left(\frac{1}{f} + f \right) - f.$$

Ist also n gegeben, d. h. bekannt, wie weit das Gesamtgewicht der Leiter sich von dem unteren Endpunkte entfernen kann, so steht damit der Winkel α fest, welcher dem Grenzzustande der Ruhe entspricht.

Soll bei gegebener Schwerpunktslage Sicherheit gegen Gleiten vorhanden sein, so muss die wirkliche Schwerlinie links von E

Fig. 252.



bleiben, oder es muss das nach dem Punkte E berechnete n der Gleichung 1 grösser sein als das wirkliche n_1 ; d. h. das wirkliche

$$n_1 < \frac{f(\operatorname{tg} a + f)}{1 + f^2}, \text{ mithin}$$

$$2) \quad \operatorname{tg} a > n_1 \left(\frac{1}{f} + f \right) - f.$$

Man kann vorstehende Aufgabe, die wir hier geometrisch gelöst haben, auch rechnerisch auf Grund der drei Gleichgewichtsbedingungen behandeln. Im Grenzzustande treten an den Berührungsstellen zu den Normaldrücken N und N_1 die vollen Reibungen fN und fN_1 hinzu, und zwar entgegengesetzt der Richtung des möglichen Ausgleitens, d. h. nach rechts, bzw. nach oben (Fig. 253). Die Gleichung der wagenrechten Kräfte heisst:

$$3) \quad fN = N_1;$$

die Gleichung der lothrechten Kräfte:

$$4) \quad N + fN_1 = Q;$$

die Momentengleichung in Bezug auf A :

$$5) \quad 0 = Qn \cos a - N_1 l \sin a - fN_1 l \cos a.$$

Letztere Gleichung giebt:

$$\operatorname{tg} a = \frac{Qn - fN_1}{N_1}.$$

Aus den Gleichungen 3 und 4 ergibt sich aber:

$$N_1 = \frac{Q}{\frac{1}{f} + f},$$

mithin wird wiederum:

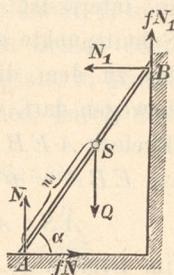
$$\operatorname{tg} a = n \left(\frac{1}{f} + f \right) - f.$$

Beispiel: Die Reibungsziffer betrage $f = 0,4 = \operatorname{tg} 22^\circ$. Ist zunächst die Leiter durch ihr eigenes, in der Mitte angreifendes Gewicht belastet, d. h. $n = 1/2$, so wird

$$\operatorname{tg} a = \frac{1}{2}(2,5 + 0,4) - 0,4 = 1,05; \quad a = 46\frac{1}{2}^\circ.$$

Bis zu diesem Werthe dürfte a abnehmen, ohne dass die Leiter ausglitte. Wird sie sodann bestiegen und hat der Besteigende dasselbe Gewicht wie die

Fig. 253.



Leiter, so ist, wenn der Besteigende noch auf der untersten Sprosse steht, annähernd $n = 1/4$, und

$$\operatorname{tg} \alpha = 1/4 (2,5 + 0,4) - 0,4 = 0,325; \quad \alpha = 18^\circ.$$

Diese geringe Neigung darf aber nicht gewählt werden, wenn die Leiter höher hinauf bestiegen werden soll. Ist sie nämlich bis zur Mitte erstiegen, so ist wieder $n = 1/2$. Wird sie aber bis oben bestiegen, so ist zuletzt $n = 3/4$ und

$$\operatorname{tg} \alpha = 3/4 (2,5 + 0,4) - 0,4 = 1,73; \quad \alpha = 60^\circ 40'.$$

Es genügt also nicht, den Sicherheitszustand der unbelasteten Leiter zu prüfen, wenn man sie bis oben ersteigen will; vielmehr erfordert der letztere Fall eine steilere Stellung der Leiter. Ist diese steile Lage aus irgend welchen Gründen nicht gut ausführbar, so lässt sich auch bei kleinerem Winkel α die Sicherheit erhöhen, wenn ein zweiter Arbeiter seine Füße entweder vor die Leiter setzt, oder sich auf die unterste Sprosse stellt. Letzteres hat einen besseren Erfolg als das Davorstellen, wenn f für die Leiter vielleicht grösser ist als für die Sohlen des Arbeiters.

Ist die Leiter sehr leicht, so wird, wenn ein Mensch sie bis oben erstiegen hat, annähernd $n = 1$, mithin

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{f} + f - f = \frac{1}{f}, \quad \text{d. h. } \alpha = 90^\circ - \varphi;$$

d. h. in diesem Falle, darf die Leiter höchstens um den Reibungswinkel von der Lothrechten abweichen (Fig. 254). Für $\varphi = 22^\circ$ wäre $\alpha = 68'$. Die Gesamtwiderstände W und W_1 schneiden sich mit Q in B , es wird $W = Q \cos \varphi$; $W_1 = Q \sin \varphi$.

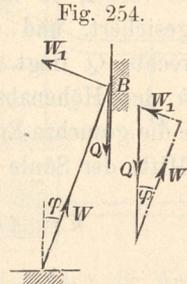


Fig. 254.

Reibungs-Hülsen und Reibungs-Ringe zur Aufhängung von Lasten.

Soll an einer Säule ohne Vorsprünge eine Last nur durch Reibung sicher aufgehängt werden, so schiebe man (Fig. 255) über die Säule eine Hülse, welche erstere bei A und B berührt, bei A also einen geschlossenen Ring bildet, während bei B nur ein Ringsegment erforderlich ist. Zuerst stützt man die Hülse gegen Hinabgleiten, etwa bei A , übt dann an dem seitlichen Arme C einen Druck nach unten aus und bewirkt dadurch ein Drehungsbestreben rechts herum, welchem sich bei A und B gleiche und entgegengesetzte Drücke N der Säule entgegenstellen. Mit Einschluss

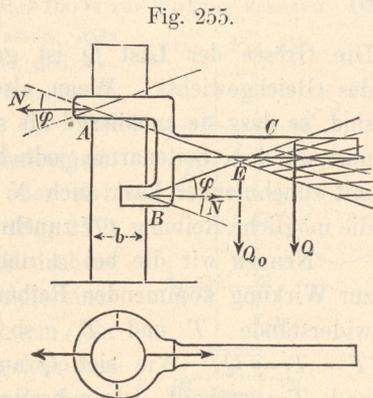


Fig. 255.

der Reibung bilden sich nun in A und B Gesamtwiderstände W und W_1 innerhalb der Reibungskegel der Punkte A und B . Die Mittelschnitte der Reibungskegel treffen sich zunächst im Punkte E ; rechts von E aber liegt der Bereich der möglichen Schnittpunkte von W und W_1 . Geht daher das Gesamtgewicht Q der Hülse einschliesslich des belasteten Armes durch E , so befindet sich die Hülse im Grenzzustande der Ruhe, weil die Drücke N dann noch so gering sind, dass nur die volle Reibung fN an beiden Stellen hinreicht, um das Abwärtsgleiten zu verhindern. Geht aber das Gesamtgewicht Q rechts von E vorbei, so ist das Gleichgewicht der Hülse, gesichert, und zwar um so mehr, je weite rechts Q liegt. Ist b die Breite der Säule h der Höhenabstand der Punkte A und B , c die gesuchte Entfernung des Punktes E von der Mitte der Säule (Fig. 256), so findet man leicht

$$h = AC + DB = \left(c + \frac{b}{2}\right) \operatorname{tg} \varphi + \left(c - \frac{b}{2}\right) \operatorname{tg} \varphi$$

$$h = 2c \operatorname{tg} \varphi \quad \text{oder} \quad c = \frac{h}{2f}.$$

Ist x der Abstand der Gesamtlast Q von der Säulenmitte, so ist die Bedingung für Ruhe:

$$6) \quad x \geq c \quad \text{d. h.} \quad x \geq \frac{h}{2f}.$$

Die Grösse der Last Q ist ganz ohne Einfluss auf die Sicherheit des Gleichgewichts. Wenn also Säule und Hülse nur stark genug sind, so dass sie annähernd als starre Körper gelten können, so kann man an dem Seitenarme jede beliebig grosse Last aufhängen, weil mit zunehmender Last auch N und die mögliche Reibung fN zunehmen.

Nennen wir die bei A und B zur Wirkung kommenden Reibungswiderstände T und T_1 , so ist $T + T_1 = Q$. Wie sich Q auf T und T_1 vertheilt, ist unbestimmt. Machen wir die willkürliche An-

nahme: $T = T_1 = \frac{1}{2} Q$, so können auch N und N_1 berechnet werden. In Bezug auf O (Fig. 257) ist dann, weil die Momente

Fig. 256.

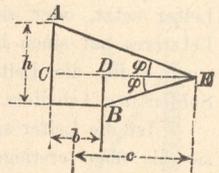
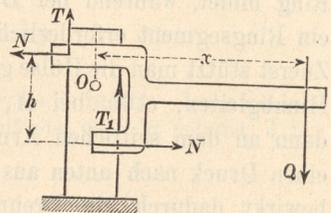


Fig. 257.



von T und T_1 sich aufheben, $Nh = Qx$. Die Summe der grössten möglichen Reibungswiderstände wäre

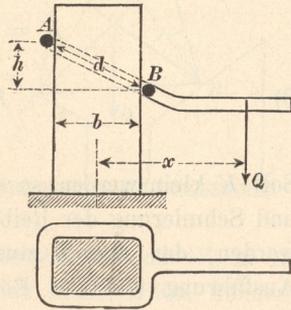
$$2 f N = 2 f Q \frac{x}{h} \text{ oder, weil } h = 2 f c \text{ war,}$$

$$2 f N = Q x : c;$$

weil nun von der Reibung nur der Theil Q beansprucht wird, so ist die gesammte mögliche Reibung $x : c$ mal so gross wie die nöthige; $x : c$ kann also als der Sicherheitsgrad bezeichnet werden.

Die Reibungshülse kann durch den einfachen Reibungsring (Fig. 258) (mit der gleichen Wirkung) ersetzt werden. Der etwa aus Rundeisen geschmiedete Ring hat eine Weite d , welche grösser ist als die Breite der Säule, so dass der Ring erst in schräger Lage die Säule bei A und B berührt. Die Reibungskegel bei A und B haben dann die gleiche Bedeutung wie in Fig. 255.

Fig. 258.

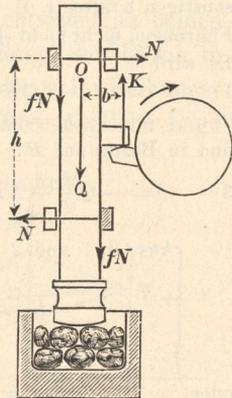


Beispiel: Es sei $b = 0,2\text{ m}$ die Breite der Säule, $d = 0,21\text{ m}$ die Weite des Ringes; dann wird $h = \sqrt{d^2 - b^2} = 0,064\text{ m}$. Ist nun für Holz und Schmiedeeisen (ohne Schmierung) $f = 0,5$, so wird $c = 0,064 : (2 \cdot 0,5) = 0,064\text{ m}$. Macht man nun $x = 0,2\text{ m}$, so ist die Sicherheit gegen Gleiten eine $0,2 : 0,064 = 3$ fache (rund). Ist also die Gesamtlast $Q = 100\text{ kg}$, so ist die gesammte mögliche Reibung 300 kg , von der aber nur 100 kg zur Wirkung kommen. Oder man kann die Sicherheit auch so auffassen, dass die Reibungsziffer $0,5$ auf $1/3$ ihres Werthes sich vermindern darf, bevor Gleiten eintritt. Für $f = 1/6$ würde nämlich $c = 0,064 \cdot 3 = 0,192$, d. h. fast $= x$.

Fig. 259.

Gleichförmige Hebung eines Pochstempels.

Ein zum Zerkleinern von Erzen oder dgl. dienender Stempel vom Gewichte Q (Fig. 259) wird durch den Daumen einer sich drehenden Daumenwelle erfasst und mittels einer Kraft K gehoben, bis er, nachdem der Daumen an dem Hubarme vorbeigekommen ist, frei herabfällt und die davon getroffenen Körper zerstampft. Da K und Q einen wagerechten Abstand b haben, so würde der Stempel umfallen, wenn er nicht durch Führungen in lothrechter



Stempel umfallen, wenn er nicht durch Führungen in lothrechter

Lage gehalten würde. Von den Führungshölzern werden beim Heben nur die schraffirten wirksam und liefern gleiche Normaldrücke N , denen beim Aufwärtsgleiten abwärts gerichtete Reibungen fN entsprechen. Es ist nach der Gleichung der lothrechten Kräfte

$$1) \quad K = Q + 2fN.$$

Die Momentengleichung in Bezug auf einen Punkt O der Mitte des Stempels lautet:

$$2) \quad Nh = Kb.$$

Setzt man den hieraus erhaltenen Werth von N in Gl. 1 ein, so wird

$$K = Q + 2f \frac{Kb}{h}, \text{ mithin}$$

$$3) \quad K = \frac{Q}{1 - 2f \cdot \frac{b}{h}}.$$

Soll K klein werden, so muss $fb : h$ klein ausfallen; durch Glättung und Schmierung der Reibungsflächen muss hiernach f klein gemacht werden; der Arm b muss so kurz sein, wie die Rücksichten der Ausführung und des Betriebes gestatten, und der Abstand h der Führung muss möglichst gross sein.

Beispiel: Ist $Q = 150$ kg, $f = 1/8$, $b : h = 1 : 8$, so wird $K = 155$ kg. In der vorstehenden Ableitung ist angenommen, dass der Daumen auf den Arm b nur eine lothrechte Kraft ausübe; bei der Drehung der Welle gleitet aber der Daumen unter dem Arme nach rechts fort und wirkt durch Reibung nach rechts ziehend auf den Arm, so dass zu der Kraft K noch die nach rechts wirkende Reibung f_1K hinzukommt. Dies ändert die sonstigen Kräfte, z. B. wird nun der Druck N an beiden Führungen nicht mehr der gleiche sein können (Fig. 260). Es wird

$$1) \quad f_1 K = N_1 - N;$$

$$2) \quad K = Q + f(N + N_1),$$

und in Bezug auf B :

$$3) \quad 0 = -Q \frac{d}{2} + Nh - fNd - K \left(b - \frac{d}{2} \right) + f_1 K c.$$

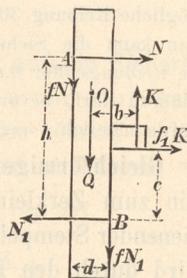
Aus Gl. 1 und 2 wird $N = \frac{K(1 - ff_1) - Q}{2f}$ und sodann aus Gl. 3:

$$K = \frac{Q}{1 - ff_1 + \frac{d}{h} f^2 f_1 - 2 \frac{b}{h} f + \frac{2c}{h} ff_1}$$

oder

$$K = \frac{Q}{1 - 2 \frac{b}{h} f - ff_1 \left(1 - \frac{d}{h} f - \frac{2c}{h} \right)}.$$

Fig. 260.



$Q = 150$; $f = f_1 = 1/8$; $b : h = 1/8$; $d : h = 1/10$; $e : h = 1/2$ giebt dann $K = 155$ kg. Der Unterschied gegenüber obiger Vernachlässigung von f_1 ist verschwindend klein.

f) Festklemmen eines Stabes zwischen zwei Flächen.

Sind die beiden Ebenen, zwischen denen eine Stange sich befindet, nicht fest, sondern gehören sie zwei Körpern an, die durch seitliche Kräfte einander genähert werden können (Fig. 261), so ist das Verhalten der Stange gegenüber dem Versuche, die stützenden Körper zusammenzuschieben, ein verschiedenes, je nachdem

1. die Stange nicht in die beiden Reibungskegel der Punkte A und B fällt, oder aber
2. dieser Bedingung genügt.

Im ersten Falle können die Gesamtdrücke W und W_1 in A und B niemals in dieselbe Gerade (nämlich AB) fallen, können also auch niemals sich allein gegenseitig aufheben, sondern es können W und W_1 nur einer dritten Kraft, etwa dem Gewichte Q der Stange das Gleichgewicht halten. Ist nun die Stange sehr leicht, so dass man annähernd $Q = 0$ annehmen darf, so werden auch W und W_1 zu Null, d. h. die Stange übt auf die seitlichen Körper keine nennenswerthen Drücke aus. Versucht man, die Körper zusammenzuschieben, so kann die Stange dies nicht hindern, sondern sie weicht nach oben aus, indem sie sich entweder an beiden Stellen A und B oder nur an einer derselben längs der Ebene in die Höhe schiebt. An der Gleitstelle tritt dann der volle Reibungswiderstand auf, so dass dort W oder W_1 die tiefste mögliche Lage einnimmt, falls Q nicht ganz gleich Null angenommen wird.

Liegt aber die Gerade AB innerhalb beider Reibungskegel (Fig. 262), so können W und W_1 auch beide in die Gerade AB fallen und sich dann allein, ohne Hinzutreten einer dritten Kraft, gegenseitig aufheben. Sie können nun in jeder beliebigen Grösse

Fig. 261.

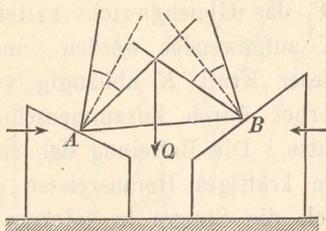
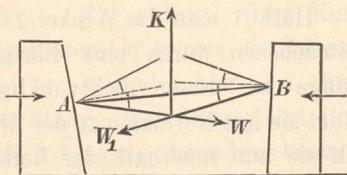


Fig. 262.



auftreten, wenn die Stange zwischen den Ebenen ruht. Versucht man wieder, die Seitenkörper zusammenzuschieben, so wird die Stange dies vollständig verhindern. Je stärker man auf die Seitenkörper drückt, desto grösser werden auch die Widerstände $W = W_1$. Soll die Stange aber, um Raum zu geben, bei A und B nach oben ausweichen, so kommen die tiefsten Richtungen von W und W_1 zur Geltung, und um unter deren Einwirkung eine Bewegung der Stange nach oben zu ermöglichen, muss eine den Kräften W und W_1 das Gleichgewicht haltende, d. h. nach oben gerichtete Kraft K aufgewendet werden, und zwar ist die erforderliche Grösse dieser Kraft K abhängig von der Grösse der Pressung, die man vorher durch Zusammenschieben der Seitenkörper hervorgebracht hatte. Die Befreiung der Stange erfordert daher unter Umständen ein kräftiges Herausreissen nach oben hin. Der Zustand, in dem sich die Stange in solchem Falle befand, nennt man ein Festklemmen zwischen den Seitenkörpern. Es ist ein solches Festklemmen möglich, wenn AB innerhalb der beiden Reibungskegel liegt.

Bei völlig starren Körpern kann man sich ein solches Festklemmen nur vorstellen, wenn die Stange zuerst zwischen den Körpern gehalten wird und diese dann zusammengedrückt werden. Bei elastisch festen Körpern aber kann man die Stange auch durch einen abwärts gerichteten Druck in einen keil- oder kegelförmigen Hohlraum, dessen Seitenwände einen einzigen Körper bilden, hineintreiben (Fig. 263), kann dabei an den Berührungsstellen mehr oder weniger starke Pressungen erzeugen, die dann einer Lösung der Stange einen entsprechenden Reibungswiderstand entgegensetzen. Unter Umständen kann man dann den etwa gefässartigen Körper mittels der Stange emporheben.

Halbirt man die Winkel 2δ zwischen beiden Seitenebenen durch eine Ebene und stellt die Stange zu dieser rechtwinklig (Fig. 264), so bildet sie mit Normalen zu der Ebene die Winkel δ . Soll sie nun innerhalb der Reibungskegel liegen, so muss $\delta \leq \varphi$ sein, d. h. der Winkel zwischen den Seitenebenen muss $\leq 2\varphi$ sein, wenn ein Festklemmen möglich sein soll.

Fig. 263.

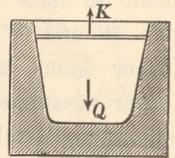
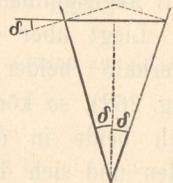


Fig. 264.



g) Keil in dem Spalt eines Baumstammes oder dergl.

Ein zur Mittelebene symmetrischer Keil vom Keilwinkel 2δ (Fig. 265) soll durch eine Kraft K gleichmässig in dem Spalte weiterverschoben werden. Zu den Normaldrücken N kommen die in die Keilflächen fallenden, nach oben gerichteten Reibungswiderstände fN hinzu. N schliesst den Winkel δ mit der Querrichtung des Keiles, fN denselben Winkel mit der Kraft K ein. Für Gleichgewicht wird daher (Fig. 265 a)

$$K = 2 N \sin \delta + 2 f N \cos \delta$$

$$1) = 2 N (\sin \delta + f \cos \delta).$$

Oder auch $K = 2 W \sin (\delta + \varphi)$

mit $W = N : \cos \varphi$.

Für die rückgängige Bewegung des Keiles gilt (ebenfalls mit dem Sinne der Kraft nach unten, Fig. 265 b)

$$2) \quad K_1 = 2 N (\sin \delta - f \cos \delta).$$

Die Kraft K_2 aber, welche für den Ruhezustand des Keiles erforderlich ist, muss zwischen den Werthen K_1 und K bleiben.

Ist $\delta > \varphi$, d. h. $\text{tg } \delta > f$ oder $\sin \delta > f \cos \delta$, so ist $K_1 > 0$. In diesem Falle muss auch bei der Aufwärtsbewegung noch eine abwärts gerichtete Kraft K_1 wirken, damit die Bewegung nicht beschleunigt, sondern gleichförmig erfolge. Die Drücke N würden trotz der Reibung noch im Stande sein, den Keil beschleunigt aus dem Spalt hinauszutreiben; oder der zu stumpfe Keil wird, sobald die treibende Kraft aufhört, zurückspringen. Für $\delta < \varphi$ aber wird $K_1 < 0$, d. h. in diesem Falle ist ein Herausziehen des Keiles durch eine aufwärts gerichtete Kraft ($-K_1$) nöthig. Der Keil wird durch die Reibung im Spalte festgehalten; je grösser die Seitendrücke N werden, um so fester steckt er; es findet hier also ähnliches statt wie beim Festklemmen einer Stange, und zwar erfolgt dies Klemmen ebenfalls, wenn der Keilwinkel $2\delta < 2\varphi$. Auch hier können in solchem Falle die Gesamtdrücke W und W_1 der beiden Seitenflächen in dieselbe Linie fallen und sich allein gegenseitig aufheben.

Fig. 265.

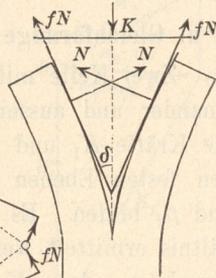


Fig. 265a.

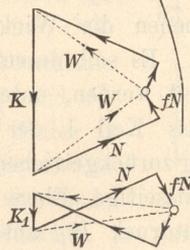


Fig. 265 b.

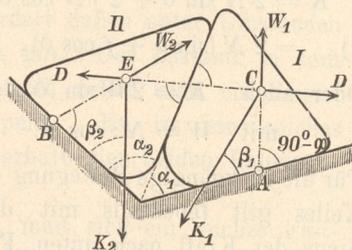
Bei der gewöhnlichen Anwendung des Keiles zum Spalten ist die Wirkung der Triebkraft eine unterbrochene. Wäre nun $\delta > \varphi$, so würde der Keil in den Pausen zwischen zwei Schlägen zurückspringen. Daher muss $\delta < \varphi$ gemacht werden, der Keil muss sich gegen Zurückspringen festklemmen. Ein solcher Keil heisst selbstsperrend.

h) Gleichförmige Bewegung zweier sich berührenden Keile.

Zwei Keile mit den Keilwinkeln α_1 und α_2 (Fig. 266) berühren einander und ausserdem zwei Seitenebenen. Auf die Keile wirken die Kräfte K_1 und K_2 , welche mit den festen Ebenen die Winkel β_1 und β_2 bilden. Es soll deren Verhältnis ermittelt werden, unter der Annahme, dass Keil I der vorrückende, II der zurückgetriebene sei.

Die rechtsseitige Ebene übt einen Gesamtdruck W_1 aus, der von der Normalen zur Ebene um den Reibungswinkel φ nach rechts abweichen muss, wenn Keil I nach links vorrückt. Der Angriffspunkt von W_1 ist unbestimmt, werde daher in A willkürlich angenommen. W_1 bildet mit dem oberen Theile der rechtsseitigen Unterstützungsebene, an der er abwärts gleitet, den spitzen Winkel $90^\circ - \varphi$ (mit dem unteren Theile den stumpfen Winkel $90^\circ + \varphi$). Durch den Punkt C , in welchem W_1 die Kraft K_1 schneidet, muss nun auch der gegenseitige Druck D zwischen beiden Keilen hindurchgehen, weil drei sich im Gleichwichte haltende Kräfte einen gemeinsamen Schnittpunkt haben müssen. D muss die Berührungsebene beider Keile wieder so schneiden, dass der spitze Winkel $90^\circ - \varphi$ im Keile I auf der oberen Seite erscheint. (Die Winkel $90^\circ - \varphi$ sind in der Figur durch kleine Kreisbögen hervorgehoben.) Der gegenseitige Druck D schneidet K_2 im Punkte E , durch welchen auch W_2 hindurchgehen muss. Bei B aber, wo W_2 die linksseitige feste Ebene trifft, muss der spitze Winkel $90^\circ - \varphi$ an der unteren Seite erscheinen, da der Keil II nach oben gleitet. Hiermit stehen die Richtungen der Drücke an den Keilflächen fest; die Lagen ebenfalls, nachdem der Punkt A willkürlich angenommen

Fig. 266.



war. Trägt man nun die Kraft K_1 nach einem beliebigen Maßstabe als GF im Kräfteck (Fig. 266a) auf, setzt daran die Richtungen von W_1 und D , so schneiden sich beide in O und schliessen das Krätedreieck GFO , welches der Gleichgewichtszustand fordert. Zieht man $OJ \parallel W_2$, $GJ \parallel K_2$, so stehen nun auch die Kraftgrößen W_2 und K_2 fest. Der Linienzug $ACEB$, dessen Seiten die Richtungslinien der Drücke an den drei Keilflächen darstellen, heisst die Drucklinie der beiden Keile. Betrachtet man O als den Pol des Kräftecks, so sind die Seiten der Drucklinie den Polstrahlen OF , OG , OJ der Reihe nach parallel. Die Drucklinie bildet daher ein zu den Kräften K_1 und K_2 gezeichnetes Seilck. Die Lage des Poles O und die Grösse der Kraft K_2 sind aber an die Bedingung gebunden, dass die Seiten des Seilckes, d. h. der Drucklinie, die Keilflächen in ganz bestimmter Weise unter den Winkeln $90^\circ - \varphi$ schneiden müssen. Will man nun die Kräfte aus dem Kräfteck auch berechnen, so muss man die Winkel des Kräftecks bestimmen.

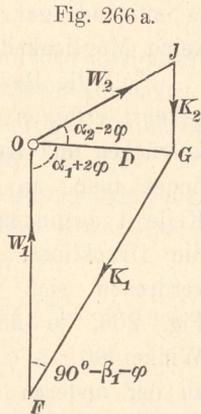


Fig. 266 a.

Der spitze Winkel zwischen K_1 und W_1 würde $90^\circ - \beta_1$ betragen, wenn W_1 ein Normaldruck wäre. Durch die Abweichung um φ wird jener Winkel noch um dieses Maß kleiner, d. h. es wird $\sphericalangle OFG = 90^\circ - \beta_1 - \varphi = 90^\circ - (\beta_1 + \varphi)$. D und W_1 würden, wenn beide Normaldrücke wären, denselben Winkel α_1 mit einander bilden wie die entsprechenden Keilflächen; durch die Abweichung einer jeden um φ vergrößert sich dieser Winkel um 2φ ; daher ist $\sphericalangle FOG = \alpha_1 + 2\varphi$. Entsprechend findet man $\sphericalangle OJG = 90^\circ - (\beta_2 - \varphi)$, $\sphericalangle JOG = \alpha_2 - 2\varphi$. Sonach ergibt sich

$$K_1 : D = \sin(\alpha_1 + 2\varphi) : \cos(\beta_1 + \varphi);$$

$$K_2 : D = \sin(\alpha_2 - 2\varphi) : \cos(\beta_2 - \varphi).$$

Durch Theilung beider Gleichungen entsteht dann

$$1) \quad \frac{K_1}{K_2} = \frac{\sin(\alpha_1 + 2\varphi) \cos(\beta_2 - \varphi)}{\sin(\alpha_2 - 2\varphi) \cos(\beta_1 + \varphi)}.$$

Für $\alpha_2 = 2\varphi$ würde $\sphericalangle JOG = 0$ und $K_2 = 0$ oder $K_1 : K_2 = \infty$, in der Drucklinie würde BE mit CE zusammenfallen, d. h. der

Keil II würde zwischen Keil I und der linksseitigen Ebene sich festklemmen. Die vorausgesetzte Bewegung würde ferner unmöglich werden für $\beta_1 = 90^\circ - \varphi$, weil dann $\sphericalangle OFG = 0$ werden würde. In diesem Falle würde K_1 schon durch W_1 allein aufgehoben und es entstände gar kein Druck D gegen den zweiten Keil, also auch keine Möglichkeit, die Kraft K_2 an dem Keile II zu überwinden.

Soll die Bewegung der Keile umgekehrt erfolgen (Fig. 267), soll Keil II vorrücken und Keil I zurückweichen, so findet man, an einem Punkte A am Keile I beginnend, in gleicher Weise die Drucklinie; ihre einzelnen Seiten verdrehen sich aber, gegenüber der Fig. 266, je um 2φ . Die spitzen Winkel $90^\circ - \varphi$ liegen jetzt durchweg an der anderen Seite als in Fig. 266. Im Krafteck (Fig. 267a) wird, wenn K_1

zu derselben Grösse angenommen wird wie vorher, K_2 nun viel grösser als vorher. Das Verhältnis $K_1 : K_2$ erhält man leicht, wenn man in Gl. 1 durchweg die Vorzeichen von φ umkehrt.

Sind endlich beide Keile in Ruhe, so liegt die Richtung des Widerstandes W_1 irgendwo innerhalb des doppelten Reibungswinkels, und dasselbe gilt für die Richtungen der Drücke D und W_2 . Bei gegebenem K_1 hat nun der Pol O des Kraftecks keine bestimmte Lage mehr, weil W_1 und D innerhalb des doppelten Reibungswinkel jede Richtung haben können; ebenso wird die Richtung von W_2 unbestimmt und damit auch die Grösse K_2 . Das Verhältnis $K_1 : K_2$ ist jetzt nur durch die beiden Grenzen bestimmt, welche sich aus den beiden untersuchten Bewegungsfällen ergeben haben und welche man auch leicht rechnerisch findet, indem man Gl. 1 das eine Mal mit dem angegebenen Vorzeichen von φ , das andere Mal mit den entgegengesetzten dieser Zeichen ausrechnet.

Man erkennt hieraus, dass es für die beiden ruhenden Keile im Allgemeinen unendlich viele mögliche Drucklinien giebt. Jede derselben ist ein zu den Kräften K_2 und K_1 gezeichnetes Seileck,

Fig. 267.

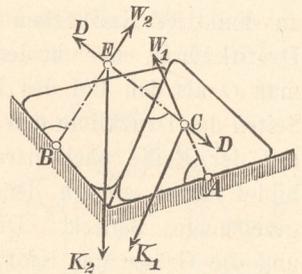
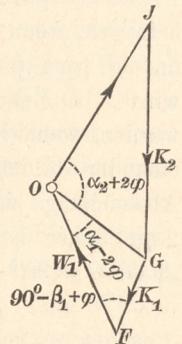


Fig. 267 a.



zu dessen Konstruktion der Pol O und der Anfangspunkt A der Drucklinie innerhalb gewisser Grenzen beliebig gewählt werden können. Da aber die Seiten der Drucklinie die Richtung und Lage der Drücke an Keilflächen darstellen, so müssen sie zwei einschränkenden Bedingungen genügen:

1. darf eine Seite der Drucklinie höchstens um den Reibungswinkel von der Normalen zu der entsprechenden Keilfläche abweichen;
2. muss eine Seite der Drucklinie die zugehörige Keilfläche innerhalb des Bereiches der Berührung (vgl. S. 166) schneiden.

Der Ruhezustand der beiden Keile unter Einwirkung gegebener Kräfte K_1 und K_2 ist nur möglich, wenn wenigstens eine, diesen Bedingungen entsprechende, Drucklinie nachweisbar ist.

Beispiel: Ein mit K_2 belasteter Pfosten (Fig. 268) soll mittels des untergeschobenen Keiles, an dem eine wagerechte Kraft K_1 wirkt, gleichmässig in die Höhe gekeilt werden. Die Drucklinie $ACEB$ ergibt sich leicht unter Annahme eines willkürlichen Punktes A . (Die spitzen Winkel $90^\circ - \varphi$ sind wieder durch kleine Bögen ohne Ziffern bezeichnet.) Der Druck D würde, wenn er ein Normaldruck wäre, mit der Lothrechten den Winkel α_1 bilden; wegen der Reibung wird dieser Winkel $OGJ = \alpha_1 + \varphi$. Das Verhältnis $K_1 : K_2$ liesse sich leicht aus Gl. 1 berechnen, indem man dort die Sonderwerthe dieses Falles einsetzte. Wir ziehen aber eine unmittelbare Berechnung vor. Man erkennt leicht, dass W_1 und W_2 von den zu einander rechtwinkligen Gleitebenen nach derselben Seite um $90^\circ - \varphi$ abweichen, also ebenfalls zu einander winkelrecht sein müssen. Das Viereck $GFOJ$ ist darnach bei G und bei O rechtwinklig, ist also ein einem Kreise vom Durchmesser FJ eingeschriebenes. Der Winkel $FOG = \alpha_1 + 2\varphi$ steht über dem Bogen \widehat{FG} ; demselben Bogen entspricht aber auch der Umfangswinkel FJG , der daher dieselbe Grösse $\alpha_1 + 2\varphi$ hat. Daher ist

$$K_1 : K_2 = \operatorname{tg}(\alpha_1 + 2\varphi).$$

Für $\alpha_1 + 2\varphi = 90^\circ$ oder $\alpha_1 = 90^\circ - 2\varphi$ mithin $\alpha_2 = 2\varphi$ wird $K_1 : K_2 = \infty$, oder das Hinaufkeilen unmöglich. Es fallen dann nämlich D und W_2 zusammen und klemmen den als zweiten Keil geltenden Pfosten fest.

Für die entgegengesetzte Bewegung, d. h. für gleichmässiges Hinablassen des Pfostens, gilt selbstverständlich

$$K_1' : K_2 = \operatorname{tg}(\alpha_1 - 2\varphi).$$

Fig. 268.

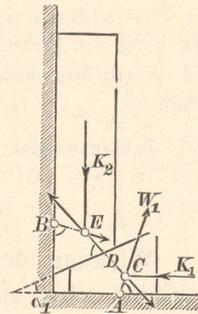
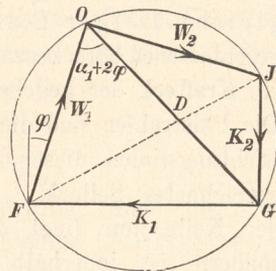
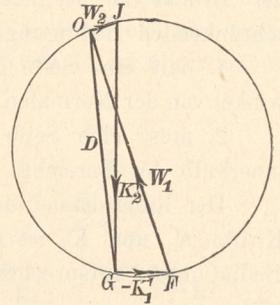


Fig. 268 a.



Für die meisten Fälle ist es wünschenswerth, dass der untere Keil selbstsperrend sei, d. h. dass für den Rückgang $K_1' < 0$ werde. Mithin muss $\alpha_1 < 2\varphi$ sein. Für diesen Fall gilt das Krafteck Fig. 268 b, in welchem die den unteren Keil zurückziehende Kraft $-K_1' = GF$ ist. Der Druck D zwischen beiden Keilen bildet mit der Lothrechten den Winkel $OGJ = \alpha_1 - \varphi$. Würde dieser wegen $\alpha_1 = \varphi$ zu Null, so ergäbe sich D lothrecht und $OJ = W_2 = 0$. Unter diesen Umständen und ebenso für $\alpha_1 < \varphi$ würde sich der Pfosten beim Zurückziehen des unteren Keiles nicht mehr gegen die lothrechte Wand stützen; er würde vielmehr wegen des lothrechten D , welches dann $= K_2$ ist, durch den unteren Keil von der Wand abgezogen werden, würde auf dem Keile nicht abwärts gleiten, also auch nicht sinken; es würde also der Zweck der Rückwärtsbewegung nicht erreicht werden. Für $\alpha_1 < \varphi$ würde W_2 sogar negativ werden, d. h. es müsste der Pfosten durch eine besondere Kraft gegen die Wand gedrückt werden, um sich nicht von ihr zu entfernen. Daraus folgt, dass der Keilwinkel α_1 zwischen den Werthen φ und 2φ liegen muss, damit die Vorrichtung ihren Zweck erfülle.

Fig. 268 b.

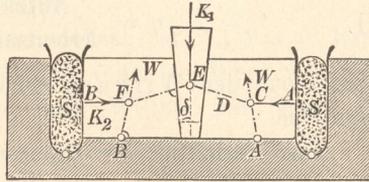


Zahlenbeispiel: Bei $f = 0,2$ oder $\varphi = 11^\circ$ und $\alpha_1 = 17^\circ$ mit $\text{tg } \alpha_1 = 0,3$ wird $\text{tg } (\alpha_1 + 2\varphi) = \text{tg } 39^\circ = 0,8$, mithin $K_1 = 0,8$, K_2 für Hinaufkeilen; $\text{tg } (\alpha_1 - 2\varphi) = -\text{tg } (5^\circ) = -0,09$, d. h. $-K_1 = 0,09$, K_2 für Hinunterlassen.

Wirkung der Keilpresse. Dieselben Grundgedanken wie bei 2 Keilen gelten auch, wenn die Zahl der Keile grösser ist. Gleiten die Keile, so tritt an jeder Keilfläche ein Druck auf, der von der Normalen zur Keilfläche um den Reibungswinkel abweicht. An jedem Keile halten sich die Flächendrücke mit einer dritten Kraft K im Gleichgewichte, schneiden sich daher in einem Punkte. Bei gleichmässiger Bewegung bilden die 3 Kräfte jedes Keiles einen geschlossenen Streckenzug. Das ganze Krafteck aber bildet wiederum ein Krafteck der gegebenen Kräfte K mit seitwärts liegendem Pole. Die Polstrahlen sind die Drücke der Keilflächen; die dazu parallelen Richtungslinien dieser Kräfte bilden daher ein zu den Kräften K gezeichnetes Seileck. Letzteres gilt auch für den Ruhezustand der Keile, nur liegt dann der Pol nicht mehr bestimmt fest, sondern ist innerhalb gewisser Grenzen unbestimmt. Für die Seilecksseiten gelten dann dieselben Beschränkungen wie auf S. 211 angegeben.

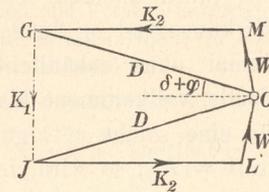
Bei einer Keilpresse etwa zum Auspressen von Öl aus zerstampften Ölsamen (Fig. 269) wirkt K_1 als Triebkraft auf den mittleren Keil von Keilwinkel 2δ . Durch Niedertreiben dieses Keiles werden die Seitenkeile auf den wagerechten Gleitflächen auseinander getrieben und dadurch die Ölgutsäcke S, S gepresst, welche dabei die Gegendrücke K_2 leisten. $ACEFB$ ist die Drucklinie. Stellt man die Triebkraft K_1 durch GJ im

Fig. 269.



Krafteck (Fig. 269 a) dar, so sind JO und GO die Gegendrücke D der beiden Seitenkeile, welche von der Wagerechten um $\delta + \varphi$ abweichen. Dadurch ist der Pol O bestimmt. Die Widerstände W der wagerechten Gleitflächen bilden mit der Lothrechten die Winkel φ und legen dann mit den Wagerechten durch G und J die Punkte L und M fest, wodurch $JL = GM = K_2$ bestimmt werden. Es ist dann im Dreieck OGJ :

Fig. 269 a.



$$K_1 : D = 2 \cdot \sin(\delta + \varphi),$$

im Dreieck OGM aber, weil $\sphericalangle GOM = 90^\circ - (\delta + 2\varphi)$:

$$K_2 : D = \cos(\delta + 2\varphi) : \cos \varphi,$$

mithin wird

$$1) \quad \frac{K_1}{K_2} = 2 \frac{\sin(\delta + \varphi) \cos \varphi}{\cos(\delta + 2\varphi)}.$$

Weil beim Keile gewöhnlich $\text{tg } \delta$ gegeben ist, kann man vorstehende Formel zur bequemeren Berechnung (ohne trigonometrische Tabellen) umformen, indem man die zusammengesetzten Funktionen auflöst und in Zähler und Nenner mit $\cos \delta \cdot \cos^2 \varphi$ theilt:

$$2) \quad \frac{K_1}{K_2} = 2 \frac{\text{tg } \delta + f}{1 - f^2 - 2f \text{tg } \delta}.$$

Zur Beurtheilung der Güte einer Maschine dient die Vergleichung der Arbeiten, welche von der Maschine übertragen bzw. aufgenommen werden. Der Zweck der Keilpresse besteht in dem Zusammenpressen des Gutes bei S . Rückt nun jeder Seitenkeil

um $\frac{1}{2}v$ nach aussen, während der Treibkeil sich um c abwärts bewegt, so verrichten die auf das Gut übertragenen Kräfte K_2 zusammen eine Arbeit K_2v . Dies ist die Nutzarbeit; K_1c ist aber der Arbeitsaufwand. Das Verhältnis beider, nämlich

$$3) \quad \eta = \frac{\text{Nutzarbeit}}{\text{Arbeitsaufwand}} = \frac{K_2 v}{K_1 c},$$

nennt man den Wirkungsgrad oder das Güteverhältnis der Maschine.

Das Verhältnis der Geschwindigkeiten v und c findet man aus dem geometrischen Zusammenhange der Maschine (Fig. 270). Rückt der Treibkeil um c abwärts, so drängt er jeden Seitenkeil um $\frac{1}{2}v$ zur Seite, wo $\frac{1}{2}v = c \operatorname{tg} \delta$. Daher ist hier

$$4) \quad \eta = \frac{2 K_2}{K_1} \operatorname{tg} \delta.$$

Einen anderen Ausdruck kann man noch für den Wirkungsgrad η finden, wenn man sich die Maschine einmal ohne schädliche Reibungswiderstände als eine ideelle, vollkommene Maschine vorstellt. Nennt man die für eine solche nöthige Betriebskraft die ideelle Triebkraft $= K_0$, so wird, indem man in Gl. 2 $f = 0$ setzt,

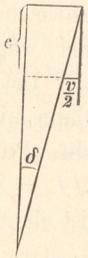
$$5) \quad \frac{K_0}{K_2} = 2 \operatorname{tg} \delta = \frac{v}{c}.$$

Führt man dies in Gl. 3 ein, so erhält man

$$6) \quad \eta = \frac{K_0}{K_1} = \frac{\text{ideelle Triebkraft}}{\text{wirkliche Triebkraft}}.$$

Nach Gl. 5 ist $K_0 c = K_2 v$, d. h. bei einer vollkommenen Maschine würden Arbeitsaufwand und Nutzarbeit einander gleich oder der Wirkungsgrad gleich Eins sein. Eine Maschine ist mechanisch um so vollkommener, je mehr sie sich diesem ideellen Zustande nähert. Die Bezeichnung $K_0 c = K_2 v$ haben wir nur für diese besondere Maschine bewiesen; sie gilt aber allgemein. Bewegen sich nämlich alle Theile einer Maschine gleichförmig, so findet keine Zunahme des Arbeitsvermögens statt, also muss auch die gesammte Arbeit Null sein. Die inneren Spannkkräfte einer vollkommenen Maschine verrichten aber nach S. 144 keine Arbeit. Die Widerstände völlig glatter Flächen, mit denen die einzelnen Maschinentheile in einander

Fig. 270.



greifen und an einander gleiten, ebenso wenig. Die Nutzlast wirkt in Bezug auf die Maschine stets der Bewegung ihres Angriffspunktes entgegen, verrichtet daher eine negative Arbeit, die im absoluten Sinne der Arbeit der Triebkraft gleich sein muss. Also

$$7) \quad v : c = K_0 : K_2.$$

Dies ist der schon von Galilei ausgesprochene Satz: „Was an Kraft gewonnen wird, geht an Geschwindigkeit (oder an Weg) verloren.“ Man kann also den Wirkungsgrad nach Willkür auf Grund der Gl. 3 oder der Gl. 6 berechnen.

Beispiel: Die Reibungsflächen der Keilpresse seien gut geglättet und geschmiert, daher $f = 0,1$. Auch in diesem Falle ist es möglich, den Treibkeil selbstsperrend anzuordnen; dies ist erfüllt, wenn wir etwa $\text{tg } \delta = 1/20$ annehmen. In Gl. 2 werden dann die Grössen f^2 und $2f \text{tg } \delta$ nur je $1/100$ und können zur Vereinfachung gegen 1 vernachlässigt werden. Es ist nämlich zu bedenken, dass die Reibungsziffern in Wirklichkeit schwanken werden und selten mit grosser Genauigkeit zu schätzen sind. Daher ist in Gl. 2 der Zähler doch kaum auf 2% genau zu berechnen, so dass die Vernachlässigung im Nenner durchaus zulässig erscheint. Ähnliches gilt in allen Fällen, in denen Reibungswiderstände eine wichtige Rolle spielen. Dann wird

$$K_1 = 2 \cdot (0,05 + 0,1) K_2 = 0,3 K_2; \quad v = 2 c \cdot 0,05 = 0,1 \cdot c.$$

Der Wirkungsgrad $\eta = \frac{K_2 v}{K_1 c} = \frac{0,1}{0,3} = 1/3$. Es würde ohne Reibung

$$K_0 = 2 K_2 \text{tg } \delta = 0,1 K_2,$$

$$\text{also auch} \quad \eta = \frac{K_0}{K_1} = \frac{0,1 K_2}{0,3 K_2} = 1/3, \quad \text{wie vorstehend.}$$

Bei dieser Maschine wird also von der aufgewandten Arbeit nur ein Drittel nützlich verwerthet, während zwei Drittel durch Reibung aufgezehrt werden. Die Keilpresse ist daher eine wenig vollkommene Maschine; Wasserdruckpressen z. B. arbeiten erheblich vortheilhafter. Die soeben besprochene Maschine hat aber Einfachheit und Billigkeit als Vorzüge.

Der Wirkungsgrad dieser Maschine nach Gl. 6 lässt sich, wenn man in Gl. 2 die erwähnte Vereinfachung

$$K_1 = 2 K_2 (\text{tg } \delta + f)$$

einführt, auch schreiben, weil $K_0 = 2 K_2 \text{tg } \delta$ ist,

$$8) \quad \eta = \frac{\text{tg } \delta}{\text{tg } \delta + f} = \frac{1}{1 + \frac{f}{\text{tg } \delta}}.$$

Vergössert man $\text{tg } \delta$, so verkleinert sich der Nenner, mithin wächst η . Macht man z. B. $\text{tg } \delta = f$, so würde schon $\eta = 1/2$ werden. Die beabsichtigte Selbstsperrung des Triebkeiles hat also den geringen Wirkungsgrad herbeigeführt. Es lässt sich zeigen, dass bei jeder Maschine, die selbstsperrend

sein soll, der Wirkungsgrad unter 0,5 liegen muss. Man kann nämlich setzen: $K_1 = K_0 + F$, wenn F der durch die Reibungswiderstände aufgezehrte Theil der Betriebskraft ist. Nimmt man nun an, dass beim Beginne der rückgängigen Bewegung der Reibungswiderstand annähernd noch dieselbe Grösse F behält, so gilt für den Rückgang $K_1' = K_0 - F$. Soll nun die Maschine sich selbst sperren, so muss $K_1' \leq 0$, mithin $F \geq K_0$ oder

$$K_1 \geq 2 K_0 \text{ sein, d. h. } \eta = \frac{K_0}{K_1} \leq \frac{1}{2}.$$

i) Drucklinie eines Gewölbes.

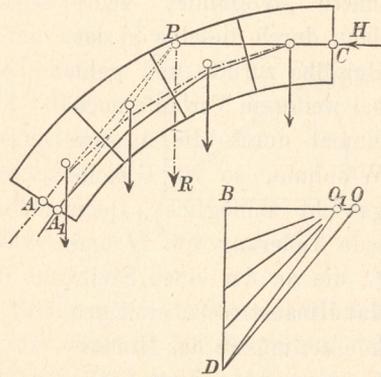
Auf S. 210 wurde gezeigt, dass die Drucklinie einer ruhenden Gruppe von 2 Keilen statisch unbestimmt ist, dass sie ein Seileck zu den Lasten K der Keile sein muss und dass ihre Seiten an zwei beschränkende Bedingungen gebunden sind. Auf S. 212 wurde dann weiter erläutert, dass diese Sätze von der Zahl der Keile unabhängig sind, also auch bei beliebig vielen Keilen Gültigkeit behalten.

Die einzelnen Steine eines (ohne Mörtel gedachten) Gewölb Bogens sind nun auch keilförmige Körper. Soll ein Gewölb bogen in Ruhe sein können, so muss eine dem Ruhezustande entsprechende Drucklinie nachweisbar sein. Die Drucklinie ist ein zu den Gewichten der Gewölbtheile gezeichnetes Seileck. Die einzelnen Seiten desselben dürfen höchstens um den Reibungswinkel von der Normalen zu den Fugen abweichen und müssen die Fugen auch innerhalb des Bereiches der Berührung, d. h. innerhalb des Gewölb Bogens schneiden.

Das Gewölbe möge symmetrisch zu einer lothrechten Mittelebene sein (auch bezüglich seiner Belastung). Betrachten wir diese Ebene als eine Schnittebene, so wird in ihr eine wagerechte Druckkraft, der Seitenschub H , wirken. Denn ein schräg gerichteter Scheiteldruck würde an der einen Hälfte nach oben, an der anderen aber zufolge des Gesetzes der Wechselwirkung nach unten gerichtet sein, was jedoch der Symmetrie widerspricht. Theilt man nun den halben Bogen (Fig. 271) durch Fugen in eine beliebige Zahl von Theilen, deren Gewichte Q_1, Q_2, \dots durch die Schwerpunkte der Theile hindurchgehen, so ist das Kräfteck der Lasten Q leicht gezeichnet, indem man sie nach irgend einem Kräfte maassstab an einander reiht. Wäre nun der Seitenschub H bekannt, so würde man den Pol O in dem Abstände H dem oberen Endpunkte der Lasten gegenüber annehmen und hätte damit sämtliche Polstrahlen. Wäre ausserdem noch der Angriffspunkt C des Scheiteldruckes gegeben, so hätte man die Seilecksseiten nur den

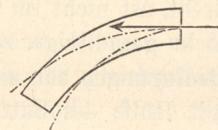
Polstrahlen der Reihe nach parallel zu ziehen und hätte damit das Seileck, d. h. die Drucklinie des Gewölbes. Den Punkt C wollen wir in der Mitte der Scheitelfuge annehmen. Die letzte Seite des Seilecks könnte nun vielleicht aus der inneren Leibung des Gewölbes treten; dann erkennt man, dass dieses Seileck eine mögliche Drucklinie nicht ist. Um aber ein flacher verlaufendes Seileck zu erhalten, braucht man nur den Polabstand H zu vergrössern, und zwar kann man leicht H so bestimmen, dass die letzte Seite die Kämpferfuge an einer bestimmten Stelle A , etwa in ihrer Mitte, schneide. In Fig. 271

Fig. 271.



ist nach willkürlicher Annahme des Poles O_1 das Seileck CA_1 gezeichnet. Verlängert man nun die letzte Seite des ersten Seilecks bis zum Schnitte P mit der Richtungslinie von H , so muss nach S. 119 das Gesamtgewicht R der Gewölbhälfte durch P gehen. Die Lage von R ist nur von der Form des Gewölbes abhängig, nicht aber von der willkürlich angenommenen Lage des Poles O . Für ein grösseres H und für ein wiederum durch C gehendes Seileck muss daher die letzte Seite ebenfalls durch P gehen. Zieht man also PA , so ist dies die Richtung der letzten Seite durch den gewünschten Punkt A . Eine Parallele zu AP durch D bestimmt den neuen Pol O , und OB ist nun der Scheitelschub, welcher einem durch C und A gehenden Seileck entspricht. Dass die Seiten des Seilecks von den Normalen zu den Fugen nicht zu viel abweichen, lässt sich ja nöthigenfalls durch Änderung der Fugenrichtung leicht erreichen. Wichtiger ist, dass die Drucklinie überall im Gewölbbogen verbleiben muss. Findet man eine solche Drucklinie, so ist der Ruhezustand gesichert.

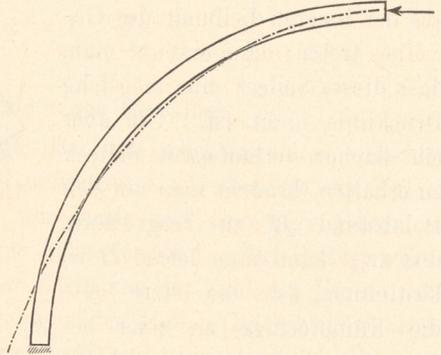
Fig. 272.



Wie schon gesagt, hat man, wenn das erste Seileck die innere Wölbfläche schneidet, H zu vergrössern, oder C nach oben zu verschieben, und umgekehrt. In Fig. 272 sind 2 vorläufige Seilecke

ingezeichnet, die den Bedingungen einer Drucklinie noch nicht entsprechen, aber durch Veränderung von H zu möglichen Drucklinien umzuwandeln sind. Schneidet ein Seileck (Fig. 273) erst die innere Wölblinie, kehrt dann durch dieselbe in das Gewölbe zurück und geht bei weiterem Verlaufe noch einmal durch die äussere Wölblinie, so ist Gleichgewicht unmöglich. Denn jede Änderung von H und C , die an der einen Stelle das Hinaustreten beseitigen könnte, müsste das Hinaustreten an der anderen Stelle noch verstärken; in solchem

Fig. 273.



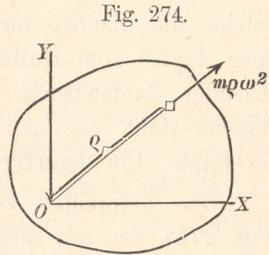
Falle kann nur eine Vergrösserung der Gewölbstärke oder eine Änderung der Gewölbform zum Ziele führen.

Auf diese Andeutungen über die Drucklinie in Gewölben müssen wir uns hier beschränken. Die wirkliche Lage des Scheitelschubes H und des Widerlagerdrucks W folgt aus dem elastischen Verhalten der Gewölbsteine und findet sich besprochen in Keck, Vorträge über Elasticitätslehre, S. 330 u. ff. Hat man aber die richtige Drucklinie gefunden, so geben die Polstrahlen des Kraftecks die Grösse der Druckkräfte in den einzelnen Fugen an.

II. Wirkung der Reibung bei gleichmässig sich drehenden Körpern.

Ein starrer Körper, der sich gleichförmig um eine feste Achse dreht, ist nicht im Gleichgewichte, weil die einzelnen Massentheilchen nicht geradlinige, sondern kreisförmige Bewegungen ausführen. Die Bedingungen für eine gleichförmige Drehbewegung lassen sich aber mit Hülfe des Satzes auf S. 141 aufstellen, wonach die Ergänzungskräfte den an dem Körper wirkenden äusseren Kräften das Gleichgewicht halten müssen.

Dreht sich der Körper mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse O rechtwinklig zur Bildebene (Fig. 274), so erfährt ein Massentheilchen m im Abstände ϱ von der Achse nach S. 88 die Centripetalbeschleunigung $\varrho \omega^2$; daher müssen sämtliche Centrifugalkräfte $m \varrho \omega^2$ den äusseren Kräften gleichwerthig sein. Die äusseren Kräfte bestehen in bewegenden Kräften K , in den Normalwiderständen N der festen Achse O und in Reibungswiderständen der Lager der Drehachse.



Da die Centrifugalkräfte sämtlich durch O hindurchgehen, so haben sie in Bezug auf die Achse das Moment Null. Dieses muss also auch für die äusseren Kräfte gelten. Da nun die Normalwiderstände N ebenfalls durch O gehen, so ergibt sich als wesentliche Bedingung der gleichförmigen Drehung, dass die Momentensumme der bewegenden Kräfte K und der Reibungswiderstände $f \cdot N$ in Bezug auf O zusammen Null betrage.

Die Normalwiderstände N der festen Drehachse sind im Allgemeinen von der Massenvertheilung des Körpers abhängig und werden erst weiter unten eingehend bestimmt werden. Jetzt wollen wir nur solche Fälle betrachten, bei denen die Masse derartig symmetrisch um die Achse vertheilt ist, dass jedem Massentheilchen im Abstände ϱ auf der einen Seite der Achse ein gleiches Massentheilchen in demselben Abstände auf der anderen Seite entspreche, so dass die Centrifugalkräfte dieser Massentheilchen sich gegenseitig aufheben, weshalb dann auch die sämtlichen äusseren Kräfte sich vollständig aufheben, d. h. den Gleichgewichtsbedingungen genügen müssen. Aus diesem Grunde können die Fälle der gleichmässigen Drehung solcher Körper mit symmetrischer Massenvertheilung schon an dieser Stelle, d. h. in der Gleichgewichtslehre, behandelt werden.

In den obigen Bedingungen wird nichts geändert, wenn zu der Drehung um die Achse O noch eine geradlinige und gleichmässige Verschiebung des Körpers mit seiner Achse kommt. Denn eine derartige Verschiebung bedingt keine Beschleunigung, also auch keine Ergänzungskräfte.

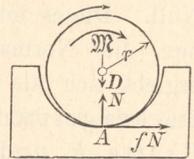
a) Reibungsmoment eines Tragzapfens.

Eine Achse sei rechtwinklig zu ihrer Mittellinie belastet und stütze sich mittels cylindrischer Zapfen auf cylindrische Lager, welche die Zapfen mit geringem Spielraum umschliessen. Auf einen Zapfen vom Halbmesser r komme ein durch die Zapfenmitte gehender Zapfendruck D , der rechtwinklig zur Längsachse des Zapfens steht, so dass die Cylinderfläche des Zapfens den Druck bekommt. Ein derartiger Zapfen heisst Tragzapfen.

Wir betrachten zuerst einen sog. eingelaufenen Zapfen (Fig. 275), der mit merklichem Spielraum im Lager liegt, und bei dem man annäherungsweise annehmen kann, die

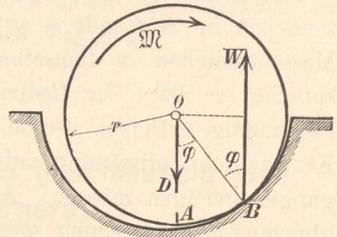
Berührung mit dem Lager finde nicht in einer grösseren Fläche, sondern in einer Seite des Cylinders (in der Figur durch einen Punkt dargestellt) statt. Im Ruhezustande würde A die Berührungsstelle sein. Dreht sich nun aber der Zapfen rechts herum, so gleitet bei A der Zapfen nach links; dem setzt sich der Widerstand fN nach rechts entgegen. Das Moment $fN \cdot r$ macht ein treibendes, die Reibung überwindendes Kräftepaar \mathfrak{M} im Sinne der Drehung nöthig. Aber auch nach Anbringung desselben ist den Gleichgewichtsbedingungen noch nicht

Fig. 275.



genügt, weil die Summe der wagerechten Kräfte nicht Null ist. Es kann daher im Zustande der Bewegung die Berührung nicht in A stattfinden; vielmehr verschiebt sich die Berührungsstelle nach rechts nach einem Punkte B (Fig. 276), der so liegt, dass dort die Mittelkraft W aus N und fN lothrecht gerichtet ist. Dies findet statt für $\sphericalangle AOB = \varphi$. Es wird nun $W = D$, und beide bilden ein dem treibenden Momente \mathfrak{M} widerstehendes Kräftepaar $D r \sin \varphi = \mathfrak{M}$.

Fig. 276.



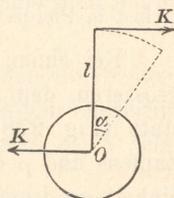
Nun ist $\operatorname{tg} \varphi = f$; weil aber bei geschmierten Drehzapfen, wie wir sie hier im Auge haben, fast stets $f \leq 0,1$ also $\varphi \leq 6^\circ$ und $\cos \varphi \geq 0,995$, so ist bei derartigen kleinen Winkeln $\sin \varphi$ mit

genügender Annäherung gleich $\operatorname{tg} \varphi = f$ zu setzen, so dass das für die gleichförmige Drehung erforderliche Kraftmoment, welches zugleich das Reibungsmoment bezeichnet, gesetzt werden darf

$$1) \quad \mathfrak{M} = Dfr.$$

Es entspricht z. B. $f = 0,1$ dem Werthe $\sin \varphi = 0,0995$. Unmittelbar ergibt sich Gl. 1 aus Fig. 275, wenn man daselbst, ohne Rücksicht auf den kleinen Verstoß gegen die Gleichung der wagerechten Kräfte, $N = D$ also $fN = fD$ einführt. Man denke sich also, um die Gl. 1 leicht zu merken, dass der Zapfendruck D eine Reibung fD und mit dem Hebelarm r ein Moment Dfr bedingt. Bringt man das Moment \mathfrak{M} auf die Form Kl (Fig. 277), legt die eine Kraft durch O , die andere ans Ende eines Halbmessers l und lässt sich die Kräfte K bei der Drehung stets mitdrehen, so verrichtet die in O angreifende Kraft keine Arbeit; die am Endpunkte des Armes l aber während eines Drehungswinkels α die Arbeit $Kl\alpha = \mathfrak{M}\alpha$. Es ist also die Arbeit eines Kräftepaars gleich seinem Momente mal dem Drehungswinkel. Die Zapfenreibung erfordert hiernach einen sekundlichen Arbeitsaufwand $= \mathfrak{M}\omega = Dfr\omega$.

Fig. 277.



Als Arbeitseinheit dient das Meterkilogramm. Bei regelmässig umlaufenden Maschinen pflegt man aber die in jeder Sekunde geleistete Arbeit in $\frac{\text{mkg}}{\text{s}}$ als Leistung, Arbeitsstärke oder Effekt $= E$ zu bezeichnen. Die Einheit der Leistung ist das Sekunden-Meterkilogramm $= 1 \frac{\text{mkg}}{\text{s}}$. Als grössere Einheit hat man die Pferdestärke (PS) $= 75 \frac{\text{mkg}}{\text{s}}$ eingeführt.

Ein lebendes Pferd leistet freilich eine sekundliche Arbeit von 75 mkg nur unter günstigen Umständen. Als aber James Watt i. J. 1782 Dampfmaschinen für Londoner Brauereien zu bauen hatte, kam es darauf an, diejenige Arbeit, die bisher von Pferden am Göpel verrichtet wurde, durch die Maschinen leisten zu lassen. Watt maß daher die von den Pferden geleistete Arbeit, und eine Dampfmaschine, welche die Leistung von 10 Pferden ersetzte, wurde eine 10pferdige Maschine genannt. Die dort benutzten Pferde waren sehr kräftig; auch wird Watt der Sicherheit wegen, damit seine Dampfmaschine keinen Misserfolg erlitt, die Arbeit der Pferde eher zu hoch als zu niedrig geschätzt haben. Auf diese Weise hat sich als Maschinen-Pferdestärke die

Leistung von $75 \frac{\text{mkg}}{\text{s}}$ eingebürgert. Es wird dafür auch nicht selten Pferdekraft gesagt; doch ist diese Bezeichnung wenig passend, da man mit dem Ausdrucke doch nicht eine Kraft, sondern eine sekundliche Arbeit bezeichnen will.

Für die Anzahl der Pferdestärken wird das Zeichen N benutzt, während n die Zahl der Umdrehungen in einer Minute bedeutet.

Beispiel: Ein Wasserrad wiegt einschl. des darin befindlichen Wassers 10 000 kg; seine Achse werde durch 2 Zapfen von $r = 0,1$ m Halbmesser getragen und mache 10 Umdrehungen in der Minute. Nimmt man $f = 0,1$ an, so ist, da die Summe der Zapfendrucke an beiden Tragzapfen 10 000 kg beträgt, das gesammte Reibungsmoment $\mathfrak{M} = 10\,000 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 100$ mkg. Bei $n = 10$ ist der Drehungswinkel in der Minute 20π , in der Sekunde also $20\pi : 60 = \frac{1}{3}\pi = 1,047$, daher die sekundl. Reibungsarbeit $E = 104,7 \frac{\text{mkg}}{\text{s}}$ und der Reibungsverlust in Pferdestärken $N = 104,7 : 75 = 1,396$ PS.

Bei einem neuen Tragzapfen findet die Berührung längs einer grösseren, dem Mittelpunktswinkel 2α entsprechenden Fläche ACB statt (Fig. 278). Ist l die Länge des Zapfens und p der Druck für die Flächeneinheit an irgend einer Stelle, so kommt auf ein Theilchen lds der Cylinderfläche der Druck $plds$ und die Reibung $fplds$. Das treibende Moment muss dann betragen

$$\mathfrak{M} = flr \int p ds.$$

Macht man die Voraussetzung, dass der Zapfen überall gleich stark anliegt, so wird

$$\mathfrak{M} = fplr \int ds = 2fplr^2\alpha.$$

Nun muss aber $D = pl \int \cos \vartheta ds$ sein, oder, weil $ds \cos \vartheta = dx$

$$D = pl \int dx.$$

Darin ist $\int dx$ die Sehne $AB = 2r \sin \alpha$, mithin

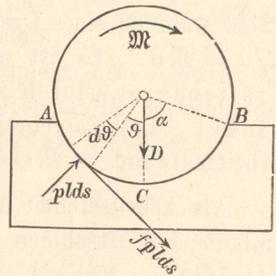
$$D = 2plr \sin \alpha.$$

Dann wird $\frac{\mathfrak{M}}{D} = fr \frac{\alpha}{\sin \alpha}$ oder

$$2) \quad \mathfrak{M} = fDr \frac{\alpha}{\sin \alpha} = fDr \frac{\widehat{AB}}{AB}.$$

Hiernach ist beim neuen Zapfen, weil wegen des theilweise keilförmigen Einpressens die Summe der Normaldrücke grösser ist als D ,

Fig. 278.



auch die Reibung grösser als beim eingelaufenen Zapfen, u. zw. im Verhältnisse des Bogens zur Sehne.

$$\alpha = 0 \text{ giebt wieder } \mathfrak{M} = Dfr;$$

$$\alpha = 1/2 \pi \text{ aber } \mathfrak{M} = Dfr \cdot 1/2 \pi = 1,57 Dfr.$$

Die Reibungswiderstände geben nach senkrechter oder wagerechter Richtung zerlegt, Seitenkräfte, die in senkrechter Richtung die Summe Null liefern, in wagerechter Richtung aber nicht. Daher besteht bei vorstehender Ableitung ein ähnlicher kleiner Verstoss gegen die Gleichung der wagerechten Kräfte wie bei Benutzung der Fig. 275 zur schnellen Entwicklung der Gl. 1.

Eine diesen Umstand berücksichtigende schärfere aber umständlichere Behandlung ergibt wiederum, dass für f eigentlich $\sin \varphi$ gesetzt werden müsste.

Beim Zapfen im Keillager (Fig. 279) werden die beiden Reibungswiderstände fN und fN_1 wiederum die Zapfen einseitig nach rechts hinüber drücken, in Folge dessen N_1 etwas $> N$ sein muss. Nimmt man aber trotzdem annäherungsweise $N_1 = N$ an, so ergibt sich in lothrechter Richtung

$$2 N \sin \delta = D, \text{ also } 2 N = \frac{D}{\sin \delta},$$

$$3) \quad \text{und} \quad \mathfrak{M} = 2 f N r = \frac{D f r}{\sin \delta}.$$

Der Ersatz des eingelaufenen cylindrischen Lagers durch das Keillager bewirkt daher, dass wegen des keilförmigen Einpressens \mathfrak{M} grösser wird als beim cylindrischen Lager, dass man aber, wie bei der Bewegung in Keilnuthen (S. 197), statt f einfach den grösseren Werth $f : \sin \delta$ zu setzen hat. $\delta = 30^\circ$ giebt $f : \sin \delta = 2 f$, entsprechend einer Verdoppelung des Reibungsmoments.

Mit Rücksicht auf den Unterschied zwischen N und N_1 muss stattfinden

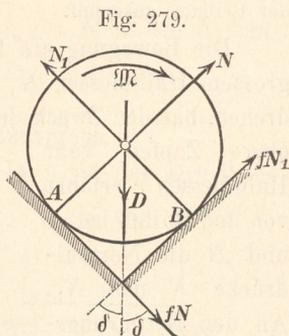
1. in wagerechter Richtung

$$0 = N \cos \delta + f N \sin \delta - N_1 \cos \delta + f N_1 \sin \delta;$$

2. in senkrechtem Sinne

$$D = N \sin \delta - f N \cos \delta + N_1 \sin \delta + f N_1 \cos \delta;$$

3. $\mathfrak{M} = f (N + N_1) r.$



Die ersten beiden Gleichungen lassen sich ordnen:

$$0 = -(N_1 - N) \cos \delta + (N + N_1) f \sin \delta$$

$$D = (N_1 - N) f \cos \delta + (N + N_1) \sin \delta.$$

Multiplicirt man die erstere dieser Gleichungen mit f , so entsteht durch Zusammenzählen

$$D = (N + N_1) (1 + f^2) \sin \delta \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{M} = \frac{D f r}{\sin \delta (1 + f^2)}.$$

$$\text{Darin ist } \frac{f}{1 + f^2} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sec^2 \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos^2 \varphi = \sin \varphi \cos \varphi = \frac{\sin 2 \varphi}{2}$$

$$\text{also } \mathfrak{M} = D r \frac{\sin 2 \varphi}{2 \sin \delta}.$$

Bei $f = 0,1$ kann aber f^2 gegen 1 vernachlässigt oder $\sin 2 \varphi = 2 \operatorname{tg} \varphi$ gesetzt werden, so dass dann wieder als Annäherung Gleichung 3 entsteht.

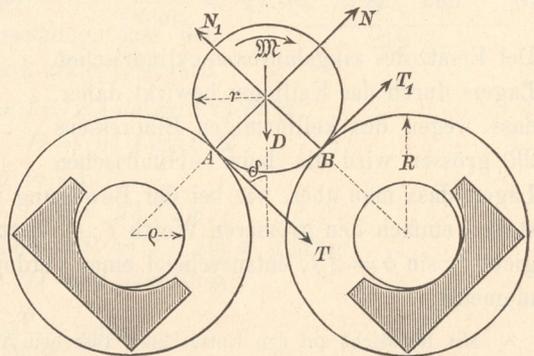
Dem Nachtheile der Vergrößerung der Reibung durch Benutzung des Keillagers steht der Vortheil gegenüber, dass der Zapfen im Keillager auch nach erfolgter Abnutzung immer noch eine sichere Führung findet, während er im eingelaufenen cylindrischen Lager um das Maß des Spielraumes hin und her schleudern kann. Das Keillager wird deshalb besonders bei Mess-Instrumenten angewandt, bei denen es mehr auf sichere Lage als auf Kleinheit der Reibung ankommt.

Die Bewegung auf Reibungsrollen (Fig. 280) von möglichst grossem Halbmesser R , welche sich um Zapfen vom Halbmesser ϱ drehen, hat den Zweck der Verminderung des Reibungsmoments. Der obere Zapfen vom Halbmesser r erfährt von den Rollen bei A und B die Normaldrücke N und N_1 . An den Berührungstellen A und B findet aber kein Gleiten statt, vielmehr haben die Rollen dort dieselbe Umfangsgeschwindigkeit wie die Zapfen; daher

tritt an diesen Stellen nicht der Gleitwiderstand fN und fN_1 auf, sondern Reibungswiderstände T und T_1 , die im Allgemeinen kleiner sind. Es wird

$$\mathfrak{M} = (T + T_1) r.$$

Fig. 280.



Die Kräfte T und T_1 wirken auf die Rollen im entgegengesetzten Sinne wie auf den Zapfen und bewirken die gleichmässige Drehung der Rollen, haben also deren Zapfenreibung zu überwinden.

Die thatsächliche Ungleichheit von N und N_1 würde in derselben Weise sich geltend machen wie im vorigen Falle; sie hat auf das wirkliche Ergebnis keinen nennenswerthen Einfluss, soll daher der Einfachheit wegen vernachlässigt werden.

Die Drücke $N = N_1$ bilden (ebenfalls umgekehrt) die Zapfendrucke in den Lagern der Rollen, erzeugen dort die Reibungsmomente $Nf\varrho$ und müssen durch die Momente der Umfangskräfte $T = T_1$ überwunden werden. Daher wird $TR = Nf\varrho$, $T = Nf\frac{\varrho}{R}$ und $\mathfrak{M} = 2 Nf\frac{\varrho}{R}r$. Am Zapfen liefert aber die Gleichung der lothrechten Kräfte wieder $D = 2 N \sin \delta$, wenn δ der Winkel ist, den die Tangenten in A und B mit der lothrechten Mittellinie bilden; hiernach wird

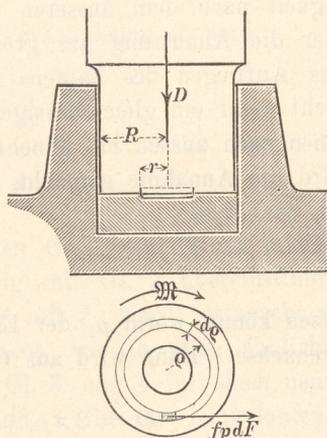
$$4) \quad \mathfrak{M} = \frac{Dfr}{\sin \delta} \frac{\varrho}{R}.$$

Damit dies kleiner werde als Dfr , muss $\varrho : R < \sin \delta$ sein. $\sin \delta = 1/2$ und $\varrho : R = 1/6$ geben $\mathfrak{M} = \frac{1}{3} Dfr$.

b) Reibungsmoment eines Stützzapfens.

Beim Stütz- oder Spurzapfen (Fig. 281) wirkt der Druck D in der Achsenrichtung desselben. Die Berührung mit der Spurplatte des Lagers erfolge (der Allgemeinheit wegen) in einer Ringfläche der Halbmesser r und R . Zeichnet man im Grundriss einen schmalen Ring vom Halbmesser ϱ und der Breite $d\varrho$, so kommt auf ein Theilchen dF desselben ein Druck $p dF$, wenn p der Druck für die Flächeneinheit. Dieser Druck liefert eine Reibung $f p dF$ und ein Reibungsmoment $d\mathfrak{M} = f p dF \varrho$. Da man annehmen darf, dass im ganzen Umkreise dieses Ringes p denselben Werth haben wird, so kann

Fig. 281.



man dF sogleich als die Ringfläche $2 \varrho \pi d\varrho$ einführen und erhält als gesamntes Reibungsmoment

$$1) \quad \mathfrak{M} = 2 \pi f \int_r^R p \varrho^2 d\varrho.$$

Ausserdem muss, da der schmale Ring den Druck $p 2 \pi \varrho d\varrho$ aufnimmt,

$$2) \quad D = 2 \pi \int_r^R p \varrho d\varrho \quad \text{sein.}$$

Beim neuen Zapfen nimmt man den Druck p überall gleich an,

daher $p = \frac{D}{(R^2 - r^2) \pi}$ und

$$3) \quad \mathfrak{M} = \frac{2 D f}{R^2 - r^2} \int_r^R \varrho^2 d\varrho = \frac{2}{3} D f \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$$

Ist die Berührungsfläche ein voller Kreis ($r = 0$), so wird

$$4) \quad \mathfrak{M} = \frac{2}{3} D f R,$$

also kleiner als beim Tragzapfen. Es kommt dies daher, dass, während beim Tragzapfen die ganze Reibung Df an dem vollen Halbmesser als Hebelarm wirkt, hier die Hebelarme der Reibungswiderstände im Allgemeinen kleiner sind als der äussere Halbmesser.

Beim eingelaufenen Zapfen sind die Verhältnisse noch günstiger. Mit der gleitenden Bewegung des Zapfens ist nämlich eine Abnutzung, ein fortwährendes Abschleifen verbunden, und da die Gleitgeschwindigkeit nach dem äusseren Umfange hin zunimmt, so wird auch hier die Abnutzung am grössten ausfallen; in Folge dessen wird das Aufliegen des Zapfens auf der Spurplatte nach einiger Zeit nicht mehr ein gleichmässiges sein; es wird der Einheitsdruck von innen nach aussen hin abnehmen. Über die Veränderlichkeit von p wird die Annahme gemacht, dass p mit ϱ umgekehrt proportional sei, dass man

$$5) \quad p = \frac{p_1}{\varrho}$$

setzen könne, worin p_1 der Einheitsdruck im Abstände Eins von der Drehachse. Dann wird aus Gl. 2:

$$D = 2 \pi p_1 \int_r^R d\varrho = 2 \pi p_1 (R - r),$$

aus Gl. 1 aber:

$$\mathfrak{M} = 2\pi f p_1 \int_r^R \varrho d\varrho = \pi f p_1 (R^2 - r^2).$$

Theilt man diese Gleichung durch die vorhergehende, so wird

$$\mathfrak{M} : D = 1/2 f (R + r) \quad \text{also}$$

$$6) \quad \mathfrak{M} = 1/2 D f (R + r).$$

Es ist jetzt offenbar $1/2 (R + r)$ der mittlere Hebelarm der Reibung. Für volle Kreisfläche ($r = 0$) wird

$$7) \quad M = 1/2 D f R.$$

Beim kegelförmigen Stützzapfen (Fig. 282) möge die Berührungsfläche von C bis B sich erstrecken. Ist dF ein Flächentheilchen derselben mit dem Einheitsdrucke p , so wird $\mathfrak{M} = f \int p dF \varrho$. Da aber $p dF$ mit der Wagerechten den Winkel δ bildet, so ist

$$D = \sin \delta \int p dF.$$

Das Flächentheilchen dF bildet mit der wagerechten Grundrissebene den Winkel $90^\circ - \delta$ nennt man dF' den Grundriss von dF , so wird $dF' = dF \cos(90^\circ - \delta) = dF \sin \delta$. Hiernach wird

$$D = \int p dF' \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{M} = \frac{f}{\sin \delta} \int p dF' \varrho.$$

Da nun dF' mit $2\varrho \pi d\varrho$ eingeführt werden kann, so wird

$$\mathfrak{M} = \frac{2\pi f}{\sin \delta} \int_r^R p \varrho^2 d\varrho \quad \text{und}$$

$$D = 2\pi \int_r^R p \varrho d\varrho$$

Vergleicht man diese Werthe mit den Gl. 1 und 2, so erkennt man, dass der Ausdruck für D völlig mit Gl. 2 übereinstimmt, während in dem Werthe für \mathfrak{M} nur f mit $f : \sin \delta$ vertauscht ist als Folge des kegelförmigen Einpressens, wie in allen ähnlichen Fällen. Daher muss sowohl in den Gl. 3 und 4 für einen neuen Zapfen, sowie auch in den Gl. 6 und 7 für den eingelaufenen Zapfen f vertauscht werden mit $f : \sin \delta$.

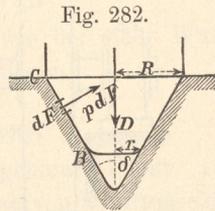


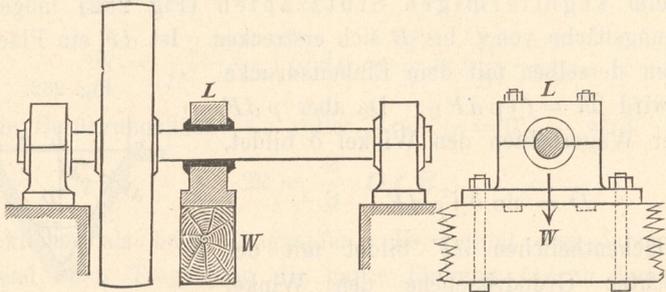
Fig. 282.

Der kegelförmige Zapfen verursacht also mehr Reibung als der ebene Stützzapfen, gewährt aber auch, wie das Keillager, den Vortheil einer sicheren Führung, wogegen der Stützzapfen mit ebener Reibungsfläche eine solche nicht bietet, weil an der cylindrischen Seitenwand des Lagers sich Spielraum befindet oder bilden muss.

c) Hirn'sche Reibungswaage.

Die vom elsässischen Ingenieur Adolf Hirn im Jahre 1854 ersonnene Vorrichtung (Fig. 283 und 284) dient zur Ermittlung

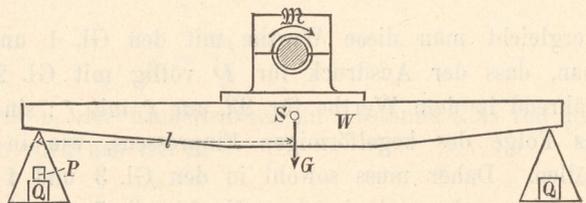
Fig. 283.



der Reibungsziffer f eines Zapfenlagers durch Abwägen. Auf einer Welle, die von einer Maschine etwa mittels Riemscheiben in gleichmässige Drehung versetzt wird, befindet sich der zu untersuchende Lagerkörper L , der aber nicht etwa zur Stützung der Welle dient, sondern an der Welle hängt. Unten an dem Lagerkörper ist ein Waagebalken W befestigt, an dessen gleichen Armen Waagschalen hängen. Die Waagschalen werden mit Gewichten beschwert, so dass der für die Versuche gewünschte Zapfendruck D entsteht, welcher das Reibungsmoment Dfr erzeugt. Dieses Moment, welches

vom Lager auf den Zapfen als ein der Drehung entgegen gerichtetes Moment ausgeübt wird, hat nach dem Gesetze der

Fig. 284.



Wechselwirkung das Bestreben, den Lagerkörper bei der Drehung

mitzunehmen, den Waagebalken also schräg zu stellen. Diesem Bestreben wirkt man entgegen, indem man in der linksseitigen Waagschale ein Übergewicht P anbringt (Fig. 284) und dieses so regelt, dass der Balken wagerecht einspielt. Der Zapfendruck beträgt $D = 2Q + P + G$, wenn G das Eigengewicht des Lagers mit dem Balken. Das Reibungsmoment beträgt also $M = (2Q + P + G)fr$ und wird gemessen durch das Moment des Übergewichtes P , d. h. $M = Pl$. Das ergibt

$$f = \frac{Pl}{(2Q + P + G)r}.$$

Beispiel: Bei $l = 1$ m, $r = 0,05$ m, $G = 100$ kg; $Q = 2000$ kg sei das Übergewicht $P = 2,0$ kg; dann ist $f = \frac{2,0 \cdot 1}{(4000 + 102) 0,05} = 0,0098$.

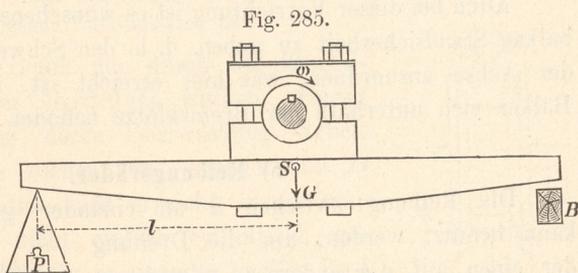
Damit der Balken gut einspiele, muss, wie bei einer Waage, der Schwerpunkt S unterhalb der Drehachse liegen.

d) Der Bremszaum von Prony.

Der Grundgedanke der vom franz. Ingenieur Prony 1821 ersonnenen Vorrichtung zum Messen der Leistung von Kraftmaschinen ist dem der Reibungswaage ähnlich.

Man hebt nämlich die Triebkraft der zu untersuchenden Maschine durch einen Reibungswiderstand auf und misst diesen mittels einer Waage. Da es in diesem Falle nur darauf ankommt, den ganzen Betrag der Reibung zu messen,

es aber nicht nöthig ist, diese, wie bei der Reibungswaage, nachträglich in die Faktoren f und D zu zerlegen, so ist es auch nicht erforderlich, die Reibung durch eine Belastung zu erzeugen; vielmehr kann man sie einfacher durch Zusammenschrauben zweier Bremsklötze hervorbringen (Fig. 285),



Auf der Welle der Kraftmaschine befestigt man eine Brems Scheibe und bringt auf dieser den Bremszaum an, dessen Schrauben vorläufig schwach angezogen werden. Dann setzt man die Kraftmaschine

etwa eine Dampfmaschine, allmählich in Gang und zieht die Schrauben stärker an; die an dem Umfange der Scheibe entstehende Reibung hat nun das Bestreben, den Zaum mitzunehmen, in Folge dessen sich der Waagebalken unten rechts auf eine als Hindernis dienende Schwelle B legt. Man bringt sodann die Dampfmaschine in den Zustand, in welchem sie beim regelrechten Betriebe arbeiten soll, zieht also die Bremsschrauben stärker an, wenn die Welle zu schnell läuft, und umgekehrt. Hat man auf diese Weise erreicht, dass die Welle die vorgeschriebene Zahl von n Umdrehungen in der Minute ausführt, so wird jetzt offenbar, weil ein regelmässiger Gang stattfindet, die ganze Arbeit der Maschine durch den Bremszaum in Reibung umgewandelt. Belastet man nun die linksseitige Waagschale mit einem Gewichte P (einschliesslich der Waagschale) in dem Masse, dass der Balken sich rechts von der Schwelle abhebt und wagerecht einspielt, so ist Pl das Mafs des an der Scheibe wirkenden Reibungsmomentes \mathfrak{M} . Die sekundliche Arbeit desselben beträgt mithin $\mathfrak{M} \omega = Pl \omega$, oder, weil $\omega = \frac{2n\pi}{60}$ ist und $75 \frac{\text{mkg}}{\text{s}}$ eine Pferdestärke ausmachen, es ist die Anzahl N der Pferdestärken der Maschine

$$N = Pl \frac{n\pi}{30 \cdot 75}.$$

Beispiel: Ist $l = 2,5 \text{ m}$; $P = 200 \text{ kg}$; $n = 30$, so wird

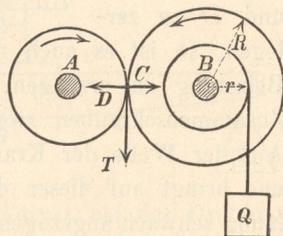
$$N = \frac{200 \cdot 2,5 \cdot 30 \cdot \pi}{30 \cdot 75} = 20,9 \text{ PS}.$$

Auch bei dieser Vorrichtung ist es wünschenswerth, dem Waagebalken Standsicherheit zu geben, d. h. den Schwerpunkt S unterhalb der Achse anzuordnen, was hier erreicht ist, indem der schwere Balken sich unterhalb der Bremsklötze befindet.

e) Reibungsräder.

Die Reibung zwischen 2 an einander gepressten Scheiben kann benutzt werden, um die Drehung der einen auf die andere zu übertragen. A (Fig. 286) sei die treibende, B die mitzunehmende Welle. Auf beiden bringt man Scheiben an, die sich bei C berühren. Lasse man die Scheiben mittels zahnartiger Vorsprünge in einander greifen, so würde dadurch eine Mitnahme der Welle B

Fig. 286.



erzwungen. Lässt man aber die Vorsprünge fort, so kann auch die Reibung die Wirkung der Zähne ersetzen.

An der Welle B möge ein Widerstandsmoment \mathfrak{M} der Drehung entgegenwirken; dieses kann man durch eine Last Q , welche an einer Trommel vom Halbmesser r emporgewunden wird, zur Darstellung bringen, indem dann $\mathfrak{M} = Qr$. Zur Überwindung des Momentes ist eine Umfangskraft T bei C erforderlich, für welche $TR = Qr$ also $T = Qr : R$ wird. Ist nun D der Druck zwischen den Scheiben, so würde demselben beim Gleiten die Reibung fD entsprechen. Hier soll aber kein Gleiten stattfinden, vielmehr sollen die Scheiben stets gleiche Umfangsgeschwindigkeit haben. Unter diesen Umständen ist dann die zur Wirkung kommende Reibung $T \leq fD$, mithin

$$1) \quad Q \frac{r}{R} \leq fD \quad \text{oder} \quad D \geq \frac{Q}{f} \frac{r}{R}.$$

Das Zeichen $=$ in Gl. 1 würde auch noch für ein Gleiten der Scheiben auf einander gelten; soll dies ausgeschlossen sein, also ein sicheres Mitnehmen der Welle B erfolgen, so muss für D das Zeichen $>$ angewendet werden.

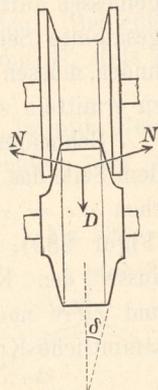
Beispiel: Ist das Widerstandsmoment $\mathfrak{M} = 100 \cdot 0,2 = 20 \text{ mkg}$, $R = 0,6 \text{ m}$, $f = 0,1$ für Gusseisen auf Gusseisen, so wird $D > \frac{20}{0,1 \cdot 0,6} = 333 \text{ kg}$. Bei $D = 333 \text{ kg}$ würde leicht noch ein Gleiten eintreten können, so dass die Last Q abwärts gehen könnte; man muss D um ein gewisses Maß $> 333 \text{ kg}$ nehmen, damit man Sicherheit gegen Zufälligkeiten hat.

Der Druck D kann nur durch die Zapfenlager auf die Räder übertragen werden, erzeugt daher Zapfenreibung, deren Überwindung Arbeit kostet. Man muss suchen, das erforderliche D klein zu machen; dies wird erreicht, indem man die Reibungsräder nicht einfach cylindrisch gestaltet, sondern keilförmig in einander greifen lässt (Fig. 287), wodurch eine Vergrößerung der Reibung entsteht. Ist wieder der halbe Keilwinkel δ , so wird $D = 2N \sin \delta$, die mögliche Reibung

$$2) \quad 2fN = \frac{Df}{\sin \delta} > \frac{Qr}{R} \quad \text{oder} \quad D > Q \frac{\sin \delta}{f} \frac{r}{R},$$

d. h. kleiner als nach Gl. 1. Dass man bei der jetzigen Anwendung

Fig. 287.



der sog. Keilnuthenräder mehrere Keilnuthen neben einander anordnet, hat mit der Wirkung nichts zu thun.

Beispiel: Macht man $2\delta = 30^\circ$, so ist $\sin \delta = 0,26$, und es wird mit den sonstigen Zahlen des vorhergehenden Beispiels der untere Grenzwert von D : $333 \cdot 0,26 = 87 \text{ kg}$, also nur etwas mehr als $\frac{1}{4}$ des vorigen.

f) Seilreibung.

1. Über einen Cylinder vom Halbmesser r , der sich gleichförmig um eine Achse O dreht (Fig. 288), sei ein biegsames Seil, ein biegsamer Faden, Riemen oder dgl. gelegt, bei A befestigt und bei B am freien Ende mit einer Kraft S_1 gespannt, dann drückt das Seil gegen den Cylinderumfang; an einem Bogen-theilchen $ds = r d\vartheta$ entsteht ein Normaldruck dN und ein Gleitwiderstand $f dN$, der auf den sich rechts drehenden Cylinder nach links, auf das Seil aber nach rechts wirkt, das Seil also mitzunehmen strebt. In dem bei A befestigten Seilstücke möge

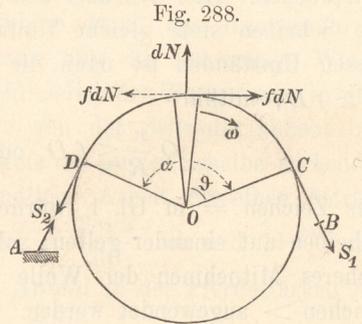


Fig. 288.

eine Spannkraft S_2 herrschen, dann befindet sich das Seil unter Einwirkung der an ihm auftretenden Kräfte S_1, S_2 Gruppe $[dN]$ und Gruppe $[f dN]$ im Gleichgewichte, so dass die Momentengleichung in Bezug auf O liefert (weil die dN -Kräfte durch O gehen): $S_1 r + r f \sum dN = S_2 r$, d. h. die gesammte Seilreibung $f \sum dN$ wird gemessen durch den Unterschied der Seilkräfte $S_2 - S_1$. Um also die gesammte Seilreibung zu finden, müssen wir $S_2 - S_1$ zu ermitteln suchen.

Schneiden wir aus dem Seile das Bogen-theilchen $ds = r d\vartheta$ heraus (Figur 289), so wirken ausser den Kräften dN

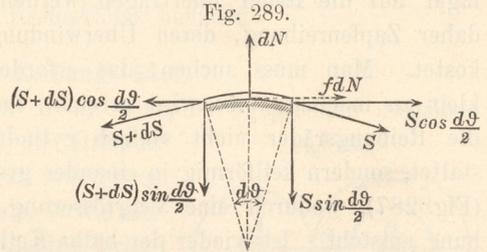


Fig. 289.

und $f dN$ noch die Spannkräfte S und $S + dS$. Zerlegt man sämmtliche Kräfte \parallel und \perp zu dN , so verlangt das Gleichgewicht

$$dN = (S + S + dS) \sin \frac{1}{2} d\vartheta$$

$$f dN = dS \cos \frac{1}{2} d\vartheta,$$

oder weil $\sin \frac{1}{2} d\vartheta = \frac{1}{2} d\vartheta$, $\cos \frac{1}{2} d\vartheta = 1$ und $dS d\vartheta$ unendlich klein zweiter Ordnung:

$$dN = S d\vartheta$$

$$f dN = dS, \text{ mithin}$$

$$f d\vartheta = dS : S.$$

Durch Integration entsteht:

$$f\vartheta = \ln S + C.$$

$\vartheta = 0$ entspreche dem Punkte C (Fig. 288) und der Spannkraft S_1 , $\vartheta = \alpha$ dem Punkte D und der Spannkraft S_2 , dann wird $f\alpha = \ln S_2 + C$; $0 = \ln S_1 + C$, mithin aus beiden:

$$2) \quad f\alpha = \ln \left(\frac{S_2}{S_1} \right) \text{ oder } \frac{S_2}{S_1} = e^{f\alpha},$$

und die ganze Seilreibung

$$3) \quad S_2 - S_1 = S_1 (e^{f\alpha} - 1).$$

Dabei ist besonders bemerkenswerth, dass das Verhältniß der Kräfte unabhängig ist von r , nur abhängig von der Reibungsziffer und dem dem umspannten Bogen entsprechenden Mittelpunktswinkel α .

Wenn der Cylinder ruht, so wird die Summe aller zur Wirkung kommenden Reibungswiderstände $\int dT$ ebenfalls durch $S_2 - S_1$ gemessen; es ist dann aber

$$S_2 : S_1 < e^{f\alpha} \text{ und auch}$$

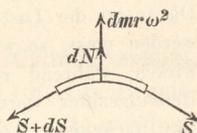
$$S_2 - S_1 < S_1 (e^{f\alpha} - 1).$$

Für $S_2 = S_1$ würde keine Reibung ausgeübt werden. Bei einem Unterschiede zwischen S_1 und S_2 bezeichnen wir mit S_2 stets die grössere der Kräfte.

2. Ist das Seil nicht in Ruhe, sondern wird es mit gleichbleibender Geschwindigkeit $v = r\omega$ über den ruhenden oder mit anderer Geschwindigkeit sich drehenden Cylinder fortgezogen, so heben sich an einem Bogenstückchen $r d\vartheta$ die normal gerichteten Kräfte nicht auf, sondern es geschieht dies erst, nachdem die Centrifugalkraft $dm r \omega^2$ hinzugefügt ist (Fig. 290). Es wird dann

$$dN = S d\vartheta - dm r \omega^2.$$

Fig. 290.



Darin ist $dm = \frac{\gamma}{g} Fr d\vartheta$, wenn F der Querschnitt, γ die Dichte des Fadens, Riemens oder Seiles. Die andere Gleichung $f dN = dS$ bleibt unverändert; weil nun

$$d\left(S - \frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2\right) = dS,$$

so wird

$$fd\vartheta = \frac{d\left(\dot{S} - \frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2\right)}{S - \frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2},$$

$$\text{also } f\vartheta = l\left(S - \frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2\right) + C,$$

oder zwischen Grenzen genommen:

$$fa = l \frac{S_2 - \frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2}{S_1 - \frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2}.$$

Daraus entsteht:

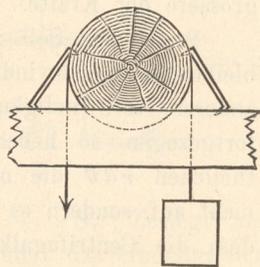
$$S_2 - \frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2 = \left(S_1 - \frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2\right) e^{fa}, \text{ oder}$$

$$4) \quad S_2 - S_1 = \left(S_1 - \frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2\right) (e^{fa} - 1).$$

In den meisten Fällen ist der Einfluss des Gliedes $\frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2$ unbedeutend; nur bei grossen Geschwindigkeiten $r\omega$ verdient er Berücksichtigung (vergl. S. 238).

Beispiel: Ein runder Baum sei auf einer Schwelle festgelegt (Fig. 291) und ausserdem durch Zimmermannshaken gehalten. Ein Seil sei derartig hinübergeschlungen, dass $\alpha = \pi$. An der rechten Seite hänge eine Last von 1000 kg. Es soll berechnet werden, mit welcher Kraft links gezogen werden muss, um die Last hinauf zu ziehen. Da ausser der Last noch die Reibung überwunden werden muss, so wird links die grössere Kraft S_2 wirken, während rechts $S_1 = 1000$ kg ist. Die Reibungsziffer werde für ein Hanfseil auf Holz $f = 1/3$ angenommen.

Fig. 291.



$$S_2 : S_1 = e^{1/3 \pi}.$$

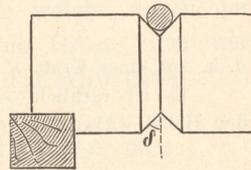
Nimmt man von beiden Seiten der Gleichung die Briggschen Logarithmen, so wird $\log\left(\frac{S_2}{S_1}\right) = \frac{1}{3} \pi \log e = 1,047 \cdot 0,434 = 0,4544$. Dazu gehört eine Zahl $2,85 = S_2 : S_1$. Mithin wird $S_2 = 2850$ kg; die Seilreibung beträgt 1850 kg, ist daher sehr gross. Diese Vorrichtung eignet sich daher nicht als Aufzugsmaschine, um so besser aber zum Hinablassen einer Last, wobei die Reibung günstig wirkt. Beim Hinablassen wirkt die kleinere Kraft S_1 auf der linken Seite, während die Last jetzt $S_2 = 1000$ kg wird. Wiederum ist $e^{f\alpha} = 2,85$, daher $S_1 = 1000 : 2,85 = 351$ kg. Jetzt kommt also die Seilreibung im Betrage von $1000 - 351 = 649$ kg der hinablassenden Kraft zu Hülfe. Die Zugkraft an der linken Seite darf zwischen den weiten Grenzen 351 und 2850 kg sich bewegen, ohne dass ein vorhandener Ruhezustand gestört werden würde. Da die Reibung das Bestreben hat, den Balken zu drehen, so muss er hiergegen sicher befestigt sein.

Zum Festhalten oder bequemen Hinablassen schwerer Lasten findet eine derartige Vorrichtung vielfache Anwendung. Die Reibung wird noch bedeutend vergrössert, wenn man den Winkel α des umspannten Bogens vergrössert. Man kann dadurch jedes beliebige Verhältnis $S_2 : S_1$ erreichen. Wir wollen berechnen, wie gross α werden muss, wenn $S_2 : S_1 = 1000$ sein soll, d. h. wenn man durch Anwendung von $S_1 = 1$ kg die Last von 1000 kg hinablassen will. Es muss $e^{1/3\alpha} = 1000$, d. h. in Logarithmen $1/3 \alpha 0,434 = 3$, oder $\alpha = 9 : 0,434 = 20,7$ sein. Da nun 1 Umwicklung einem Winkel 2π entspricht, so muss die Zahl der Umwickelungen $n = 20,7 : 2\pi = 3,3$ betragen. Wenn man also das Seil 3 Mal und dann noch $1/3$ oder vielleicht $1/2$ Mal umlegt, so wird das Ziel erreicht sein. Bei öfterem Umschlagen genügt schliesslich das Gewicht des überhängenden Seilendes zum Festhalten der Last.

Es ist für die Wirkung gleichgültig, ob der umspannte Bogen α sich auf einem Cylinder befindet, oder ob das Seil nach einander um mehrere Cylinder geschlungen ist; in letzterem Falle ist α die Summe der umspannten Bögen. Auf diesem Grundgedanken beruhen die Rettungsvorrichtungen bei Feuersgefahr, mittels deren Menschen aus einem brennenden Hause hinabgelassen werden können.

Erheblich vergrössert wird die Seilreibung noch, wenn man das (runde) Seil in eine Keilrinne (Fig. 292) legt, weil dann $f : \sin \delta$ an Stelle von f zu setzen ist.

Fig. 292.



g) Bandbremse.

Ein dünnes Bandeisen, welches man um einen Cylinder spannt, um an diesem Reibungswiderstand zu erzeugen, heisst Bremsband und findet als Bandbremse bei Winden vielfache Anwendung zum gleichmässigen Hinablassen von Lasten. An einer Windetrommel

vom Halbmesser r (Fig. 293) hänge das Gewicht Q . Mit der Trommel fest verbunden ist die Bremsscheibe vom Halbmesser R . Das umgelegte Bremsband sei mit dem einen Ende am Gestelle befestigt, z. B. an dem Drehpunkte A des Bremshebels, das andere Ende des Bandes sei mit dem Hebel verbunden. Am Ende des Hebels wirke aufwärts die Kraft K , welche in dem Bande eine Spannkraft S_1 auf der rechten Seite hervorruft. Bei der Drehung links herum entsteht an der Scheibe eine der Drehung entgegen wirkende Bandreibung $S_2 - S_1 = S_1 (e^{f\alpha} - 1)$, welche, mit R multiplicirt, dem Momente Qr der Last gleich sein muss. Ist nun b der Hebelarm von S_1 (aber nicht als Länge am Hebel, sondern rechtwinklig zu S_1 gemessen), so wird $Ka = S_1 b$,

$$\text{mithin } K = \frac{Q}{e^{f\alpha} - 1} \frac{r}{R} \frac{b}{a}.$$

Beispiel: Der Winkel des umspannten Bogens sei $\alpha = 0,7 \cdot 2\pi$, die Reibungsziffer für Bandeisen auf gusseiserner Scheibe $f = 0,18$, $r : R = 1/2$, $a : b = 10$; dann wird $e^{\alpha f} = 2,21$ und

$$K = \frac{Q}{2,21 - 1} \frac{1}{2} \frac{1}{10} = \frac{Q}{24,2},$$

d. h. mit einer Kraft $K = 10$ kg kann man eine Last $Q = 242$ kg hinablassen.

Es ist rätlich, von den beiden Kräften des Bandes die kleinere S_1 auf den Hebel wirken, die grössere S_2 aber vom festen Gestell aufnehmen zu lassen.

h) Riemenscheiben.

Nützliche Anwendung findet die Seilreibung auch bei den Riemenscheiben, welche zur Übertragung der Bewegung von einer Welle auf eine ihr parallele Welle dienen, wenn die Entfernung der Wellen so gross ist, dass eine unmittelbare Übertragung mittels Reibungsräder oder Zahnräder nicht zweckmässig erscheint (Fig. 294). Der biegsame

Fig. 293.

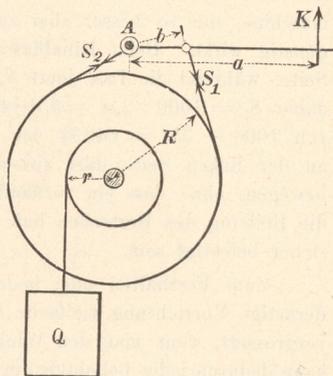
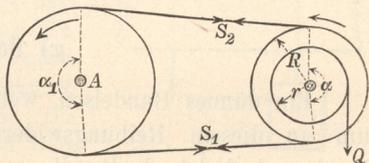


Fig. 294.



Körper, der um die Umfänge der Scheiben gelegt wird, ist hier meist ein Lederriemen. Die Welle A drehe sich links herum; der Riemen sei genügend angespannt, so dass er auf den Scheiben nicht gleitet, dass vielmehr beide Scheibenumfänge und der Riemen die übereinstimmende Geschwindigkeit v haben müssen. Der Drehung der rechtsseitigen Welle setze sich ein Widerstandsmoment entgegen, welches wir wieder auf die Form $\mathfrak{M} = Qr$ bringen wollen (vergl. S. 231). Sind S_2 und S_1 die Spannkraften der Riementheile, so wird die ganze Seilreibung an der rechtsseitigen Scheibe stets gemessen durch $S_2 - S_1$, und für gleichmässige Drehung der rechtsseitigen Welle ist erforderlich

$$1) \quad S_2 - S_1 = Qr : R.$$

Da nun Riemen und Scheibe nicht auf einander gleiten, so ist

$$2) \quad S_2 - S_1 = \leq S_1 (e^{f\alpha} - 1),$$

oder durch Verbindung von Gl. 1 und 2:

$$S_1 = \geq Q \frac{r}{R} \frac{1}{e^{f\alpha} - 1}, \text{ wofür wir schreiben wollen:}$$

$$3) \quad S_1 = Q \frac{r}{R} \frac{1}{e^{f\alpha} - 1} + \Delta S;$$

darin ist ΔS der Überschuss an Spannkraft, welche wegen der Sicherheit gegen Gleiten nöthig ist, dessen Grösse aber nur durch Erfahrung bedingt wird. Aus Gl. 3 und 1 wird dann

$$S_2 = S_1 + \frac{Qr}{R} = \frac{Qr}{R} \left(\frac{1}{e^{f\alpha} - 1} + 1 \right) + \Delta S \text{ oder}$$

$$4) \quad S_2 = \frac{Qr}{R} \frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} + \Delta S.$$

Die Grösse α des Winkels des umspannten Bogens wirkt in günstigem Sinne auf die Verhinderung des Gleitens. Da nun die gleichen Kräfte S_1 und S_2 an beiden Scheiben wirken, die Winkel α und α_1 aber bei beiden Scheiben im Allgemeinen ungleich sind, so muss von den beiden Winkeln α und α_1 stets der kleinere in Rechnung geführt werden.

Beispiel: Für Lederriemen auf Gusseisenscheiben setzt man $f = 0,23$, sind ferner die beiden Scheiben gleich und daher $\alpha = \pi$, so wird

$$e^{f\alpha} = e^{0,23\pi} = 2,41.$$

Ist nun $R = 0,6 \text{ m}$, $\mathfrak{M} = 100 \cdot 0,2 = 20 \text{ mkg}$, so wird

$$S_1 = \frac{20}{0,6} \frac{1}{1,41} + \Delta S = 23,64 \text{ kg} + \Delta S.$$

$$S_2 = 23,64 \cdot 2,41 + \Delta S = 56,97 \text{ kg} + \Delta S.$$

Wie bei den Reibungsrädern der Druck D , so verursachen hier die Spannkraft S_1 und S_2 Zapfenreibungswiderstände in den Lagern. In ähnlicher Weise wie dort D , können hier S_1 und S_2 vermindert werden, wenn man den Riemen durch eine runde Schnur ersetzt und die Scheibe mit einer keilförmigen Rinne versieht (Fig. 295), so dass in Folge der Keilwirkung wiederum f mit $f : \sin \delta$ zu vertauschen ist. Man wähle δ so gross, dass das Seil sich in der Rinne nicht festklemmt, mache also $\delta > \varphi$, damit das Seil beim Ablaufen sich ohne erheblichen Widerstand aus der Rinne entfernt, nicht aber gewaltsam herausgezerrt werden muss.

Fig. 295.



Ist für Hanfseile in gusseisernen Rinnen $f = 1/3$, $\varphi = 18^\circ$, so ist $\delta = 30^\circ$ zulässig.

In den vorstehenden Rechnungen ist der Einfluss der Geschwindigkeit des Riemens auf Verminderung der Reibung nicht berücksichtigt. Für schnelllaufende Riemen ist an Stelle der Gl. 2 auf S. 233 zu setzen (nach Gl. 4, S. 234)

$$\left(S_1 - \frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2 \right) \left(e^{f\alpha} - 1 \right) \geq S_2 - S_1 = Q \frac{r}{R}.$$

Dadurch kommt dann zu den Werthen S_1 und S_2 nach Gl. 3 und 4, S. 237 noch der Summand $\frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2$ hinzu.

Hat z. B. ein Riemen von $0,5 \times 6 \text{ cm} = 3 \text{ qcm} = 0,0003 \text{ qm}$ Querschnitt eine Dichte von 900, so ist $\gamma F = 0,27$. Bei 15 m sekundl. Umfangsgeschwindigkeit wird dann $\frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2 = \frac{0,27 \cdot 15^2}{9,81} = 6,2 \text{ kg}$. Aus den Zahlen des vorstehenden Beispiels wird dann $S_1 = 23,64 + 6,2 + \Delta S$ und $S_2 = 57,37 + 6,2 + \Delta S$.

i) Seilrollen und Flaschenzüge.

Ist über eine Rolle (Fig. 296) ein völlig biegsamer Faden gelegt, der die Last Q trägt, so würde, wenn sich der Drehung der Rolle kein Widerstand entgegensezte, zur gleichmässigen Drehung kein Moment, also auch keine Seilreibung erforderlich sein, es

würde dann $K = Q$ hinreichen zum Hinaufziehen der Last. Nun findet aber ein Zapfendruck $D = Q + K$ statt, also ein Reibungsmoment

$\mathfrak{M} = Df \frac{d}{2}$, wenn d der Zapfendurchmesser, zu

dessen Überwindung eine am Umfange der Rolle angreifende Kraft $\frac{\mathfrak{M}}{r} = Df \frac{d}{2r} = \frac{Q + K}{2r} f d$

nöthig ist. Dies ist die auf den Rollenumfang bezogene Zapfenreibung Z . Diese Kraft kann von dem Seile nur durch die Seilreibung auf die Rolle

übertragen werden, oder es ist $K - Q = \frac{K + Q}{2r} f d$. Daraus entsteht

$$\frac{K}{Q} = \frac{1 + \frac{fd}{2r}}{1 - f \frac{d}{2r}}$$

Zur Vereinfachung multipliciren wir in Zähler und Nenner mit dem Zähler, erhalten

$$\frac{K}{Q} = \frac{1 + f \frac{d}{r} + \left(\frac{fd}{2r}\right)^2}{1 - \left(\frac{fd}{2r}\right)^2}$$

und vernachlässigen nun den kleinen Werth $\left(\frac{fd}{2r}\right)^2$ gegen die Einheit, so dass genau genug

$$1) \quad \frac{K}{Q} = 1 + f \frac{d}{r} \quad \text{wird.}$$

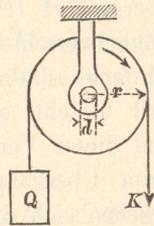
Man kann auch schreiben $K = Q + Z$, wo

$$2) \quad Z = Q f \frac{d}{r}$$

die auf den Rollenumfang bezogene Zapfenreibung, d. h. man kann (nach A. Ritter, Lehrbuch der technischen Mechanik, 2. Aufl., S. 365) die Sache so ansehen, als ob zu der Kraft $K_0 = Q$, die bei einer ideellen Rolle hinreichen würde, noch der Betrag Z hinzutreten muss.

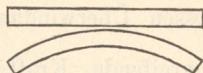
Ausser der Zapfenreibung muss aber auch noch der Seilbiegungswiderstand berücksichtigt werden. Wir haben bisher ein Seil angenommen, dessen Richtung stets mit der Richtung seiner

Fig. 296.



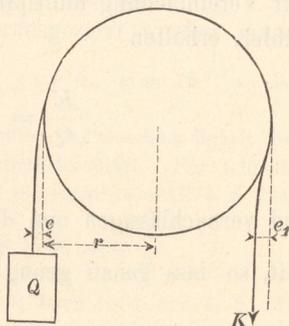
Spannkraft übereinstimmt, welches daher zu beiden Seiten der Rolle sich völlig tangential an diese legt. Wird aber ein wirkliches Seil aus der geraden Form in eine Krümmung übergeführt (Fig. 297), so müssen wegen der Längenverschiedenheit am inneren und äusseren Umfange die einzelnen Fasern, aus denen das Seil besteht, sich gegen einander verschieben, und dieser Verschiebung setzt sich ein Widerstand entgegen. Auch beim Übergange aus dem gekrümmten Zustande in den geraden ergeben sich die gleichen Widerstände.

Fig. 297.



Soll nun an der linken Seite der Rolle die Last Q aufgewunden werden, so geht das Seil nicht plötzlich aus der geraden Tangente in die Krümmung $1:r$ über, sondern es vertheilt diese Krümmungsänderung auf eine gewisse Länge, und die Folge davon ist, dass die Mittellinie des unteren Theils des Seiles um eine gewisse Grösse e von der Tangente nach aussen abweicht (Fig. 298). Auf der Ablaufseite erfolgt der Übergang aus der Krümmung $1:r$ in die Krümmung Null ebenfalls allmählich mittels einer Gegenkrümmung, und es folgt daraus eine Abweichung der Kraft K von der Tangente um die Grösse e_1 nach innen.

Fig. 298.



Die Biegungswiderstände haben dann dieselbe Einwirkung auf die Drehung der Rolle, als ob die Last Q an dem grösseren Hebelarm $r + e$, die treibende Kraft K aber an dem kleineren Hebelarm $r - e_1$ angreift, wobei man die Abstände e und e_1 gleich annehmen darf, daher wird

$$K(r - e) = Q(r + e) \quad \text{oder}$$

$$\frac{K}{Q} = \frac{r + e}{r - e} = \frac{1 + \frac{e}{r}}{1 - \frac{e}{r}},$$

wofür man, weil $e:r$ wieder ein kleiner Werth ist, schreiben kann (vergl. S. 239)

$$\frac{K}{Q} = 1 + \frac{2e}{r}.$$

Nennt man $Q \cdot 2 e : r = B$ den auf den Rollenumfang bezogenen Biegungswiderstand; so kann man den Einfluss dieses Umstandes wieder so auffassen, als ob zu $K_0 = Q$ wegen der unvollkommenen Biegsamkeit noch der Betrag B hinzutreten muss.

Die Grösse e in Metern ist von der Dicke und Beschaffenheit des Seiles abhängig. Nach Versuchen ist für Hanfseile von der Dicke δ (in Metern)

$$3) \quad e = 6,5 \delta^2, \text{ oder } B = Q \frac{13 \delta^2}{r}.$$

Werden nun durch die Wirkung der Zugkraft K bei gleichförmiger Drehung der Rolle Zapfenreibung und Biegungswiderstand zugleich überwunden, so kann man

$$4) \quad K = Q + Z + B = Q \left(1 + f \frac{d}{r} + \frac{13 \delta^2}{r} \right) \text{ setzen, oder}$$

$$5) \quad K = Q w,$$

wenn $w = 1 + f \frac{d}{r} + \frac{13 \delta^2}{r}$ ist; w heisst dann die Widerstandsziffer für Seilrollen.

Ist die Seildicke $\delta = 0,02 \text{ m}$, der Rollenhalmesser $r = 0,09 \text{ m}$, der Zapfendurchmesser $d = 0,03 \text{ m}$, $f = 0,12$, so wird

$$w = 1 + \frac{0,12 \cdot 0,03}{0,09} + \frac{13 \cdot 0,0004}{0,09} = 1 + 0,04 + 0,06 = 1,10.$$

Die Zapfenreibung vergrössert also die erforderliche Zugkraft um 4 %, der Biegungswiderstand um 6 %; der Abstand der Seilmitte von der Tangente beträgt $e = 6,5 \cdot 0,0004 = 0,0026 \text{ m} = 2,6 \text{ mm}$.

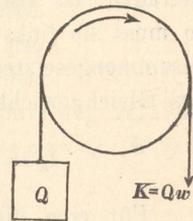
Um eine Last von 100 kg mittels einer solchen Rolle und eines solchen Seiles gleichmässig emporzuziehen, ist eine Kraft $K = 110 \text{ kg}$ erforderlich (Fig. 299). Beim Hinablassen der Last vertauschen Q und K ihre Rollen; das Verhältnis beider bleibt aber w , daher wird dann

$$K = Q : w = 100 : 1,1 = 90,9 \text{ kg}.$$

Bei einem über eine Rolle geführten Seil ist die Spannkraft in dem sich abwickelnden Seilstücke die grössere; das Verhältnis beider Spannkraften beträgt stets w .

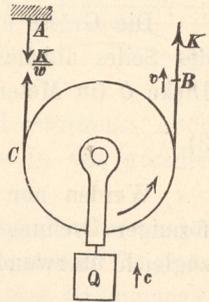
Streng genommen muss für jede gegebene Rolle mit Seil der Ausdruck w besonders berechnet werden. Da die Verhältnisse zwischen d , r und δ aber meist nicht sehr schwanken, wollen wir für fernere Beispiele mit Seilrollen $w = 1,1$ wählen.

Fig. 299.



Lose Rolle. Bei der sog. losen Rolle ist die Drehachse nicht fest gelagert; vielmehr ist das eine Ende des Seiles bei A (Fig. 300) befestigt; an dem anderen wird bei B gezogen, und die Last hängt an der Achse der Rolle. Beim gleichmässigen Aufwärtsziehen erfährt die Rolle eine aufwärts gerichtete Verschiebung mit der Geschwindigkeit c , welche sich mit der Umfangsgeschwindigkeit $r\omega$ im Punkte C derartig vereinigt, dass dort die Geschwindigkeit Null entsteht. Denn das Seil AC ruht, und da es auf der Rolle nicht gleitet, so muss auch der Punkt C der Rolle die Geschwindigkeit Null haben. Mithin ist $c = r\omega$. An der rechten Seite der Rolle addiren sich c und $r\omega$ zu der Geschwindigkeit $v = c + r\omega = 2c$, mit welcher der Punkt B des Seiles sich aufwärts bewegen muss. Die lose Rolle wälzt sich an dem Seile AC empor; die Bewegung ist eine Rollbewegung, bei der die einzelnen Punkte der Rolle Cykloiden beschreiben.

Fig. 300.



Das Verhältnis der Spannkraften des Seiles muss wieder w betragen; ist also rechts im ablaufenden Stücke die Spannkraft K , so muss sie links $K:w$ sein. Nach S. 219 müssen auch bei dieser zusammengesetzten Bewegung die Kräfte K und $K:w$ der Last Q das Gleichgewicht halten. Mithin wird

$$Q = K \left(1 + \frac{1}{w} \right) = K(1 + 0,91) = 1,91 K.$$

Für eine ideelle Rolle ohne Widerstände ist $w = 1$, mithin $Q = 2 K_0$. Der Wirkungsgrad ist, weil $v = 2c$:

$$\eta = \frac{Qc}{Kv} = \frac{Q}{2K} = \frac{2K_0}{2K} = \frac{K_0}{K} = \frac{1,91}{2} = 0,955.$$

Flaschenzug. Ein Achsgestell mit einer oder mehreren Rollen heisst Klobenzug oder kurzweg Kloben — auch eine Flasche (weil früher die Form der Kloben mit einer Flasche einige Ähnlichkeit hatte). Aus einer durch ein umgeschlungenes Seil oder Kette hergestellten Verbindung von festen und losen Kloben besteht der Flaschenzug. Sind mehrere Rollen in einem Kloben angeordnet, so bringt man diese jetzt meistens auf dieselbe Achse. In der Fig. 301 sind aber der Deutlichkeit wegen die Rollen unter einander gezeichnet.

Die in Wirklichkeit gleichen Rollen zeigen hier etwas verschiedene Grösse. Die Zahl der Rollen in jedem Kloben beträgt in der Zeichnung 2, allgemein sei sie n . Der obere Kloben ist in den Deckbalken befestigt, an dem unteren Kloben hängt die Last Q .

Beim Aufwinden drehen sich (Fig. 301) sämtliche Rollen links herum. Die bei B angreifende Kraft sei K , dann ist die Spannkraft in dem rechtsseitigen Seilstücke $K:w$, sie vermindert sich nach dem Übergange über die Rollen schrittweise auf $K:w^2$, $K:w^3$ und $K:w^4$. Das Verhältnis $v:c$ ist offenbar gleich der Zahl der Seilstücke, an denen der untere Kloben hängt, also 4 oder allgemein $2n$. Die Seile werden als sämtlich lothrecht angenommen, da die geringen Abweichungen keine Bedeutung haben. Rückt die Last um c aufwärts, so verkürzen sich die Seilstücke je um c , zusammen also um $4c$ bzw. $2nc$. Die gleiche Länge $v = 4c$ bzw. $v = 2nc$ muss daher bei B abwärts gezogen sein. Macht man durch einen Schnitt zwischen beiden Kloben den unteren frei, so verlangt dessen Gleichgewicht, dass die Last Q gleich der Summe der Kräfte der durchschnittenen Seile. Ohne Widerstände wären die Seilkräfte durchweg K_0 , daher $Q = 4K_0$ bzw. $= 2nK_0$, mithin ist wieder $v:c = Q:K_0$.

In Wirklichkeit ist

$$Q = K \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w^2} + \frac{1}{w^3} + \frac{1}{w^4} \right) = \frac{K}{w^4} (w^3 + w^2 + w + 1)$$

$$6) \quad = \frac{K}{w^4} \frac{w^4 - 1}{w - 1} \quad \text{und ebenso allgemein}$$

$$7) \quad Q = \frac{K}{w^{2n}} \frac{w^{2n} - 1}{w - 1}; \quad \text{mithin}$$

$$8) \quad \eta = \frac{Qc}{Kv} = \frac{w^{2n} - 1}{2n \cdot w^{2n} (w - 1)}.$$

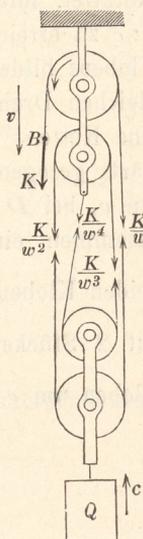
Beispiel: Es sei wieder $w = 1,1$, dann wird

$$\text{für } n = 2: Q = 3,16 K, \eta = 0,79,$$

$$\text{für } n = 4: Q = 5,34 K, \eta = 0,67.$$

Im ersten Falle werden 79% der aufgewendeten Arbeit nützlich verwertet, im zweiten nur 67%, während 21 bzw. 33% verloren gehen. Mit wachsender

Fig. 301.



Rollenzahl nimmt also der Wirkungsgrad ab. Es ist daher besser, eine schwere Last an 2 Flaschenzügen zu je 4 Rollen aufzuwinden, als an 1 Flaschenzuge mit 8 Rollen.

Für das Hinablassen der Last ist durchweg w mit $1 : w$ zu vertauschen.

Differenz-Flaschenzug. Der Differenz-Flaschenzug (Fig. 302) gestattet, mit nur 3 Rollen ein bedeutendes Übersetzungsverhältnis $v : c$ zu erreichen. Die beiden Rollen des oberen Klobens bilden zusammen ein Stück, haben daher gleichen Drehungswinkel. Statt eines Seiles dient eine Kette. Wird bei B eine Kettenlänge v abwärts gezogen, so findet bei C ein Aufwärtswinden um v , bei D ein Abwärtswinden um $vr : R$, also zusammen eine Verkürzung der Kette zwischen beiden Kloben um $v \left(1 - \frac{r}{R}\right)$ statt; da sich diese auf 2 Stücke vertheilt, so hebt sich der untere Kloben um $c = \frac{v}{2} \left(1 - \frac{r}{R}\right)$, mithin ist

$$9) \quad v : c = \frac{2}{1 - \frac{r}{R}}.$$

Der Name des Flaschenzuges erklärt sich daraus, dass das Heben in Folge der Differenz zwischen Aufwinden und Abwinden zu Stande kommt.

Ohne Widerstände würde in jedem Kettenstücke des unteren Klobens eine Kraft $\frac{1}{2} Q$ herrschen; dann ergibt (wenn K_0 die ideelle Triebkraft) die Momentengleichung des oberen Klobens $0 = K_0 R + \frac{1}{2} Q r - \frac{1}{2} Q R$ oder $K_0 R = \frac{1}{2} Q (R - r)$, d. h.

$$10) \quad Q : K_0 = 2 : (1 - r : R) = v : c.$$

Macht man z. B. $r : R = 14 : 15$, so wird $Q : K_0 = v : c = 30$.

An der linken Seite der kleineren Rolle des oberen Klobens ist die Kette ohne Spannkraft, während auf der rechten Seite eine Spannkraft $= \frac{1}{2} Q$ herrscht; ebenso ist der Unterschied der Spannkräfte der grossen Rolle ein so erheblicher, dass die Seilreibung nicht genügen würde, um ein Gleiten zu verhindern. Aus diesem Grunde hat man statt des Seiles eine Kette gewählt, die zwischen zahnartige seitliche Vorsprünge der oberen Rollenkörper (Fig. 303) eingreift und

Fig. 302.

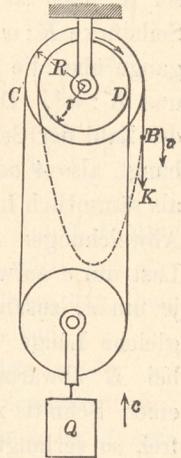


Fig. 303.



dadurch ein Gleiten unmöglich macht. Eine solche Kette hat nur geringe Steifigkeit, weshalb man die Widerstandsziffer der Kettenrolle zu $w = 1,05$ annehmen kann.

Betrachtet man die Verhältnisse annäherungsweise so, als ob der Widerstand ganz allein von der Zapfenreibung gebildet würde, so wäre nach Gleichung 4, S. 241

$$11) \quad w = 1 + f \frac{d}{R},$$

An der unteren Rolle wirken Kettenkräfte S und Sw (Fig. 304), und es ist

$$Q = S(1 + w).$$

An der oberen Rolle tritt ein Zapfendruck auf, der annähernd gleich Q , da K nur ziemlich klein ist. Dadurch entsteht ein Zapfenreibungsmoment $\frac{1}{2} Qfd$. Die Momentengleichung für den oberen Rollenkörper lautet:

$$0 = KR + Sr - SwR - \frac{1}{2} Qfd.$$

Daraus wird

$$K = S \left(w - \frac{r}{R} \right) + Qf \frac{d}{2R}$$

$$= \frac{Q}{1 + w} \left(w - \frac{r}{R} \right) + Qf \frac{d}{2R} \quad \text{oder,}$$

$$12) \quad \text{weil } f \frac{d}{R} = w - 1 \quad (\text{Gl. 11}),$$

$$K = \frac{Q}{1 + w} \left(w - \frac{r}{R} + \frac{w^2 - 1}{2} \right).$$

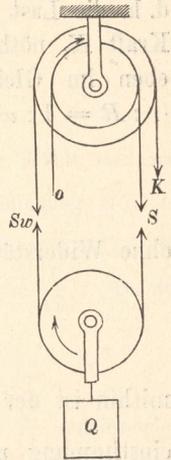
$$\text{Es ist aber } w + \frac{w^2 - 1}{2} = w^2 - \frac{w^2 - 2w + 1}{2} = w^2 - \frac{(w - 1)^2}{2}.$$

Da nun $w^2 = 1,05^2 = 1,1$, $(w - 1)^2$ aber nur $= 0,0025$, so ist $\frac{(w - 1)^2}{2}$ gegen w^2 zu vernachlässigen, daher annähernd

$$13) \quad K = \frac{Q}{1 + w} \left(w^2 - \frac{r}{R} \right) \quad \text{zu schreiben.}$$

Für gleichmässiges Hinablassen ist w durch $1 : w$ zu ersetzen; es wird dann an Stelle von K die Kraft K_1 nötig mit

$$14) \quad K_1 = \frac{Q}{1 + \frac{1}{w}} \left(\frac{1}{w^2} - \frac{r}{R} \right).$$



Da nun $1 : w^2$ ein echter Bruch und $r : R$ ebenfalls, so könnte man $r : R$ beispielsweise $= 1 : w^2$ wählen. Dann wird $K_1 = 0$, d. h. die Last geht gleichmässig abwärts, ohne dass eine hemmende Kraft K_1 nöthig ist, oder die Last Q wird durch die Widerstände eben im Gleichgewichte gehalten. Unter diesen Verhältnissen ($r : R = 1 : w^2$) wird für Aufwinden

$$K = Q \frac{\left(w^2 - \frac{1}{w^2}\right)}{1 + w} = \frac{0,2}{2,05} Q,$$

ohne Widerstände aber

$$K_0 = Q \frac{\left(1 - \frac{1}{w^2}\right)}{2} = \frac{0,1}{2} Q,$$

mithin ist der Wirkungsgrad $\eta = \frac{0,1 \cdot 2,05}{2 \cdot 0,2} = 0,51$, also (in Übereinstimmung mit S. 216) nahezu gleich $1/2$.

Soll der Flaschenzug sich aber mit Sicherheit bremsen, so muss rechnungsmässig $K_1 < 0$, d. h. $1 : w^2 < r : R$, oder
15) $r : R > 1 : w^2$ sein.

Diese Eigenschaft der Selbstsperrung wird bei dem Differenz-Flaschenzuge gewünscht. Weil nun ein negativer Zug K_1 an der Kette nicht ausgeübt werden kann, so muss die Drehung linksherum durch einen Zug K_2 an dem bisher nicht benutzten Kettenstücke bewirkt werden (Fig. 305). Da der Zapfendruck am oberen Zapfen wieder annähernd Q beträgt, das Reibungsmoment daher $Qf^{1/2}d$, so lautet die Momentengleichung der oberen Rolle

$$K_2 r + SR = Sw r + Qf^{1/2} d.$$

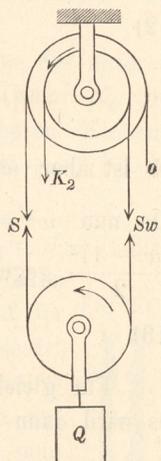
Wegen des geringen Unterschiedes zwischen r und R kann aber $fd = (w - 1)R$ (Gl. 12) annähernd auch $= (w - 1)r$ gesetzt werden, so dass

$$K_2 = S \left(w - \frac{R}{r}\right) + Q \frac{(w - 1)}{2} \text{ wird,}$$

oder, weil wieder $Q = S(1 + w)$

$$K_2 = \frac{Q}{1 + w} \left(w - \frac{R}{r}\right) + \frac{Q}{2} (w - 1) = \frac{Q}{1 + w} \left(w - \frac{R}{r} + \frac{w^2 - 1}{2}\right).$$

Fig. 305.



Es ist aber wieder $w + \frac{w^2 - 1}{2} = w^2 - \frac{(w - 1)^2}{2}$ oder annähernd $= w^2$, mithin

$$16) \quad K_2 = \frac{Q}{1 + w} \left(w^2 - \frac{R}{r} \right),$$

was für $w^2 > R : r$ (Gl. 15) positiv wird.

Beispiel: Für $w = 1,05$ ist $w^2 = 1,1$, $1 : w^2 = 0,909$. Wählt man nun $r : R = 14 : 15$, so ist $\frac{14}{15} = 0,93 > 0,909$, d. h. die Bedingung (15) der Selbstsperrung erfüllt. Es ist ferner (nach Gl. 10) $v : c = 30 = Q : K_0$. Für das Aufwinden wird (nach Gl. 13) $K = \frac{Q}{2,05} \left(1,1 - \frac{14}{15} \right) = \frac{Q}{12,1}$. Da nun $K_0 = \frac{Q}{30}$, so ist

$$\eta = \frac{12,1}{30} = 0,40.$$

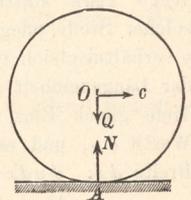
Zum Hinabwinden ist die Kraft $K_2 = \frac{Q}{2,05} \left(1,1 - \frac{15}{14} \right) = \frac{Q}{71}$ aufzuwenden. Also mit Aufwand von $K = 10$ kg kann man $Q = 121$ kg heben, während zum Hinabwinden $K_2 = 1,7$ kg hinreicht.

Der Differenz-Flaschenzug ist offenbar keine vortheilhafte Aufzugsmaschine, da sein Wirkungsgrad nur 0,4 beträgt. Angenehm sind aber seine Einfachheit und die Bequemlichkeit der Handhabung. Beim Einspannen einer schweren Achse in eine Drehbank oder beim Versetzen eines schweren Steines ist die Selbstsperrung sehr werthvoll. Der ihn handhabende Arbeiter braucht ihn nicht vorsichtig festzuhalten, sondern kann seine volle Aufmerksamkeit auf die genaue Einstellung der Last richten, indem er durch Ziehen an der einen oder anderen Kette die Last bald hebt, bald senkt, wie es erwünscht ist.

12. Rollwiderstand der Walzen und Räder. Gleichmässige Bewegung der Fuhrwerke.

Wird eine starre cylindrische Walze auf eine starre wagerechte Ebene gelegt, so findet die Berührung längs einer Cylinderseite statt (Fig. 306). Das Gewicht Q der Walze wird von dem Widerstande N der Ebene aufgehoben, und versetzt man die Walze in eine Rollbewegung, wobei die Geschwindigkeit c des Mittelpunktes O gleich der Umfangsgeschwindigkeit $r\omega$ der Drehbewegung ist, so ist an der Berührungsstelle A die Gesamtgeschwindigkeit $v = c - r\omega = \text{Null}$, d. h. es findet kein Gleiten statt, und da die sonstigen Kräfte Q und N sich aufheben, so kommt keine Reibung

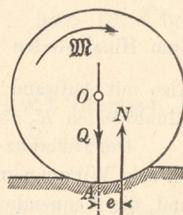
Fig. 306.



zur Wirkung. Daher sind die Bedingungen der gleichmässigen Drehbewegung und der gleichmässigen Verschiebung, mithin auch der gleichmässigen Rollbewegung erfüllt, d. h. es ist bei vollkommener Starrheit zur Unterhaltung der Rollbewegung keine weitere Kraft erforderlich.

Bei den wirklichen festen Körpern kann aber der Druck N nicht von einer Linie aufgenommen werden, sondern er vertheilt sich auf eine Fläche, indem sowohl die Walze wie die Unterlage ihre Form ändern, sich gegenseitig zusammendrücken. Diejenigen Theile der Bahn, welche die Walze schon überrollt hat, kehren in den meisten Fällen nicht ganz in den früheren Zustand zurück; sie sind um ein gewisses Mafs dauernd niedergewalzt. In Folge dessen liegt der vor der Walze befindliche Theil der Unterlage höher als der andere; der Druck N vertheilt sich nicht gleichmässig zu beiden Seiten der Walzenmitte, vielmehr überwiegt der Gegendruck auf der Vorderseite. Dadurch verschiebt sich dann der Gesamtdruck N nach vorn, sodass er nicht mehr mit Q zusammenfällt, sondern mit Q ein Kräftepaar Ne bildet, das Moment des Rollwiderstandes. Zur Unterhaltung der gleichmässigen Rollbewegung ist daher ein treibendes Moment

Fig. 307.



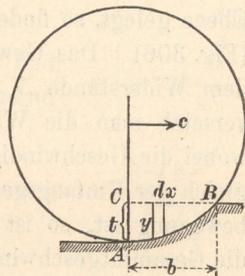
$$1) \quad \mathfrak{M} = Ne \text{ erforderlich.}$$

Zur Beurtheilung der Vertheilung des Druckes N auf die Unterstüzungsfläche darf man wohl für die meisten Fälle die vereinfachende Annahme machen, dass nur die Unterlage eine Formänderung erfährt, während die Walze ihre runde Form behält. Zuerst werde der Fall betrachtet, dass der von der Walze niedergedrückte Theil der Unterlage sich gar nicht wieder elastisch hinter ihr hebt, sondern niedergedrückt verbleibt (Fig. 308), wie es bei einem thonigen oder sandigen Wege etwa stattfinden wird. Den Gegendruck solcher Stoffe pflegt man mit der Eindrückungstiefe y verhältnissgleich zu nehmen. Ist ψ der Gegendruck der Längeneinheit der Horizontalprojektion für eine Tiefe gleich Eins, so hat er bei der Tiefe y den Werth ψy , und es ist dann der Gegendruck einer Breite dx : $\psi y dx$ und der gesammte Druck

$$N = \psi \int y dx = \psi \cdot ABC.$$

Selbstverständlich geht dann auch N durch den Schwerpunkt der Fläche ABC .

Fig. 308.



Weil nun AB in den wichtigeren Fällen ein kleiner Bogen, so kann er annähernd als ein Parabelstück vom Parameter r ($=$ dem Halbmesser des Rollkreises) betrachtet werden. Dann wird, wenn b und t die beiden Projektionen von AB , $b^2 = 2rt$, $t = b^2 : (2r)$ und

$$2) \quad N = \psi \cdot \frac{2}{3} bt = \frac{1}{3} \psi \frac{b^3}{r},$$

daher $b^3 = \frac{3Nr}{\psi}$.

Der Abstand e der Kraft N von dem Mittelpunkte ist (S. 134)

$$3) \quad e = \frac{3}{8} b = \frac{3}{8} \sqrt[3]{\frac{3Nr}{\psi}}.$$

Ist die Unterlage aber nicht so vollkommen bildsam oder plastisch, dass jeder erzeugte Eindruck in voller Grösse bleibt; kann vielmehr ein gewisser Grad von Elasticität vorausgesetzt werden, so hebt sich die um die Tiefe t_1 eingedrückte Unterlage hinter der Walze um t_2 wieder empor (Fig. 309) und leistet dann entsprechende Gegenrücke.

Dann wird der Druck auf der Vorderseite

$$N_1 = \psi \frac{2}{3} b_1 t_1 = \frac{1}{3} \psi \frac{b_1^3}{r},$$

der auf der Rückseite

$$N_2 = \frac{1}{3} \psi \frac{b_2^3}{r}.$$

Ferner ist $b_1^3 = \frac{3N_1 r}{\psi}$; $b_2^3 = \frac{3N_2 r}{\psi}$.

4) Setzt man $b_1 = n b_2$,

so ist n von dem Grade der Elasticität der Unterlage abhängig. Dann kann man $N_2 = \frac{1}{3} \psi n^3 \frac{b_1^3}{r}$ schreiben. Somit wird der Gesamtdruck

$$5) \quad N = N_1 + N_2 = \frac{1}{3} \psi \frac{b_1^3}{r} (1 + n^3) \quad \text{und}$$

$$6) \quad b_1 = \sqrt[3]{\frac{3Nr}{\psi(1+n^3)}}.$$

Die Abstände der Kräfte N_1 und N_2 von dem Mittelpunkte O betragen $e_1 = \frac{3}{8} b_1$; $e_2 = \frac{3}{8} b_2 = \frac{3}{8} n b_1$. Für die Mittelkraft N gilt dann die Momentengleichung in Bezug auf O

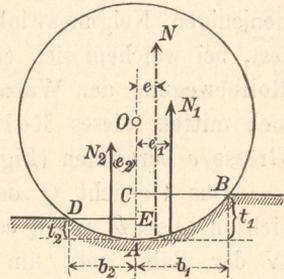
$$-Ne = -N_1 e_1 + N_2 e_2 = -\frac{3}{8} b_1 (N_1 - n N_2),$$

daher wird, wenn man den gemeinschaftlichen Faktor $\frac{1}{3} \psi : r$ in allen Gliedern fortlässt,

$$7) \quad e = \frac{3}{8} b_1 \frac{1 - n^4}{1 + n^3} = \frac{3}{8} \sqrt[3]{\frac{3Nr}{\psi(1+n^3)}} \frac{1 - n^4}{1 + n^3}.$$

Für $n = 0$ entsteht wieder der Werth der Gl. 3.

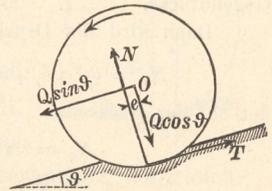
Fig. 309.



Hiernach ist e in verwickelter Weise von ψ und n , d. h. von der Beschaffenheit der Unterlage, oder, weil die Zusammendrückung in Wirklichkeit eine gegenseitige ist, von den Stoffen der Walze und der Unterlage abhängig, ausserdem aber auch von der Grösse des Druckes N und von dem Halbmesser r des Rollkreises. Hat man aber e für einen Werth von N und r durch unmittelbare Messung oder auf mittelbarem Wege gefunden, so bringt eine Änderung von N oder von r nur geringe Änderung von e hervor, da Nr schon auf das Achtfache wachsen muss, wenn e sich verdoppeln soll. Daher zieht man es vor, für eine Gruppe praktisch wichtiger Fälle bei Mittelwerthen von N und r die Grösse e ein Mal zu bestimmen und diese Länge e dann für andere ähnliche Fälle innerhalb gewisser Grenzen unverändert beizubehalten.

Die Ermittlung der Grösse e kann durch Versuche in ähnlicher Weise erfolgen, wie man die Reibungsziffer mittels der schiefen Ebene (S. 192) feststellt. Giebt man der Rollbahn eine veränderliche Neigung, legt die Walze auf und stellt durch Versuche denjenigen Neigungswinkel ϑ der Bahn fest, bei welchem sich eine gleichmässige Rollbewegung der Walze erhält, so lässt sich mittels dieses Rollwinkels ϑ die Grösse e berechnen (Fig. 310).

Fig. 310.



Das Gewicht Q der Walze zerlegt sich in $Q \sin \vartheta$ und $Q \cos \vartheta$. Der Druck N der Bahn geht um e an O vorbei.

Ausserdem tritt nun noch die Reibung T an der Bahn auf. Diese 4 Kräfte müssen den Gewichtsbedingungen genügen, daher

$$N = Q \cos \vartheta; \quad T = Q \sin \vartheta.$$

Die beiden auftretenden Kräftepaare müssen sich aufheben, daher

$$Q \cos \vartheta e = Q \sin \vartheta r \quad \text{oder} \quad e = r \operatorname{tg} \vartheta,$$

wofür man wegen der Kleinheit des Winkels ϑ auch

$$8) \quad e = r \vartheta$$

schreiben kann.

Für Walzen und Bahn aus nicht sehr hartem

Holze ist etwa $e = 0,001 \text{ m}$,

bei sehr hartem Holze $e = 0,0005 \text{ m}$,

bei Eisenbahnwagen-Rädern auf Schienen . . $e = 0,0005 \text{ m}$.

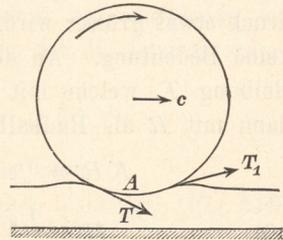
Danach beträgt der Rollwinkel im letzteren Falle, wenn $r = 0,5 \text{ m}$, $\vartheta = 0,0005 : 0,5 = 0,001 = 1 : 1000$, d. h. auf einem Gefälle von 1 : 1000 kann eine Eisenbahnwagenachse durch ihr Gewicht gleichmässig rollen.

Nach den vorstehenden Betrachtungen würde der Rollwiderstand verschwinden, wenn die zusammendrückbare Fahrbahn sehr elastisch, annähernd $n = 1$ wäre, indem dann $e = \text{Null}$ entsteht. Man könnte glauben, dass eine Kautschukplatte oder auch eine Unterlage von Stahl in solchem Mafse elastisch wäre, dass dafür nahezu $n = 1$ gesetzt werden müsste. Damit steht nun freilich die Erfahrung im Widerspruche, denn bei dem Rollen einer eisernen Walze auf einer Kautschukplatte zeigt sich ein ziemlich erheblicher Widerstand, oder es ist eine ziemlich erhebliche Neigung ϑ erforderlich, damit ein gleichmässiges Rollen auf schiefer Ebene stattfinden kann.

Diese Erscheinung erklärt sich in folgender Weise. Wenn auch die Bahn von Kautschuk bzw. von Stahl so elastisch ist, dass nach einiger Zeit keine Spur des Hinüberrollens mehr bemerkt wird, so erfolgt die Rückkehr in die ursprüngliche Form niemals sofort, sie erfordert vielmehr immer eine gewisse Zeit. Daher wird die Oberfläche der Fahrbahn dicht hinter der Walze immer etwas tiefer liegen als vor derselben und erst später, wenn die Walze sich von der Stelle entfernt hat, zur ursprünglichen Höhe zurückkehren.

Auch ist die Rollbewegung nach Versuchen von Prof. Osborne Reynolds im Jahre 1875 (Philosophical transactions, Bd. 166; Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1877, S. 417) stets mit einem Gleiten verbunden. Die Strecke s , welche eine eiserne Walze vom Halbmesser r auf einer Kautschukplatte bei einer Umdrehung zurücklegt, zeigt sich kleiner als der Umfangsweg $2r\pi$. Mit dem Zusammendrücken der Kautschukplatte ist vor und hinter der Zusammendrückung eine wulstartige Erhebung verbunden (Fig. 311). In der Nähe des Punktes A wird vielleicht kein Gleiten stattfinden, wohl aber zu beiden Seiten; aus dem Gleiten entstehen dann Reibungswiderstände T und T_1 , die ein Widerstandsmoment liefern. Hiernach darf auch für elastische Bahnen die Formel 1 (S. 248) für den Rollwiderstand beibehalten werden, so lange eine bessere nicht gefunden ist.

Fig. 311.

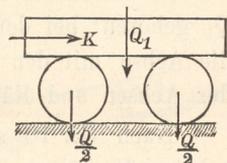


Wird eine Last Q_1 auf Walzen vom Gesamtgewichte Q fortgeschoben, so tritt unten wie oben an den Walzen ein Rollwiderstand auf; die erforderliche Kraft ist dann

$$9) \quad K = \{Q_1 e + (Q + Q_1) e_1\} : (2r);$$

denn die Kraft K überträgt sich durch Reibung auf die oberen Theile der Walzen und bildet mit den unten an den Walzen auftretenden Reibungswiderständen ein Kräftepaar vom Hebelarme $2r$; e und e_1 sind die Arme der Rollwiderstände oben bzw. unten.

Fig. 312.



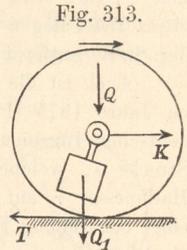
Sind alle in Frage kommenden Theile aus sehr hartem Holze, ist $Q_1 = 1000$ kg, $Q = 50$ kg, $r = 0,1$ m, so wird

$$K = \frac{1000 \cdot 0,0005 + 1050 \cdot 0,0005}{0,2} = 5,1 \text{ kg.}$$

Hieraus erkennt man die Zweckmässigkeit der Walzen zum Fortschaffen schwerer Körper (eiserner oder steinerner Bautheile).

Bei den Fuhrwerken nun ist die Last des Wagenkastens mittels Achslager auf die Achsen der Räder gestützt, und da der Wagenkasten wohl an der Verschiebung, nicht aber an der Drehung der Walze theilnimmt, so findet an den Zapfen vom Durchmesser d eine Zapfenreibung statt. Wir wollen zunächst eine einzige Wagenachse von dem Gewichte Q betrachten und an ihr eine Last Q_1 aufgehängt denken (Fig. 313).

(Das Gehänge stellt sich dann wegen des Zapfenreibungsmoments $\frac{1}{2} f Q_1 d$ etwas schief). Der Bodendruck beträgt $Q + Q_1$, daher das Moment des Rollwiderstandes $(Q + Q_1) e$. Die Zugkraft K auf wagerechter Ebene veranlasst, dass der Zapfendruck etwas grösser wird, doch hat dieser Umstand keine Bedeutung. An der Fahrbahn entsteht eine Reibung T , welche mit K das treibende Kräftepaar liefert: es ist dann mit R als Radhalbmesser:



$$KR = \frac{1}{2} Q_1 f d + (Q + Q_1) e, \text{ so dass}$$

$$10) \quad K = \frac{\frac{1}{2} Q_1 f d + (Q + Q_1) e}{R} \text{ wird.}$$

Diese Formel bleibt auch gültig, wenn die Last des Wagenkastens Q_1 auf mehrere Achsen vom Gesamtgewichte Q vertheilt ist. Genauer bedeutet Q das Gewicht der rollenden, Q_1 das der nur fortschreitenden Theile. Bei gewöhnlichen Strassenfuhrwerken bezieht sich Q nur auf die Räder, während die Achsen zu Q_1 gehören; bei den gewöhnlichen Eisenbahnfuhrwerken dagegen ist die Achse mit den Rädern fest verbunden, so dass Q das Gewicht der Achsen und Räder bedeutet.

Nach Gl. 10 steht die erforderliche Zugkraft K im umgekehrten Verhältnisse zu dem Radhalbmesser R ; zur Verminderung von K muss man daher R so gross machen, wie die sonstigen Umstände und Rücksichten gestatten.

Beispiel: An einem zweiachsigen Eisenbahnwagen wiegen die beiden Achsen mit den Rädern $Q = 2000$ kg, die übrigen Theile nebst der Last $Q_1 = 8000$ kg; der Radhalbmesser sei $R = 0,5$ m, der Zapfendurchmesser $d = 0,1$ m, die Reibungsziffer $f = 0,02$, die Grösse $e = 0,0005$ m, dann ist die auf wagerechter gerader Bahn erforderliche Zugkraft

$$K = \frac{4000 \cdot 0,02 \cdot 0,1}{0,5} + 10000 \cdot \frac{0,0005}{0,5} = 16 + 10 = 26 \text{ kg},$$

wovon 16 kg durch Zapfenreibung, 10 kg durch Rollwiderstand erfordert werden.

Soll das Fuhrwerk gleichmässig eine Steigung unter dem Winkel α hinan gezogen werden, so bleibt der ganze Zapfendruck $= Q_1$, der Normalwiderstand N beträgt aber nur $(Q_1 + Q) \cos \alpha$; doch ist $\cos \alpha$ bei allen Bahnen und Wegen, die frei (ohne Seil oder Zahnstange) befahren werden, von der Einheit so wenig verschieden, dass Zapfenreibung + Rollwiderstand wiederum $= K$ gesetzt werden können. Es tritt aber nun noch die schräg abwärts gerichtete Seitenkraft der Schwere $Q \sin \alpha$ und $Q_1 \sin \alpha$ auf, die beide von K_1 mit überwunden werden müssen. Daher ist die jetzt erforderliche Zugkraft

$$11) \quad K_1 = (Q + Q_1) \sin \alpha + K,$$

worin aber α statt $\sin \alpha$ geschrieben werden kann.

Diese Kräfte K und K_1 müssten nach dem bisherigen (Fig. 313) eigentlich an den Mittellinien der Achsen angreifen. Bringt man sie aber in beliebiger Höhe an dem Fuhrwerke an, so wird durch diese Verschiebung nur die Vertheilung der Last Q_1 auf die beiden Achsen etwas geändert, im Übrigen bleibt die Wirkung die gleiche.

Bewegt sich das Fuhrwerk gleichmässig abwärts und wird auf dasselbe (etwa mittels eines Seiles) eine hemmende Kraft K_2 ausgeübt, so ist $(Q + Q_1) \sin \alpha - K_2$ die gesammte treibende Kraft P mit dem Sinne abwärts (Fig. 315). Die Neigung α hat einen gewissen Einfluss auf die Vertheilung der Last Q_1 auf die beiden

Achsen; davon abgesehen, kann man sich aber die gesammte Kraft P in der Achsenmitte angreifend denken. An den Berührungsstellen

Fig. 314.

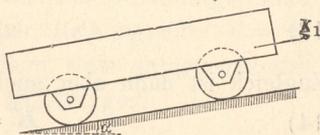
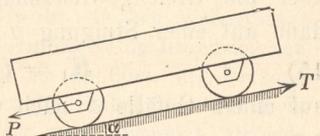


Fig. 315.



der Räder mit der Bahn tritt eine gesammte Reibung $T = P$ auf und bildet mit P das Kräftepaar PR zur Überwindung der Widerstandsmomente $\frac{1}{2} Q_1 f d + (Q + Q_1) e$, und da letztere Summe $= KR$ (Gl. 10), so ist

$$(Q + Q_1) a - K_2 = K,$$

oder die erforderliche Hemmkraft

$$12) \quad K_2 = (Q + Q_1) a - K.$$

Für ein gewisses Gefällverhältnis $a = a_0$ reicht $(Q + Q_1) a_0$ gerade zur Überwindung der Widerstände hin, so dass die erforderliche Hemmkraft $K_2 = 0$ wird. Dieses Gefälle heisst die Gleichgewichtsneigung a_0 , u. zw. ist

$$13) \quad a_0 = \frac{K}{Q + Q_1}.$$

Zugleich ist dann aber auch

$$14) \quad K = (Q + Q_1) a_0,$$

d. h. die auf wagerechter Ebene erforderliche Zugkraft K gleich dem Gesamtgewichte $(Q + Q_1)$ mal der Gleichgewichtsneigung a_0 .

Durch Vorrichtungen zur Messung der Zugkraft oder durch Ermittlung der Gleichgewichtsneigung kann die für einen Wagen erforderliche Zugkraft K ziemlich scharf gemessen werden; von den beiden Widerständen aber, die von K überwunden werden, kann man nur die Zapfenreibung einigermaßen befriedigend berechnen, während der Betrag des Rollwiderstandes bisher nur sehr unvollkommen berechnet werden kann, wie aus den Bemerkungen auf S. 251 ersichtlich ist. Man zieht es deshalb vor, nur den Gesamtwiderstand K durch Versuche eingehender zu prüfen und K in ein Verhältnis zu dem Gesamtgewichte $Q + Q_1$ des Fuhrwerks zu bringen, trotzdem nach Gl. 10 der Werth K nicht genau verhältnissgleich mit $Q + Q_1$ ist. Diese Verhältnisszahl ist nach Gl. 14 aber die Gleichgewichtsneigung a_0 . Mit deren Einführung wird dann auf einer Steigung a nach Gl. 11

$$15) \quad K_1 = (Q + Q_1) (a + a_0),$$

auf einem Gefälle a nach Gl. 12 die Haltkraft

$$16) \quad K_2 = (Q + Q_1) (a - a_0).$$

Auf Grund dieser Vereinfachungen bekommt nun die Gleichgewichtsneigung a_0 eine ähnliche Bedeutung, wie sie der Reibungs-

winkel φ bei gleitender Bewegung hat. Da bei Fuhrwerken α_0 stets ein kleiner Bruch, so ist $\sin \alpha_0 = \alpha_0 = \operatorname{tg} \alpha_0$ zu setzen, ebenso wie bei kleinem Reibungswinkel $\sin \varphi = \varphi = \operatorname{tg} \varphi = f$ gesetzt werden konnte. Die Gleichgewichtsneigung α_0 ist zugleich die Widerstandsziffer des Fuhrwerks, welche man nur mit dessen Gewicht zu multipliciren braucht, um den Gesamtwiderstand auf wagerechter Bahn zu erhalten. Man braucht daher zur zahlenmässigen Berechnung der erforderlichen Zug- oder Haltkräfte K_1 und K_2 auf die rollenden Räder und die damit zusammenhängenden Widerstände keine Rücksicht mehr zu nehmen, sondern kann, weil diese Widerstände in dem Werthe α_0 stecken, bei gleichmässiger Bewegung das Fuhrwerk wie einen Schlitten vom Gesamtgewichte $Q + Q_1$ auf sehr glatter Bahn mit einer Reibungsziffer $f = \alpha_0$ betrachten. Die Kraft $(Q + Q_1)\alpha_0$ ist dann stets entgegengesetzt der Bewegung, $(Q + Q_1)a$ stets abwärts anzubringen.

Beispiel: Für den Eisenbahnwagen auf S. 253 ist $K = 26$, $Q + Q_1 = 10000$, daher $\alpha_0 = 0,0026 = 1 : 385$, wofür man $\alpha_0 = 0,0025 = 1 : 400$ zu setzen pflegt. Ein Zug aus 40 derartigen Wagen hat ein Gewicht $Q + Q_1 = 400000 \text{ kg}$. Es ist dafür auf wagerechter Bahn $K = 400000 \cdot 0,0025 = 1000 \text{ kg}$. Auf einer Steigung $a = 1 : 800$ ist dann die Zugkraft nöthig (Fig. 316)

$K_1 = 400000 : 800 + 1000 = 1500 \text{ kg}$;
soll der Zug aber auf derselben Rampe abwärts fahren, so wirkt 500 abwärts, der Widerstand $= 1000 \text{ kg}$ aufwärts; es ist also noch in der Richtung der Bewegung eine Zugkraft $1000 - 500 = 500 \text{ kg}$ nöthig. — Für $a = \alpha_0$ ist bei der Abwärtsbewegung keine bewegende oder hemmende Kraft erforderlich, dagegen ist bei der Aufwärtsbewegung $K_1 = (Q + Q_1)\alpha_0 + K = 2K$, d. h. doppelt so gross wie auf wagerechter Bahn. — Ist $a > \alpha_0$, z. B. $a = 1 : 200$, so wird für Aufwärtsfahrt $K_1 = 400000 : 200 + 1000 = 3000 \text{ kg}$, für Abwärtsfahrt eine Hemmkraft (Gl. 16) $K_2 = 400000 : 200 - 1000 = 1000 \text{ kg}$ nöthig. Diese wird erzeugt, indem man Bremsbacken oder Bremsklötze mit solcher Kraft an die Räder presst, dass dadurch eine Gesamttreibung an den Umfängen der Räder im Betrage von K_2 entsteht. Diese wirkt mit dem Widerstandsmomente $K_2 R$ an den Achsen wie eine vielfach vergrösserte Zapfenreibung und erfordert in ähnlicher Weise wie diese (Fig. 313) ein im Sinne der Drehung der Achsen wirkendes Kräftepaar $K_2 R$, indem an den Stellen der Berührung der Räder mit den Schienen eine der Bewegung entgegengesetzt wirkende Reibungskraft von der Grösse K_2 hervorgerufen wird, welche nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunktes (S. 142) auf die Bewegung des Fuhrwerkes im Ganzen gerade so einwirkt, als ob sie im Schwerpunkte des

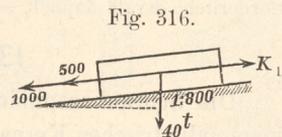


Fig. 316.

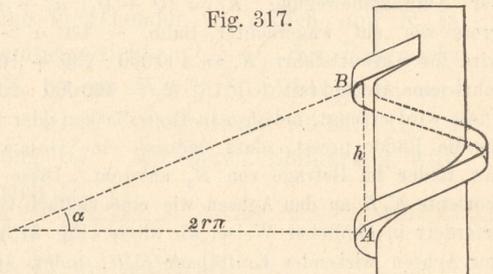
Fuhrwerks oder in den Achsmitten oder irgend wo am oberen Theile des Wagenkastens angriffe.

In den bisherigen Betrachtungen und Beispielen sind als Widerstände nur Zapfenreibung und Rollwiderstand berücksichtigt. Dies genügt nur für Bewegung mit geringer Geschwindigkeit. Denn es tritt noch ein Luftwiderstand hinzu, der bei langsamer Bewegung des Zuges gering, bei schneller Bewegung aber sehr bedeutend ist. Auf diesen Widerstand kann hier nicht eingegangen werden; es sei nur erwähnt, dass bei schnell fahrenden Personenzügen die Widerstandsziffer oder Gleichgewichtsneigung α_0 auf 0,01 steigt, dass also der Gesamtwiderstand bei voller Geschwindigkeit etwa 4 Mal so gross ist wie bei langsamer Bewegung.

Für Strassenfuhrwerke ist die Ziffer α_0 erheblich grösser als für Eisenbahnwagen. Einmal sind die Achslager oder Achsbüchsen nicht so vollkommen; namentlich aber ist die Fahrbahn eine viel weniger regelmässige, so dass der Rollwiderstand ganz bedeutenden Einfluss gewinnt. Aber auch bei diesen Fuhrwerken kann man nur den Gesamtwiderstand durch α_0 ausdrücken. Für bestes Steinpflaster ist etwa $\alpha_0 = 1 : 80$, für gewöhnliche Landstrasse $\alpha_0 = 1 : 30$. Soll nun auf Landstrassen im Flachlande, wo die gewöhnlichen Fuhrwerke nicht mit Bremsen versehen sind, beim Abwärtsfahren ein Zurückhalten des Wagens durch die Pferde nicht nöthig sein, so dürfen die vorkommenden Gefälle nicht stärker als die Gleichgewichtsneigung α_0 sein. Für $\alpha = \alpha_0$ läuft der Wagen abwärts frei, während die zum Aufwärtsziehen erforderliche Kraft doppelt so gross ist wie auf der Wagerechten.

13. Die Schraube.

Die Schraubenspindel kann man betrachten als bestehend aus einem cylindrischen Kerne, um den die Schraubengänge als nach einer Schraubenlinie gestaltete vorspringende Leisten herumgelegt sind. Die Schraubengänge bilden mit dem Kerne einen festen Körper. Bei der flachgängigen Schraube hat der Schraubengang rechteckigen Querschnitt, bei der scharfgängigen Schraube ist seine Querschnittsform ein gleichschenkliges (nahezu gleichseitiges) Dreieck. Die Schraubenmutter ist ein fester Körper, der die Schraubenspindel mit geringem Spielraume umschliesst.



Wird die Schraubenmutter festgehalten, so kann die Schraubenspindel nur eine sog. Schraubenbewegung ausführen, indem mit der

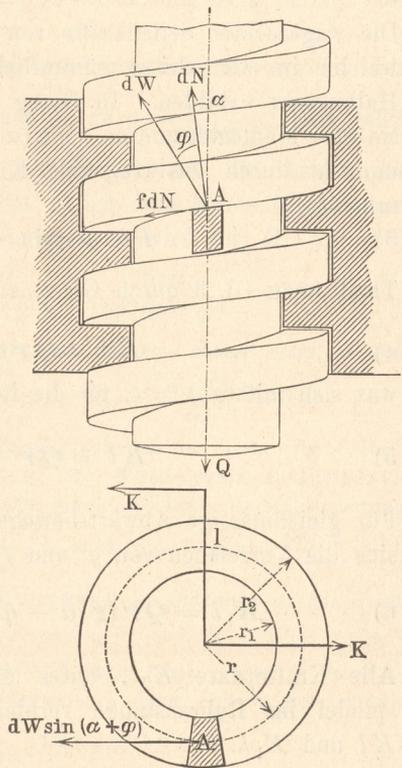
Drehung um die Achse der Spindel eine Verschiebung längs derselben verbunden ist. Verfolgt man einen Schraubengang, an einem Punkte A (Fig. 317) beginnend, so weit, bis man bei B eine Stelle trifft, die mit A auf einer und derselben Lothrechten liegt, so ist der Abstand $AB = h$ die Ganghöhe der Schraube; dies ist derjenige Weg, um welchen sich die Schraubenspindel während einer Umdrehung längs der Achse verschiebt. Befindet sich der Punkt A in einem Abstände r von der Achse, so ist die ebene Abwicklung der Schraubenslinie von A bis B eine geneigte Gerade mit den Projektionen h und $2r\pi$, mit einem Neigungsverhältnisse

$$1) \quad \operatorname{tg} \alpha = h : (2r\pi).$$

Da nun h der für alle Theile der Spindel gleiche Verschiebungsweg längs der Achse bei einer Umdrehung ist, so werden die Schraubenslinien auf denen sich die verschiedenen Punkte der Spindel bewegen, verschiedene Anstiegswinkel α haben, u. zw. um so kleiner, je grösser der Abstand r des Punktes von der Achse.

Flachgängige Schraube (Fig. 318). Auf die Spindel wirke eine (etwa abwärts gerichtete) Kraft Q in der Richtung der Achse. Es soll dasjenige Kräftepaar Kl berechnet werden, welches die Spindel in gleichmässige Schraubensbewegung versetzt, so dass ihre Verschiebung dem Sinne der Kraft Q entgegengesetzt ist. Die Spindel stützt sich auf die Gänge der Schraubennutter, erfährt von diesen Normal- und Reibungswiderstände, die sich zu Gesamtwiderständen zusammensetzen. Die Widerstände vertheilen sich auf die Breite des Schraubenganges, doch machen wir die vereinfachende

Fig. 318.



Voraussetzung, dass sie an dem Halbmesser $r = 1/2 (r_1 + r_2)$ angreifend gedacht werden können. An einem Theilchen des Schraubenganges bei A wirkt ein Normaldruck dN , der gegen die Achse der Spindel um denselben Winkel α geneigt ist, den die mittlere Schraubenlinie mit der Querschnittsebene der Spindel bildet. dN setzt sich mit der Reibung $f dN$ zu dW zusammen, welches von dN um den Reibungswinkel φ abweicht, daher mit der Achsenrichtung der Schraube den Winkel $\alpha + \varphi$ bildet. dW liefert in der Richtung der Drehachse eine Seitenkraft $dW \cos (\alpha + \varphi)$, und die Summe aller dieser Seitenkräfte muss der entgegengesetzten Kraft Q gleich sein, weil die Verschiebung gleichförmig erfolgen soll (s. A. Ritter, Technische Mechanik). Da nun α und φ für die ganze Erstreckung des Schraubenganges dieselben Werthe haben, so ist

$$2) \quad Q = \cos (\alpha + \varphi) \Sigma dW.$$

Die wagerechten Seitenkräfte von dW sind Kräfte $dW \sin (\alpha + \varphi)$, welche im Grundrisse sämtlich Tangenten an den Kreis vom Halbmesser r bilden. In Bezug auf die Achse der Spindel haben sie eine Momentensumme $r \sin (\alpha + \varphi) \Sigma dW$, welches Widerstandsmoment durch das treibende Kräftepaar Kl überwunden werden muss, also

$$3) \quad Kl = r \sin (\alpha + \varphi) \Sigma dW.$$

Theilt man Gl. 3 durch Gl. 2, so entsteht $\frac{Kl}{Q} = r \operatorname{tg} (\alpha + \varphi)$ oder

$$4) \quad Kl = Qr \operatorname{tg} (\alpha + \varphi),$$

was sich mit $\operatorname{tg} \varphi = f$, für die Rechnung bequemer, schreiben lässt:

$$5) \quad Kl = Qr \frac{\operatorname{tg} \alpha + f}{1 - f \operatorname{tg} \alpha}.$$

Für gleichmässige Abwärtsbewegung im Sinne der Kraft Q kehren sich die Vorzeichen von φ und f um:

$$6) \quad K_1 l = Qr \operatorname{tg} (\alpha - \varphi) = Qr \frac{\operatorname{tg} \alpha - f}{1 + f \operatorname{tg} \alpha}.$$

Alle Kräftepaare $K_2 l$, unter deren Einwirkung die Schraubenspindel im Ruhezustande verbleibt, liegen zwischen den Grenzen Kl und $K_1 l$.

Für $\alpha = \varphi$ ist $K_1 l = 0$, also $K_1 = 0$, d. h. es verhält sich in diesem Falle die Spindel ähnlich wie ein Körper, der auf schiefer

Ebene unter einem Neigungswinkel $\alpha = \varphi$ unter Einwirkung der Schwere ohne Kräfte K gleichmässig abwärts gleitet. Für $\alpha > \varphi$ muss der Körper durch eine aufwärts gerichtete Kraft, die Spindel durch das Moment $K_1 l$ an beschleunigter Abwärtsbewegung verhindert werden. Für $\alpha < \varphi$ muss der Körper durch eine abwärts gerichtete Kraft, die Spindel durch ein Moment ($-K_1 l$) abwärts bewegt werden, da die abwärts treibende Kraft der Schwere oder der Last Q geringer ist als die Reibungswiderstände.

Da die Kraft Q und das Moment Kl mit den Widerständen $[dW]$ im Gleichgewichte sind und da die Widerstände $[dW]$ nach dem Gesetze der Wechselwirkung entgegengesetzt auf die Schraubennutter wirken, so übertragen sich Q und Kl auf die Schraubennutter; soll nun letztere nicht in Bewegung gerathen, so müssen an ihr Widerstände auftreten, welche dem Entgegengesetzten von Q und Kl gleichwerthig sind.

Der Wirkungsgrad der flachgängigen Schraube ergibt sich, wenn man eine Umdrehung betrachtet, zu $\eta = \frac{Qh}{Kl 2\pi}$, denn dabei wird der Angriffspunkt von Q um h gehoben, die Arbeit des Momentes Kl ist aber nach S. 221 gleich dem Momente mal dem Drehungswinkel. Da nun $h = 2r\pi \operatorname{tg} \alpha$, so wird mit Gl. 4:

$$7) \quad \eta = \frac{Q 2r\pi \operatorname{tg} \alpha}{Q r \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) 2\pi} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}.$$

Beispiel: Es sei $f = 0,15$. Wählt man nun $\operatorname{tg} \alpha$ ebenso gross, so wird

$$\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = \frac{0,15 + 0,15}{1 - 0,15 \cdot 0,15}, \quad \text{daher} \quad \eta = \frac{0,15 \cdot 0,9775}{0,3} = 0,49.$$

In diesem Falle $\alpha = \varphi$ steht die Schraube an der Grenze der Selbstsperrung; im Zusammenhange damit ist ihr Wirkungsgrad annähernd 0,5 (vergl. S. 216). Bei den meisten Anwendungen der Schraube ist Selbstsperrung erwünscht; ist z. B. $\operatorname{tg} \alpha = 0,07$ $f = 0,15$, so wird $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = \frac{0,07 + 0,15}{1 - 0,07 \cdot 0,15}$ und $\eta = \frac{0,07 \cdot 0,9895}{0,22} = 0,32$. Der Wirkungsgrad der Schraube ist daher nur ein geringer.

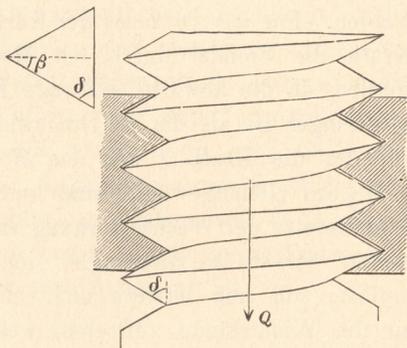
Bei kleinen Werthen von f und $\operatorname{tg} \alpha$ kann $f \operatorname{tg} \alpha$ gegen 1 vernachlässigt werden, so dass $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = \operatorname{tg} \alpha + f$; dann ergibt sich einfach $Kl = Q r (\operatorname{tg} \alpha + f)$ und $\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{f + \operatorname{tg} \alpha}$. Dies ergibt z. B.

$$\text{für } f = \operatorname{tg} \alpha = 0,15: \quad \eta = 0,5;$$

$$\text{für } f = 0,15, \operatorname{tg} \alpha = 0,07: \quad \eta = 0,318.$$

Scharfgängige Schraube (Fig. 319). Bei dieser ist der Querschnitt des Schraubenganges ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Kantenwinkel $2\beta = 55^\circ$. Der Übergang von der flachgängigen zur scharfgängigen Schraube ist hinsichtlich des Verhältnisses der wirkenden Kräfte ungefähr so zu beurtheilen wie der Übergang von dem Spurzapfen mit ebener Tragfläche zu dem kegelförmigen Spurzapfen; es findet auch hier ein keilartiges Einpressen der Spindel in die (wenn auch nur annähernd) trichterförmigen

Fig. 319.



Gänge der Schraubenmutter und dadurch eine Vergrößerung der Reibungswiderstände statt, die man am einfachsten berücksichtigt, indem man f , wo es in den Gleichungen der flachgängigen Schraube vorkommt, mit $f : \sin \delta$ oder mit $f : \cos \beta$ vertauscht. Denn δ (der halbe Keilnuthenwinkel) ist die Neigung der Kante des Gewindequerschnitts gegen die Achse, mithin $\delta = 90^\circ - \beta$. Behufs kürzester Schreibweise kann man auch den Reibungswinkel φ mit dem Winkel ψ vertauschen, wenn

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi : \cos \beta = f : \cos \beta = f \sec \beta$$

(vergl. S. 197). Dann wird für die scharfgängige Schraube

$$8) \quad Kl = Qr \operatorname{tg} (a + \psi) = Qr \frac{\operatorname{tg} a + f \sec \beta}{1 - f \sec \beta \operatorname{tg} a},$$

$$9) \quad K_1 l = Qr \operatorname{tg} (a - \psi) = Qr \frac{\operatorname{tg} a - f \sec \beta}{1 + f \sec \beta \operatorname{tg} a}.$$

Selbstsperrung tritt jetzt ein für $\operatorname{tg} a \leq \operatorname{tg} \psi = f : \cos \beta$.

$$10) \quad \eta = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} (a + \psi)} = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} a + f \sec \beta} (1 - f \sec \beta \operatorname{tg} a).$$

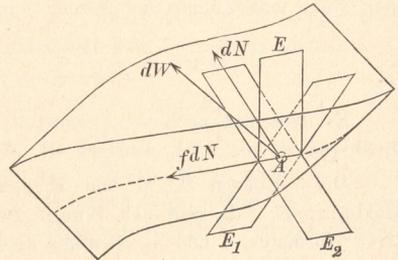
Diese Gleichungen sind die allgemeineren; mit $\cos \beta = \sec \beta = 1$ entstehen daraus wieder Gl. 5, 6 und 7 für flachgängige Schrauben.

Beispiel: Für $r = 0,015 \text{ m}$; $h = 0,003 \text{ m}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,003}{2 \cdot 0,015 \cdot \pi} = 0,032$; $f = 0,15$; $\cos \beta = \cos 27^{1/2} 0 = 0,897$; $f \sec \beta = 0,17$ und $l = 0,4 \text{ m}$ wird $Kl = 0,003046 \text{ Q}$; $K = 0,0075 \text{ Q}$; $K_1 l = -0,0020 \text{ Q}$; $K_1 = -0,005 \text{ Q}$; $\eta = 0,16$.

Die vorstehenden Gleichungen für die scharfgängige Schraube sind zur zahlenmässigen Berechnung völlig ausreichend, können aber in wissenschaftlicher Beziehung nur als Annäherungen gelten, denn der Übergang von der flachgängigen Schraube zur scharfgängigen, wie er auf Seite 260 behandelt wurde, ist nicht ganz zutreffend, da das Gewinde der scharfgängigen Schraube nicht als ein Kegel angesehen werden darf. Wir fügen daher noch folgende schärfere Behandlung des Falles nach, wobei wir der Notiz von Zierold über die Ableitung des Verhältnisses zwischen Kraft und Last bei der Schraube mit scharfem Gewinde (Civilingenieur 1894, S. 155) folgen.

A sei (Fig. 320) ein Punkt der mittleren Schraubenlinie vom Halbmesser r . Durch ein Bogentheilchen dieser Schraubenlinie legen wir eine Ebene E , welche den Cylinder vom Halbmesser r bei A berührt. Durch dasselbe Bogentheilchen legen wir eine Berührungsebene E_1 an die gedrückte Schraubenfläche. Rechtwinklig zu ihr steht der Normaldruck dN ; die Reibung $f dN$ ist tangential zur mittleren Schraubenlinie; der

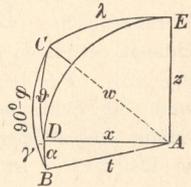
Fig. 320.



Gesamtwiderstand dW aus dN und $f dN$ liegt in einer Ebene E_2 , welche auf E_1 rechtwinklig steht, weil sie durch dN geht und dN winkelrecht zu E ist. Eine durch A gelegte Parallele zur Schraubenchse werde mit z bezeichnet, die Richtung der Kraft $f dN$ als Tangente an die Schraubenlinie mit t . Ferner legen wir durch A eine Gerade x , welche in der Ebene E liegt, u. zw. rechtwinklig zu z . Die Richtung von dW heisse w .

Dann bilden w , x und t eine körperliche Ecke, und es entsteht, wenn man um A eine Kugelfläche beschreibt, das Kugeldreieck BCD (Fig. 321). Darin ist die Seite $BC = 90^\circ - \varphi$, weil dW von $f dN$ um diesen Winkel abweicht, die Seite $BD = a$, dem Neigungswinkel der mittleren Schraubenlinie. Die Seite CD zwischen w und x werde ϑ , der Winkel bei B an der Kante t aber γ genannt; dies ist der Winkel zwischen den Ebenen E und E_2 .

Fig. 321.



Für das Kugeldreieck gilt dann nach dem Cosinus-Satze, weil ϑ und γ einander gegenüber liegen:

$$\cos \vartheta = \cos a \cos (90^\circ - \varphi) + \sin a \sin (90^\circ - \varphi) \cos \gamma$$

11)

$$\text{oder } \cos \vartheta = \cos a \sin \varphi + \sin a \cos \varphi \cos \gamma.$$

Die Geraden z , t und w bilden eine räumliche Ecke, der das Kugeldreieck BCE entspricht. Der Bogen BE fällt mit BD theilweise zusammen,

da t , x und z in der Ebene E liegen. In BCE ist wieder $BC = 90^\circ - \varphi$, $BE = 90^\circ + \alpha$ (denn x und z bilden mit einander einen rechten Winkel, x und t den Winkel α). Die Seite CE zwischen w und z werde λ genannt. In BCE liegen sich γ und λ gegenüber, daher ist

$$\cos \lambda = \cos (90^\circ + \alpha) \cos (90^\circ - \varphi) + \sin (90^\circ + \alpha) \sin (90^\circ - \varphi) \cos \gamma$$

12) oder $\cos \lambda = -\sin \alpha \sin \varphi + \cos \alpha \cos \varphi \cos \gamma$.

Da dW mit x und z die Winkel ϑ bzw. λ einschliesst, so wird, entsprechend den Gl. 2 und 3, S. 258:

$$Q = \cos \lambda \Sigma dW;$$

$$Kl = r \cos \vartheta \Sigma dW \quad \text{und}$$

$$Kl = Qr \frac{\cos \vartheta}{\cos \lambda} = Qr \cdot \frac{\cos \alpha \sin \varphi + \sin \alpha \cos \varphi \cos \gamma}{-\sin \alpha \sin \varphi + \cos \alpha \cos \varphi \cos \gamma},$$

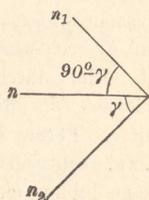
oder, wenn man Zähler und Nenner durch $\cos \alpha \cos \varphi$ theilt:

$$13) \quad Kl = Qr \frac{f + \operatorname{tg} \alpha \cos \gamma}{-f \operatorname{tg} \alpha + \cos \gamma} = Qr \frac{\operatorname{tg} \alpha + f \sec \gamma}{1 - f \sec \gamma \operatorname{tg} \alpha}.$$

Es muss nun noch $\sec \gamma$ ermittelt, bzw. gezeigt werden, dass $\sec \gamma$ sehr annähernd $= \sec \beta$ ist, wodurch Gl. 13 in Gl. 8 übergehen würde.

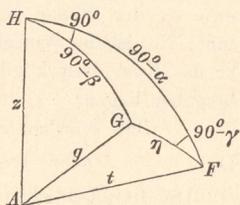
Die 3 Ebenen E , E_1 und E_2 gehen sämmtlich durch t . E_2 ist rechtwinklig zu E_1 ; da nun der Winkel zwischen E und E_2 γ ist, so schliessen deren Normalen n und n_2 ebenfalls diesen Winkel ein, und weil E_1 und E_2 zu einander winkelrecht, so sind es auch deren Normalen n_1 und n_2 . Da die 3 Ebenen durch die Tangente t gehen, so stehen die 3 Normalen n , n_1 und n_2 (Fig. 322) sämmtlich rechtwinklig zur Tangente t , und zwischen den Normalen n und n_1 findet sich der Winkel $90^\circ - \gamma$, so dass die Ebenen E und E_1 ebenfalls den Winkel $90^\circ - \gamma$ mit einander bilden.

Fig. 322.



Nennt man g die durch A gelegte Erzeugende der Schraubenfläche, welche mit z den Winkel $90^\circ - \beta$ einschliesst, so bilden g , t und z eine Ecke, entsprechend dem Kugeldreieck FGH (Fig. 323). FH liegt in der Ebene E durch z und t , GH in einer Ebene durch die Schraubenachse, welche zu E rechtwinklig, weshalb der Winkel bei H (an der Kante z) ein Rechter. t ist gegen z um $\angle FH = 90^\circ - \alpha$, g gegen z wie oben schon gesagt, um $\angle GH = 90^\circ - \beta$ geneigt; nennt man noch die Seite $FG = \eta$, so giebt der Sinus-Satz:

Fig. 323.



$$\frac{\sin (90^\circ - \gamma)}{\sin 90^\circ} = \frac{\sin (90^\circ - \beta)}{\sin \eta} \quad \text{oder}$$

$$14) \quad \cos \gamma = \frac{\cos \beta}{\sin \eta} \quad \text{und} \quad \sec \gamma = \frac{\sin \eta}{\cos \beta};$$

möge an einem Kreise vom Halbmesser r_1 angreifen, dann ist das ganze erforderliche Kraftmoment

$$Kl = Qr \frac{\operatorname{tg} \alpha + f \sec \beta}{1 - f \sec \beta \operatorname{tg} \alpha} + Qfr_1.$$

Beispiel: Es sei wiederum, wie S. 261, $r = 0,015$ m; $h = 0,003$ m; $\operatorname{tg} \alpha = 0,032$; $f = 0,15$ $\cos \beta = 0,887$; $f \sec \beta = 0,17$; $l = 0,4$ m; $r_1 = 0,02$ m; $Q = 1000$ kg; dann wird

$$Kl = 0,003 \cdot 1000 + 0,15 \cdot 0,02 \cdot 1000 = 3 + 3 = 6 \text{ mkg, mithin } K = 15 \text{ kg.}$$

Zum Lösen ist erforderlich $-K_1 l = 0,002 \cdot 1000 + 0,003 \cdot 1000 = 5$ mkg, $-K_1 = 12,5$ kg; ohne Reibung wäre $K_0 = 0,015 \cdot 1000 \cdot 0,032 : 0,4 = 1,2$ kg, mithin ist $K = 12,5 K_0$ in Folge der bedeutenden Reibung.

Beispiel: Schraubenpresse (Fig. 325). An den oberen Griffen wirkt das Kräftepaar Kl zur Hervorbringung des Druckes Q der flachgängigen Spindel gegen die Pressplatte. Dann entsteht an dem Zapfen, mittels dessen sich die Spindel auf die Pressplatte setzt, noch ein Reibungsmoment, welches wegen geringer Abrundung der Druckfläche (nach S. 227, Gl. 7) zu $1/2 Qfr_1$ angenommen werden möge, wenn r_1 der Zapfenhalbmesser. Daher wird

$$Kl = Q \{ r \operatorname{tg} (\alpha + \varphi) + 1/2 f r_1 \}.$$

Für $l = 0,4$ m; $r = 0,04$ m; $\operatorname{tg} \alpha = 0,07$ $f = 0,15$; $r_1 = 0,03$ m erhält man

$$\operatorname{tg} (\alpha + \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + f}{1 - f \operatorname{tg} \alpha} = 0,22 \text{ und}$$

$$K \cdot 0,4 = Q \{ 0,04 \cdot 0,22 + 1/2 \cdot 0,15 \cdot 0,03 \}$$

$$K \cdot 0,4 = 0,0111 Q; K = 0,028 Q.$$

Ohne Reibung wäre

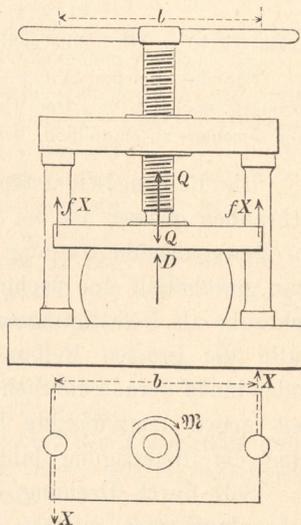
$$K_0 \cdot 0,4 = Qr \operatorname{tg} \alpha; K_0 = 0,007 Q.$$

Der Wirkungsgrad ist darnach $K_0 : K = 1/4$. Hierbei ist noch ein kleiner Widerstand unberücksichtigt geblieben. Das Zapfenreibungsmoment $\mathfrak{M} = 1/2 f Q r_1$ drückt nämlich die Platte gegen die Führungssäulen mit den Kräften $X = \mathfrak{M} : b$; daraus entsteht an jeder Säule ein Reibungswiderstand fX , der sich dem Abwärtsgleiten der Pressplatte entgegensetzt. Mithin ist der Druck D der Platte auf den zu pressenden Körper nicht genau $= Q$, sondern

$$D = Q - 2fX = Q \left(1 - 2f \cdot \frac{fr_1}{2b} \right) = Q \left(1 - \frac{f^2 r_1}{b} \right) = Q (1 - 0,0017)$$

für $b = 0,4$ m. Der Unterschied zwischen D und Q ist hiernach ohne Bedeutung.

Fig. 325.



Die Kraftverhältnisse der Schraube sind unabhängig von der Anzahl der Gewindgänge, längs deren Spindel und Schraubenmutter sich berühren. In der Anwendung freilich ist die Berührung längs mehrerer Schraubengänge nothwendig, weil sonst wegen des vorhandenen Spielraumes die Sicherheit des Eingriffes leidet, u. U. auch der Druck auf die Flächeneinheit zu gross werden würde.

Schlussbemerkung über die Reibung. Ist die Reibung bei Maschinen ein erhebliches Bewegungshindernis, dessen Überwindung viel Kosten verursacht, so ist ihr Nutzen doch im gewöhnlichen Leben und in der Technik ein sehr erheblicher. Welche Erleichterung ein grosser Reibungswiderstand beim Gehen bietet, erkennt man beim Schreiten auf glattem Eise; ein grosser Theil der Befestigungen im Bau- und Maschinenwesen (durch Nägel, Keile, Schrauben) beruht auf der Reibung; die Seilreibung wird beim Hinablassen schwerer Lasten und beim Riemenbetriebe verwerthet, mittels der Reibung der Triebräder auf den Schienen setzt die Lokomotive den Zug in Bewegung; mit Hilfe der Reibung bringen wir den Zug oder ein Strassenfuhrwerk wieder zum Stillstande.

Die mechanische Arbeit, welche zur Überwindung von Reibungswiderständen dient, mithin keine sichtbare Geschwindigkeitszunahme der bewegten Körper, d. h. keine Zunahme ihres äusseren Arbeitsvermögens hervorbringt, geht aber keineswegs spurlos verloren; vielmehr setzt sie sich nach den Lehren der Physik in inneres Arbeitsvermögen, in Wärme, um. Gleichwohl ist man berechtigt, von einem Arbeitsverluste durch Reibung zu sprechen, weil die beim Gleiten entstehende Wärme dem Zwecke einer Maschine gewöhnlich nicht förderlich ist, vielmehr häufig besondere Mittel zu ihrer Ableitung und Vertheilung nöthig macht.
