14. Satz der Arbeit.

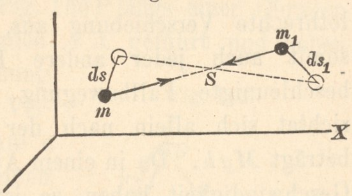
Auf einen Massenpunkt eines Körpers wirkt ausser der äusseren Kraft K eine innere Kraft S. Sie verrichten bei einer Bewegung des Körpers die Arbeiten $\mathfrak{A}_k$ und $\mathfrak{A}_i$. Sind c und v Anfangs- und Endgeschwindigkeit des Punktes, so gilt für den Massenpunkt $\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m c^2 = \mathfrak{A}_k + \mathfrak{A}_i$, denn an dem Massenpunkt m kann für die Arbeit der Mittelkraft aus K und S ohne Weiteres die Arbeitssumme der Einzelkräfte gesetzt werden. Stellt man diese Gleichung für sämmtliche Massenpunkte auf, so ergiebt sich durch Zusammenzählen:

1) $$\Sigma \tfrac{1}{2} m v^2 - \Sigma \tfrac{1}{2} m c^2 = \Sigma \mathfrak{A}_k + \Sigma \mathfrak{A}_i.$$

Oder die Zunahme des ganzen Körpers an Arbeitsvermögen ist gleich der Arbeitssumme der äusseren und der inneren Kräfte. Es lässt sich zeigen, dass die Arbeit der inneren Kräfte für einen starren Körper Null ist.

Die inneren Kräfte treten zwischen je zwei Massenpunkten paarweise gleich und entgegengesetzt auf. Betrachten wir ein Paar solcher Massenpunkte m und m_1 (Fig. 162) mit den inneren Kräften S, welche beispielsweise gegenseitige Anziehungskräfte sein mögen, und nehmen wir an, dass sich die Punkte um ds bezw. ds_1 bewegen. Zerlegen wir dann die Kräfte S in X, Y, Z; ds in die Projektionen dx, dy, dz; ds_1 in dx_1, dy_1, dz_1, so wird an m die Arbeit verrichtet: $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$, an m_1 aber $-(X\,dx_1 + Y\,dy_1 + Z\,dz_1)$. Die Arbeitssumme an beiden Punkten ist also $d\mathfrak{A}_i = X d(x - x_1) + Y d(y - y_1) + Z d(z - z_1)$. Bildet aber S mit den Achsenrichtungen die Winkel α, β, γ, so ist, wenn x, y, z bezw. x_1, y_1, z_1 die Koordinaten von m und m_1, a ihre Entfernung:

Fig. 162.



$$X = S \cos \alpha = S \frac{(x_1 - x)}{a} = - S \frac{x - x_1}{a}$$

$$Y = S \cos \beta = S \frac{y_1 - y}{a} = - S \frac{y - y_1}{a}$$

$$Z = S \cos \gamma = S \frac{z_1 - z}{a} = - S \frac{z - z_1}{a}.$$

Daher kann man schreiben:

$$d\mathfrak{A}_i = -\frac{S}{2a}d\left\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\right\}, \text{ oder,}$$

weil $x_1 - x$, $y_1 - y$ und $z_1 - z$ die drei Projektionen von a:

$$d\mathfrak{A}_i = -\frac{S}{2a}d(a^2) = -\frac{S}{2a}2a\,da = -S\,da.$$

Ist also der Abstand a der beiden Punkte veränderlich, so verrichten die inneren Kräfte S eine Arbeit; dies wird gelten für elastisch-feste Körper, die während der Betrachtung ihre Form ändern. Für starre Körper aber ist $da = 0$, mithin auch $d\mathfrak{A}_i = 0$. Also:

Bei **starren** Körpern ist die Zunahme an Arbeitsvermögen gleich der Arbeitssumme der **äusseren** Kräfte.

2) $$\Sigma{}^1/_2\,m\,v^2 - \Sigma{}^1/_2\,m\,c^2 = \Sigma\mathfrak{A}_k.$$

Hatte ein starrer Körper zu Anfang keine Bewegung, war die Geschwindigkeit aller Punkte Null und überlässt man ihn der alleinigen Einwirkung der Schwere, so führt er (nach S. 141) eine lothrechte Verschiebung aus, bei welcher der Schwerpunkt und somit auch jeder andere Punkt eine lothrechte, gleichförmig beschleunigte Fallbewegung hat. Die Arbeit der Schwerkräfte richtet sich allein nach der Senkung h des Schwerpunktes und beträgt Mgh. Da in einem Augenblicke sämmtliche Punkte dieselbe Geschwindigkeit haben, so ist einfach ${}^1/_2\,Mv^2 - {}^1/_2\,Mc^2 = Mgh$, genau wie beim Massenpunkte.

Wird der Körper aber in schräger Richtung so fortgeworfen, dass zu Anfang die Bewegung ebenfalls ohne jede Drehung erfolgt, dass also sämmtliche Punkte die gleiche Geschwindigkeit c haben, so muss (unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes) die weitere Bewegung ebenfalls eine Verschiebung sein, und zwar wird der Schwerpunkt, und damit jeder andere Punkt, die Wurfparabel beschreiben, genau wie ein einfacher Massenpunkt.