welchen d'Alembert (1717—1783) im Jahre 1743 in etwas anderer Fassung aufgestellt hat:

An einem starren Körper oder auch an einer veränderlichen Massengruppe heben die gesammten Ergänzungskräfte $[-mp]$ die Gruppe der äusseren Kräfte $[K]$ auf, wenn die Zusammensetzung der Kräfte wie an einem starren Körper erfolgt.

Mit Hülfe dieses Satzes lässt sich leicht die Frage beantworten, unter welcher Bedingung ein starrer Körper eine rein fortschreitende Bewegung, sog. Verschiebung ausführen kann. Bei einer Verschiebung haben alle Punkte des Körpers in einem Augenblicke gleiche Geschwindigkeit und Beschleunigung; nennt man die gemeinsame Beschleunigung p, so bilden die Ergänzungskräfte $[-mp]$ eine Kräftegruppe, die sich gleichmässig über die Masse des Körpers vertheilt. Die Kräfte haben eine durch den Schwerpunkt gehende Mittelkraft $-Mp$, und diese muss von den äusseren Kräften aufgehoben werden. Erkennt man also, dass ein Körper eine reine Verschiebung erfährt, so kann man daraus schliessen, dass die Mittelkraft aller auf ihn wirkender äusseren Kräfte durch den Schwerpunkt gehen und von der Grösse $+Mp$ sein muss. Umgekehrt genügt aber das Wirken dieser Kraft noch nicht zur Erzeugung einer Verschiebung, sondern es ist dazu noch erforderlich, dass der Körper auch zu Anfang keine Drehbewegung hatte.

13. Satz von der Bewegung des Schwerpunktes.

Die Ergänzungskraft $-mp$ hat nach der x-Richtung eine Seitenkraft $-mp_x$, die Seitenkraft einer äusseren Kraft K in der x-Richtung sei $K\cos\alpha$, dann muss nach d'Alembert's Satze sein:

$$\Sigma K\cos\alpha - \Sigma mp_x = 0, \quad \text{oder, wenn } \Sigma K\cos\alpha = X,$$

$$\Sigma mp_x = X.$$

Bezieht man nun die Punkte des Körpers auf ein festes Achsenkreuz, so ist $dx:dt$ die Geschwindigkeit, $\frac{d^2x}{dt^2}$ die Beschleunigung in der x-Richtung, also

$$\text{1)} \qquad \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = X.$$

Nach der Lehre vom Schwerpunkt ist $\Sigma m x = M x_0$ und, weil x und x_0 mit der Zeit t veränderlich sind,

$$2)\qquad \Sigma m \frac{dx}{dt} = M \frac{dx_0}{dt}$$

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = M \frac{d^2x_0}{dt^2};\ \text{mithin wird}$$

$$3)\qquad M \frac{d^2x_0}{dt^2} = X.$$

Darin bedeutet $\frac{d^2x_0}{dt^2}$ die Seitenbeschleunigung des Schwerpunktes in der Richtung der x-Achse. Dieselbe Beziehung gilt aber auch für einen einfachen Massenpunkt von der Masse M, der sich unter Einwirkung der äusseren Kräfte K bewegt, und zwar gilt dies für jede Achsenrichtung.

Also: Der Schwerpunkt eines Körpers oder einer beliebigen Massengruppe bewegt sich genau so, als ob die ganze Masse des Körpers oder der Gruppe in ihm vereinigt wäre und als ob sämmtliche äussere Kräfte (parallel verschoben) an ihm wirkten. Die inneren Kräfte haben hiernach auf die Bewegung des Schwerpunktes keinen Einfluss.

Durch diesen Satz bekommt die Mechanik des Massenpunktes eigentlich erst ihr grosses Anwendungsgebiet. Da es einen einzelnen Massenpunkt von verschwindend kleinen Abmessungen in aller Strenge nicht giebt, so konnte es bis hierher scheinen, als ob die Lehren von der Bewegung des Massenpunktes für die Anwendung ziemlich werthlos seien. Aus vorstehendem Satz aber erkennt man, dass die Lehre von der Bewegung des Massenpunktes auch für Körper ihre Bedeutung hat, insofern sie die Bewegung des Schwerpunktes richtig darstellt. Eine ausserdem etwa noch vorkommende Drehung um den Schwerpunkt kann dann noch besonders untersucht werden und bildet eine Ergänzung oder Vervollständigung der ganzen Aufgabe, nicht aber eine Berichtigung. In vielen Fällen wird man auch auf diese (häufig schwierige) Ergänzung der Lösung verzichten und sich mit der Kenntnis der Bewegung des Schwerpunktes begnügen.

Ein Kräftepaar wird bei der Verschiebung der Kräfte an den Schwerpunkt zwei Kräfte liefern, die sich aufheben. Kräftepaare haben hiernach keine Einwirkung auf die Bewegung des Schwerpunktes, sondern beeinflussen nur die Drehung des Körpers um den Schwerpunkt.