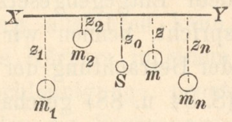
gegenseitige Verbindung) nennt man den irgend einer gegenseitigen Lage der Massentheilchen entsprechenden Punkt mit der Eigenschaft:

$$x_0 = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}, \quad y_0 = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}; \quad z_0 = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m}$$

den Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt.

Sind $m_1, m_2, \ldots m_n$ (Fig. 160) einzelne Massenpunkte oder einzelne starre Körper, die zusammen einen starren, oder einen der Form nach veränderlichen Körper, oder eine beliebige Massengruppe bilden, und wirkt auf diese die Schwere in der Richtung der z-Achse, so verrichtet die Schwere bei einer unendlich kleinen Verrückung, bei der sich ein Massentheil m so bewegt, dass z um dz zunimmt, eine Arbeit $mg \cdot dz$. Die Arbeitssumme der Schwerkräfte an allen Massentheilchen ist dann

Fig. 160.



$$d\mathfrak{A} = g(m_1 dz_1 + m_2 dz_2 + \ldots + m dz) = g \Sigma m dz.$$

Nun ist aber $m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + mz = \Sigma mz = z_0 \Sigma m$, also, weil bei einer Verrückung die Massen m unveränderlich, die z-Werthe aber veränderlich, $\Sigma m dz = dz_0 \Sigma m$; mithin ist

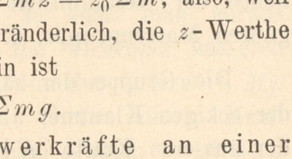
$$d\mathfrak{A} = g dz_0 \Sigma m = dz_0 \Sigma mg.$$

Die Arbeitssumme der Schwerkräfte an einer beliebigen Massengruppe berechnet sich gerade so, als ob die ganze Masse Σm der Gruppe in ihrem Schwerpunkte zu einem Massenpunkte vereinigt wäre.

12. Der Satz d'Alembert's.

Greift an einem Punkte m einer Massengruppe (Fig. 161) eine äussere Kraft K an, so würde der Punkt, wenn er frei wäre im Sinne von K eine Beschleunigung $K:m$ erfahren. Die übrigen Punkte der veränderlichen oder unveränderlichen Massengruppe werden aber ebenfalls auf die Bewegung von m einwirken, also Kräfte, die sog. inneren Kräfte auf m ausüben, deren Mittelkraft S sein möge. Durch S ist der Einfluss der übrigen Punkte völlig ausgedrückt; nach Anbringung dieser Kraft verhält

Fig. 161.



sich also der Punkt m wie ein freier. Nennt man daher p die wirkliche Beschleunigung des Punktes m, so muss die dazu erforderliche Kraft mp die Mittelkraft aus K und S darstellen, oder man kann schreiben

$$mp \equiv K, S.$$

Ist aber mp die Mittelkraft von K und S, so würde das Entgegengesetzte von mp, die Kräfte K und S aufheben, was man schreiben kann: $K, S, -mp \equiv 0$. Diese Kraft $-mp$, die dem Entgegengesetzten der Beschleunigung p des Punktes m entspricht, nennen wir seine Ergänzungskraft, ebenso wie es bei der Betrachtung der scheinbaren Bewegung bezw. Ruhe eines Punktes (S. 84 u. 88) geschah. (Es ist ja auch ein Massenpunkt in scheinbarer Ruhe in Bezug auf einen Raum, der sich mit der Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes verschiebt.)

Dies Tilgen der Kräfte K, S und $-mp$ findet an jedem Massenpunkte statt; daraus folgt dann auch ein gegenseitiges Aufheben der Gesammtheit der entsprechenden Kräftegruppen an der ganzen Massengruppe, d. h.:

Die Gruppe der sämmtlichen Ergänzungskräfte $[-mp]$ (mit der eckigen Klammer als Gruppenzeichen) hebt die beiden Gruppen der äusseren Kräfte $[K]$ und der inneren Kräfte $[S]$ auf.

Die auf S. 96—136 entwickelten Lehren über die Gleichwerthigkeit und Zusammensetzung der Kräfte gelten einstweilen nur für Kräfte an starren Körpern. Wenn aber an einer veränderlichen Massengruppe jeder Massenpunkt der Einwirkung von drei Kräften unterworfen wird, die sich aufheben oder im Gleichgewichte halten, so wird in diesem Gleichgewichtszustande der Kräfte jedes Punktes auch dadurch nichts geändert werden, dass man die Punkte in starre Verbindung bringt. Wenn man also die drei Kräftegruppen $[-mp]$, $[K]$, $[S]$ nach den Lehren über die Zusammensetzung der Kräfte an starren Körpern zu einer Mittelkraft R und einem Achsenmoment $\mathfrak{M}$ vereinigt, so müssen R und $\mathfrak{M}$ gleichzeitig Null werden. Die inneren Spannkräfte S wirken aber zwischen je zwei Punkten nach dem Gesetze der Wechselwirkung gleich und entgegengesetzt und heben sich daher bei der Zusammensetzung aller Kräfte zu je zweien auf, so dass die Gruppe der inneren Kräfte $[S]$ überhaupt verschwindet. Daraus folgt der Satz, welchen d'Alembert (1717—1783) im Jahre 1743 in etwas anderer Fassung aufgestellt hat:

An einem starren Körper oder auch an einer veränderlichen Massengruppe heben die gesammten Ergänzungskräfte $[-mp]$ die Gruppe der äusseren Kräfte $[K]$ auf, wenn die Zusammensetzung der Kräfte wie an einem starren Körper erfolgt.

Mit Hülfe dieses Satzes lässt sich leicht die Frage beantworten, unter welcher Bedingung ein starrer Körper eine rein fortschreitende Bewegung, sog. Verschiebung ausführen kann. Bei einer Verschiebung haben alle Punkte des Körpers in einem Augenblicke gleiche Geschwindigkeit und Beschleunigung; nennt man die gemeinsame Beschleunigung p, so bilden die Ergänzungskräfte $[-mp]$ eine Kräftegruppe, die sich gleichmässig über die Masse des Körpers vertheilt. Die Kräfte haben eine durch den Schwerpunkt gehende Mittelkraft $-Mp$, und diese muss von den äusseren Kräften aufgehoben werden. Erkennt man also, dass ein Körper eine reine Verschiebung erfährt, so kann man daraus schliessen, dass die Mittelkraft aller auf ihn wirkender äusseren Kräfte durch den Schwerpunkt gehen und von der Grösse $+Mp$ sein muss. Umgekehrt genügt aber das Wirken dieser Kraft noch nicht zur Erzeugung einer Verschiebung, sondern es ist dazu noch erforderlich, dass der Körper auch zu Anfang keine Drehbewegung hatte.

13. Satz von der Bewegung des Schwerpunktes.

Die Ergänzungskraft $-mp$ hat nach der x-Richtung eine Seitenkraft $-mp_x$, die Seitenkraft einer äusseren Kraft K in der x-Richtung sei $K \cos \alpha$, dann muss nach d'Alembert's Satze sein:

$$\Sigma K \cos \alpha - \Sigma m p_x = 0, \text{ oder, wenn } \Sigma K \cos \alpha = X,$$

$$\Sigma m p_x = X.$$

Bezieht man nun die Punkte des Körpers auf ein festes Achsenkreuz, so ist $dx : dt$ die Geschwindigkeit, $\frac{d^2 x}{dt^2}$ die Beschleunigung in der x-Richtung, also

$$\Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = X. \tag{1}$$