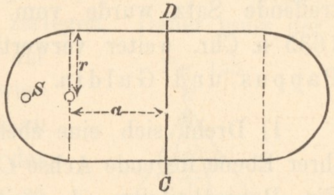
Achse entsteht, ist gleich der Länge der Kurve mal dem Drehungswege $2\pi x_0$ ihres Schwerpunktes. — Der Inhalt eines Körpers, welcher durch Drehung einer ebenen Fläche um eine in ihrer Ebene liegende Achse entsteht, ist gleich der Fläche mal dem Drehungswege ihres Schwerpunktes.

Fig. 157.

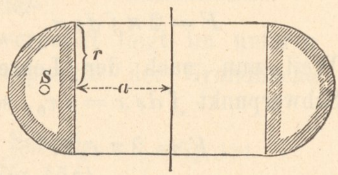


Beispiel: Dreht sich nach Fig. 157 ein Halbkreisbogen um die Achse CD, so ist nach S. 127

$$x_0 = a + 2\frac{r}{\pi}, \quad \text{mithin } F = r\pi\left(a + 2\frac{r}{\pi}\right)2\pi = 2ra\pi^2 + 4r^2\pi.$$

Der letzte Summand ist die Kugeloberfläche, welche für $a = 0$ entsteht.

Fig. 158.

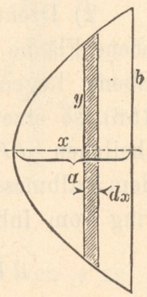


Durch Drehung der Halbkreisfläche entsteht ein Körper (Fig. 158)

$$V = \frac{1}{2}r^2\pi\, 2\pi\left(a + \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)$$
$$= r^2\pi^2 a + \frac{4}{3}r^3\pi.$$

Der letzte Summand bezeichnet den Inhalt des Kugelkörpers, welcher für $a = 0$ entsteht.

Fig. 159.



Beispiel: Der Inhalt eines Umdrehungs-Paraboloids (Fig. 159) ist leicht zu finden zu

$$V = \int y^2\pi\, dx = \pi\frac{b^2}{a}\int_0^a x\, dx = \frac{\pi b^2 a}{2},$$

gleich der Hälfte des umschliessenden Cylinders. Daraus lässt sich nun die Schwerpunkts-Ordinate y_0 der halben Parabelfläche berechnen:

$$\tfrac{1}{2} b^2 a\pi = \tfrac{2}{3} ab\, 2\pi y_0,$$

mithin $y_0 = \tfrac{3}{8} b$, wie auf S. 134 gefunden.

II. Arbeit der Schwerkräfte an einer beliebigen Massengruppe.

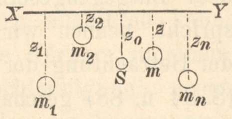
Der Schwerpunkt wurde im Vorhergehenden als der Mittelpunkt der Schwerkräfte eines starren Körpers, oder sonstiger, über die Masse eines starren Körpers gleichmässig vertheilter Massenkräfte gleichen Sinnes bezeichnet. Aber auch für Körper veränderlicher Form, ja selbst für beliebige Gruppen von Massen (mit oder ohne gegenseitige Verbindung) nennt man den irgend einer gegenseitigen Lage der Massentheilchen entsprechenden Punkt mit der Eigenschaft:

$$x_0 = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}, \quad y_0 = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}; \quad z_0 = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m}$$

den Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt.

Sind $m_1, m_2, \ldots m_n$ (Fig. 160) einzelne Massenpunkte oder einzelne starre Körper, die zusammen einen starren, oder einen der Form nach veränderlichen Körper, oder eine beliebige Massengruppe bilden, und wirkt auf diese die Schwere in der Richtung der z-Achse, so verrichtet die Schwere bei einer unendlich kleinen Verrückung, bei der sich ein Massentheil m so bewegt, dass z um dz zunimmt, eine Arbeit $mg \cdot dz$. Die Arbeitssumme der Schwerkräfte an allen Massentheilchen ist dann

Fig. 160.



$$d\mathfrak{A} = g(m_1\,dz_1 + m_2\,dz_2 + \ldots + m\,dz) = g\Sigma m\,dz.$$

Nun ist aber $m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + mz = \Sigma mz = z_0 \Sigma m$, also, weil bei einer Verrückung die Massen m unveränderlich, die z-Werthe aber veränderlich, $\Sigma m\,dz = dz_0 \Sigma m$; mithin ist

$$d\mathfrak{A} = g\,dz_0 \Sigma m = dz_0 \Sigma mg.$$

Die Arbeitssumme der Schwerkräfte an einer beliebigen Massengruppe berechnet sich gerade so, als ob die ganze Masse Σm der Gruppe in ihrem Schwerpunkte zu einem Massenpunkte vereinigt wäre.

12. Der Satz d'Alembert's.

Greift an einem Punkte m einer Massengruppe (Fig. 161) eine äussere Kraft K an, so würde der Punkt, wenn er frei wäre im Sinne von K eine Beschleunigung $K:m$ erfahren. Die übrigen Punkte der veränderlichen oder unveränderlichen Massengruppe werden aber ebenfalls auf die Bewegung von m einwirken, also Kräfte, die sog. inneren Kräfte auf m ausüben, deren Mittelkraft S sein möge. Durch S ist der Einfluss der übrigen Punkte völlig ausgedrückt; nach Anbringung dieser Kraft verhält

Fig. 161.