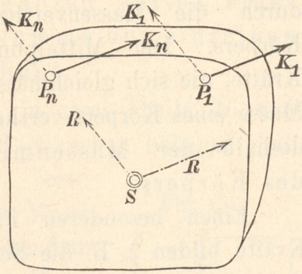
Diesen Gleichungen wird genügt durch $Rx_0 = \Sigma Kx$; $Ry_0 = \Sigma Ky$; $Rz_0 = \Sigma Kz$; denn durch Einsetzung dieser Werthe werden beide Seiten der drei Gleichungen einander gleich. Die Koordinaten des Punktes S werden hiernach

$$1) \qquad x_0 = \frac{\Sigma Kx}{\Sigma K}; \; y_0 = \frac{\Sigma Ky}{\Sigma K}; \; z_0 = \frac{\Sigma Kz}{\Sigma K}.$$

Da diese Werthe ganz unabhängig von den Richtungswinkeln α, β, γ der gegebenen Kräfte, nur abhängig sind von den Kraftgrössen K und von den auf ihren Richtungslinien gewählten Angriffspunkten (der Koordinaten x, y, z), so bleibt S unverändert, wenn die Parallelkräfte K sich um die Angriffspunkte P drehen. Während einer solchen Drehung der gegebenen Parallelkräfte (Fig. 131) dreht sich also die Mittelkraft $R = \Sigma K$ um den Punkt S, welcher aus diesem Grunde der **Mittelpunkt der in den Punkten P angreifenden Parallelkräfte** heisst.

Fig. 131.



10. Mittelpunkt der Massen (Schwerpunkt) eines starren Körpers.

Es möge die Gruppe der Parallelkräfte gleichen Sinnes derartig über die Masse des Körpers vertheilt sein, dass an **jedem** Massentheilchen eine der Masse verhältnisgleiche Kraft angreife. Dann können die an den Massentheilchen $m_1, m_2 \ldots m_n$ auftretenden Kräfte geschrieben werden: $m_1 p$; $m_2 p \ldots m_n p$. Es würde dann p die gemeinsame Beschleunigung sein, welche die Massentheilchen durch die Kräfte erfahren würden.

Die Absisse des Mittelpunktes S dieser Parallelkräfte ist dann $x_0 = \frac{\Sigma mpx}{\Sigma mp}$; die Bedeutung der Σ-Zeichen erhellt aus der Form:

$$x_0 = \frac{m_1 p x_1 + m_2 p x_2 + \ldots m_n p x_n}{m_1 p + m_2 p + \ldots x m_n p};$$

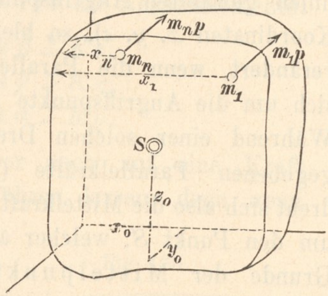
hierin hebt sich dann p als gemeinsamer Faktor im Zähler und Nenner fort, und es bleibt:

$$x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}.$$

$$\text{Ebenso } y_0 = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}; \quad z_0 = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m}.$$

Der so gefundene Mittelpunkt S ist ganz unabhängig von der Beschleunigung p, d. h. von der Grösse der Kräfte, er wird lediglich bedingt durch die Massen der einzelnen Theilchen und ihre Koordinaten, d. h. durch die Massenvertheilung des Körpers. Der Mittelpunkt solcher Kräfte, die sich gleichmässig über die Masse eines Körpers vertheilen, heisst deshalb der Massenmittelpunkt des Körpers.

Fig. 132.



Einen besonderen Fall solcher Kräfte bilden z. B. die Schwerkräfte. Bei solchen ist $p = g$ und die Richtung lothrecht abwärts. Der Massenmittelpunkt eines Körpers ist daher auch der Mittelpunkt der Schwerkräfte und heisst deshalb der Schwerpunkt. Wird der mit dem Achsenkreuze fest verbundene Körper gegen die Richtung des Lothes verdreht, so bleiben für jeden Massenpunkt die Werthe m, x, y und z unverändert, die Richtungen der Kräfte aber bleiben lothrecht und verdrehen sich dabei gegen das Achsenkreuz. Diese Verdrehung hat aber auf den Schwerpunkt S keinen Einfluss.

Der Schwerpunkt eines Körpers ist der Durchschnittspunkt der verschiedenen Richtungslinien des Gesammtgewichtes des Körpers bei verschiedenen Drehlagen desselben.

Nennt man die Gesammtmasse Σm des Körpers einfach M, so ist das Gesammtgewicht Mg, und dieses geht immer durch den Schwerpunkt S hindurch, wie auch der Körper bewegt werden mag.

Die Gleichungen für die Koordinaten des Schwerpunktes kann man auch schreiben:

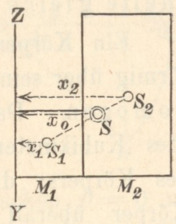
1) $$\boldsymbol{\Sigma m x = M x_0; \quad \Sigma m y = M y_0; \quad \Sigma m z = M z_0.}$$

Der Ausdruck $\Sigma m x$ wird erhalten, indem man jedes Massentheilchen m mit seinem Abstande von der yz-Ebene multiplicirt und diese Produkte zusammenzählt. Ein Produkt dieser Art, mx, heisst das statische Moment der Masse m in Bezug auf die yz-Ebene; Mx_0, bei dem man sich die ganze Masse des Körpers im Schwerpunkte vereinigt denkt, heisst das statische Moment der ganzen Masse. Dieselben Beziehungen, welche für die yz-Ebene gelten, sind auch für die anderen Koordinaten-Ebenen gültig, und weil die Koordinaten-Ebenen ganz willkürlich angenommen werden können, so gelten sie überhaupt für jede Ebene. Daher folgt der Satz:

Das statische Moment der ganzen Masse eines Körpers ist gleich der Momentensumme der einzelnen Theile in Bezug auf irgend eine Ebene.

Kann man die Masse eines Körpers in zwei Theile M_1 und M_2 zerlegen, deren Schwerpunkte S_1 und S_2 schon bekannt sind, also auch deren Koordinaten x_1, y_1, z_1 bezw. x_2, y_2, z_2 (Fig. 133), so ist der Beitrag der Masse M_1 zur Momentensumme $\Sigma m x$ nach vorstehendem Satze $M_1 x_1$, derjenige der Masse M_2 aber $M_2 x_2$, und es wird

Fig. 133.



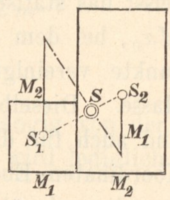
2) $$(M_1 + M_2)\,x_0 = M_1 x_1 + M_2 x_2 .$$

Stellt die Gerade YZ die zur Bildebene rechtwinklige yz-Ebene dar, so ergiebt sich ferner leicht, dass der Gesammtschwerpunkt S auf der Geraden $S_1 S_2$ liegen muss. Denn denken wir uns die Richtung der Schwere rechtwinklig zur Zeichenebene, so bilden $M_1 g$ und $M_2 g$ zwei Parallelkräfte, deren Mittelkraft in ihrer Ebene (mit der Spur $S_1 S_2$) liegen muss. Dreht sich die Richtung der Schwere, so drehen sich $M_1 g$ und $M_2 g$ um S_1 und S_2, ihre gemeinsame Ebene dreht sich um $S_1 S_2$, daher muss S in $S_1 S_2$ liegen. Ist also der Körper in zwei Massentheile M_1 und M_2 zerlegt, so genügt schon die eine Gleichung für x_0 zur Bestimmung von S auf $S_1 S_2$. Da bei der Zusammensetzung zweier Parallelkräfte gleichen Sinnes die Mittelkraft zwischen beiden liegt, und ihre Abstände von den beiden Kräften sich umgekehrt verhalten wie die Kräfte, so ist das Verhältnis dieser Abstände:

$$S S_1 : S S_2 = M_2 g : M_1 g = M_2 : M_1 .$$

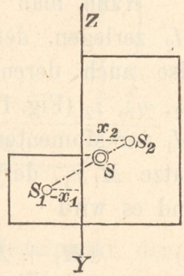
Hiernach kann man S leicht finden, indem man (Fig. 134) durch S_1 und S_2 beliebige Parallelen zieht und auf ihnen die Grössen M_2 bezw. M_1 (d. h. die vertauschten Massen) als Längen nach entgegengesetzten Seiten aufträgt. Die Verbindungsgerade der Endpunkte schneidet dann $S_1 S_2$ in S.

Fig. 134.



Legt man die yz-Ebene so, dass die Theilschwerpunkte zu beiden Seiten der Ebene liegen (Fig. 135), so haben x_1 und x_2 verschiedenes Vorzeichen, und es ist $Mx_0 = M_2 x_2 - M_1 x_1 = \Sigma mx$. Ist die yz-Ebene dann noch so gelegt, dass $M_1 x_1 = M_2 x_2$, so wird $Mx_0 = \Sigma mx = 0$, mithin $x_0 = 0$, d. h. der Schwerpunkt liegt in der xy-Ebene, daher der vielfach anzuwendende Satz:

Fig. 135.



I n B e z u g a u f e i n e d e n S c h w e r p u n k t e i n e s K ö r p e r s e n t h a l t e n d e E b e n e i s t d i e M o m e n t e n s u m m e s e i n e r M a s s e n t h e i l e g l e i c h N u l l, u n d u m g e k e h r t.

Ein Körper, dessen Masse M sich gleichförmig über seinen Rauminhalt V vertheilt, heisst h o m o g e n. Das Gewicht γ der Raumeinheit (des Kubikmeters) heisst (S. 55) die D i c h t e des Körpers; diese ist bei einem homogenen Körper überall gleich. Das Gewicht des ganzen Körpers ist $Mg = \gamma V$, das eines Raumtheilchens dV ebenso $mg = \gamma dV$; mithin sind die Massen $M = V\gamma : g$ bezw. $m = dV\gamma : g$. In den Gleichungen für den Schwerpunkt heben sich dann die allen Gliedern gemeinsamen Faktoren $\gamma : g$ fort, und es bleibt

3) $$Vx_0 = \int dV \cdot x,$$

indem statt des Zeichens Σ hier das gleichbedeutende $\int$-Zeichen gesetzt ist.

Eine Ebene, die einen homogenen Körper in zwei symmetrische Hälften theilt, enthält den Schwerpunkt, weil in Bezug auf sie $\int dV \cdot x = 0$ ist.

Schwerpunkte von Linien. Hat der homogene Körper die Gestalt eines dünnen Stabes von überall gleichem Querschnitt F, so ist, wenn die Länge des Stabes s, diejenige eines Theilchens ds,

$V = Fs$, $dV = F\,ds$. Es hebt sich dann der gemeinsame Querschnitt F in allen Gliedern fort, und man hat für einen solchen Stab, den man materielle Linie nennt:

4) $$s x_0 = \int ds \cdot x;$$

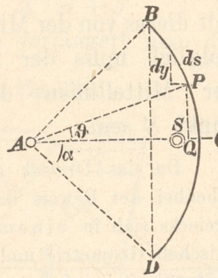
und für die anderen Richtungen entsprechend.

Der Schwerpunkt einer geraden Linie liegt selbstverständlich in der Mitte.

Bei einer gebrochenen Linie kennt man die Schwerpunkte S_1, S_2 der einzelnen Theile und deren Koordinaten. Es ist dann $(s_1 + s_2 + \ldots)\, x_0 = s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots$

Der Schwerpunkt eines Kreisbogens vom Halbmesser r und dem Centriwinkel $2\,\alpha$ liegt auf der Mittellinie (Fig. 136), zu suchen ist nur $AS = x_0$. Das Theilchen $ds = r\,d\vartheta$, bei P gelegen, hat von der durch A gelegten lothrechten yz-Ebene den Abstand $x = AQ = r \cos \vartheta$. Es ist $s = 2\,r\,\alpha$, und es gilt die Gleichung

Fig. 136.



$$2\,r\,\alpha\,x_0 = r^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \vartheta\, d\vartheta.$$

Denn zählt man den positiven Winkel ϑ nach oben, so entspricht dem unteren Endpunkte D der Winkel $\vartheta = -\alpha$. Jedoch sind die Beiträge der beiden Hälften des Bogens zur Momentensumme gleich gross, so dass man zwischen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \alpha$ integriren und das Ganze mit 2 multipliciren kann. Weil aber $d \sin \vartheta = \cos \vartheta\, d\vartheta$, so ist $\int \cos \vartheta\, d\vartheta = \sin \vartheta$, also

$$2\,r\,\alpha\,x_0 = 2\,r^2 \Big[\sin \vartheta\Big]_0^{\alpha} = 2\,r^2 \sin \alpha, \text{ oder}$$

5) $$x_0 = r\frac{\sin \alpha}{\alpha} = r\frac{2\,r \sin \alpha}{2\,r\,\alpha}.$$

Weil nun $2\,r \sin \alpha =$ der Sehne BD, $2\,r\,\alpha =$ dem Bogen BD, so kann das Ergebnis auch geschrieben werden:

$$x_0 : r = \text{Sehne} : \text{Bogen}.$$

Für einen sehr kleinen Bogen ist die Sehne gleich dem Bogen, daher $x_0 = r$; für einen Halbkreisbogen aber $\alpha = \frac{1}{2}\pi$; $\sin \alpha = 1$, mithin $x_0 = \frac{2}{\pi} r$ (annähernd $\frac{2}{3}\,r$).

Schwerpunkte von Flächen. Hat der homogene Körper die Gestalt einer ebenen oder gekrümmten Platte F von überallgleicher Dicke δ, so wird $V = \delta F$, $dV = \delta\, dF$, mithin

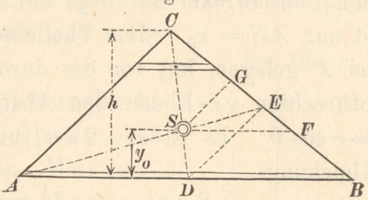
6) $$F x_0 = \int dF\, x.$$

Eine solche Platte nennt man eine materielle Fläche.

Der Schwerpunkt der Fläche eines regelmässigen Vielecks liegt natürlich im Mittelpunkte.

Eine **Dreieckfläche** (Fig. 137) lässt sich in sehr viele Streifen, parallel zur Grundlinie AB, zerlegen. Weil deren Schwerpunkte sämmtlich auf der Mittellinie CD liegen, so muss diese auch den Schwerpunkt S der ganzen Fläche enthalten. Mit demselben Rechte gilt dieses von der Mittellinie AE. Folglich muss der Schnittpunkt der Mittellinien der Schwerpunkt S sein.

Fig. 137.



Da das Dreieck nur einen Schwerpunkt haben kann, so liegt hierin nebenbei der Beweis des geometrischen Satzes, dass die 3 Mittellinien eines Dreiecks sich in einem Punkte schneiden. Wegen den innigen Beziehungen zwischen Geometrie und Mechanik kommt es nicht selten vor, dass Sätze der Mechanik in einfacher Weise zur Lösung geometrischer Aufgaben benutzt werden können.

Zieht man DE, so findet man leicht, dass $DE \parallel AC$ und $DE = \frac{1}{2} AC$, daher in den ähnlichen Dreiecken SAC und SED:

$$SC : SD = AC : DE = 2 : 1,$$

oder es liegt S im unteren Drittelpunkte der Mittellinie CD. Nennt man h das Höhenloth von C auf AB, y_0 das Loth von S, so wird offenbar

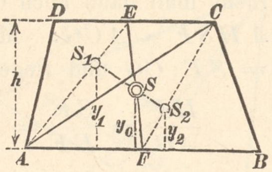
7) $$y_0 = \frac{1}{3} h.$$

Zieht man $SF \parallel AB$, so muss auch $BF = \frac{1}{3} BC$ sein, und ebenso, wenn $SG \parallel AC$, auch $CG = \frac{1}{3} BC$. Man kann daher S auch bestimmen, indem man BC in 3 gleiche Theile zerlegt, durch den Theilpunkt F eine Parallele zur nächsten Seite AB, durch den Theilpunkt G eine Parallele zur nächsten Seite CA zieht. Beide schneiden sich dann in S.

Das Trapez lässt sich, wie das Dreieck, in lauter Streifen, parallel den Grundlinien a und b zerlegen, weshalb der Schwerpunkt auf der Mittellinie des Trapezes liegen muss. Um seine Höhenlage zu finden, zerlege man das Trapez (Fig. 138) durch eine Diagonale in zwei Dreiecke

$$ACD = F_1\,,\quad ABC = F_2\,.$$

Fig. 138.



Von $AB = a$ aus gemessen, sind dann die Höhenabstände der Theilschwerpunkte $y_1 = {}^2/_3\,h;\ y_2 = {}^1/_3\,h$. Nach der Gleichung

$$F y_0 = F_1 y_1 + F_2 y_2$$

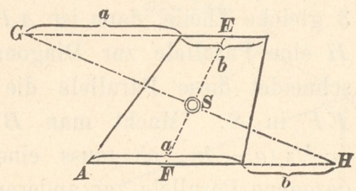
wird dann

$$^1/_2\,(a + b)\,h\,y_0 = {}^1/_2\,b h \cdot {}^2/_3\,h + {}^1/_2\,a h \cdot {}^1/_3\,h \quad \text{oder}$$

$$8)\qquad (a + b)\,y_0 = \frac{h}{3}\,(2\,b + a) \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{h}{3}\,\frac{a + 2\,b}{a + b}.$$

Zur geometrischen Konstruktion (Fig. 139) verlängert man die Seite b um a, die Seite a nach der anderen Richtung um b. Die Verbindungsgerade der Endpunkte der Verlängerungen schneidet dann die Mittellinie in S. Es is nämlich in den ähnlichen Dreiecken SEG und SFH

Fig. 139.



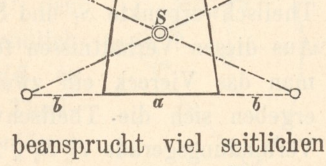
$$SF : SE = FH : EG = (b + {}^1/_2\,a) : (a + {}^1/_2\,b) = (a + 2\,b) : (2\,a + b),$$

mithin $\quad SF : EF = SF : (SE + SF) \quad$ oder

$$SF : EF = (a + 2\,b) : (a + 2\,b + 2\,a + b) = (2\,b + a) : 3\,(a + b).$$

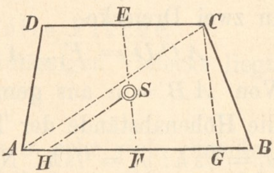
Dies stimmt mit dem Verhältnis $y_0 : h$ überein, mithin ist die Konstruktion richtig. Trägt man aber die Verlängerung a nach rechts, die Verlängerung b nach links auf (Fig. 140), so muss das Ergebnis das gleiche sein. Man braucht daher die Mittellinie gar nicht, sondern verlängert b nach beiden Seiten um a, a nach beiden Seiten um b, verbindet die Endpunkte der Verlängerungen kreuzweise, so schneiden sich die Verbindungsgeraden in S.

Fig. 140.



Obige sehr einfache Konstruktion beansprucht viel seitlichen Raum. Sollen die Konstruktionslinien ganz innerhalb des Trapezes bleiben, so kann man folgende Eigenschaft des Schwerpunktes S benutzen: Nach obigem liegt S auf der Halbirungslinie, u. zw. ist $SF : EF = (2b + a) : 3(a + b)$. Man ziehe (Fig. 141) die Diagonale AC und dazu durch S eine Parallele SH. Zieht man dann noch $CG \parallel EF$, so ist $\Delta HSF \sim ACG$. Mithin $HF : AG = SF : CG$ und wegen $CG = EF$:

Fig. 141.



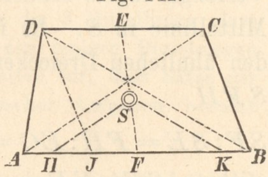
$$\frac{HF}{AG} = \frac{SF}{EF} = \frac{2b + a}{3(a + b)}.$$

Weil aber $AG = \frac{1}{2}(a + b)$, so wird

$$HF = \frac{2b + a}{3(a + b)} \frac{a + b}{2} = \frac{2b + a}{6} = \frac{b}{3} + \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{2} - \frac{a - b}{3}.$$

Da nun $AF = \frac{1}{2}a$, so muss $AH = \frac{1}{3}(a - b)$ sein. Man ziehe also (Fig. 142) $DJ \parallel CB$, so dass $AJ = a - b$, theile dieses in 3 gleiche Theile, dann ist $AH = \frac{1}{3}(a - b)$. Nun zieht man durch H eine Parallele zur Diagonale AC, so schneidet diese Parallele die Mittellinie EF in S. Macht man $BK = AH = \frac{1}{3}(a - b)$, so muss eine durch K gezogene Parallele zur anderen Diagonale BD mit demselben Rechte durch S gehen. Zieht man also diese Parallele KS durch K, so kann man die Mittellinie entbehren.

Fig. 142.



Dieses Verfahren rührt von Prof. G. Lang (Rigaische Industrie-Ztg. 1883, S. 126) und Prof. Rob. Land (Centralblatt der Bauverwaltung 1894, S. 458) her. Vergl. auch Zeitschrift des Hannov. Arch.- und Ing.-Vereins 1895, S. 115—117.

Schwerpunkt eines beliebigen Vierecks. Man theilt das Viereck (Fig. 143) durch die Diagonale BD in 2 Dreiecke, halbirt die Diagonale in M, zieht AM und CM, so liegen auf diesen die Theilschwerpunkte S_1 und S_2 mit $MS_1 = \frac{1}{3} MA$; $MS_2 = \frac{1}{3} MC$. Aus diesen Verhältnissen folgt, dass $S_1 S_2 \parallel AC$ sein muss. Theilt man das Viereck ein zweites Mal durch die Diagonale AC, so ergeben sich die Theilschwerpunkte S_3 und S_4, u. zw. muss die Verbindungsgerade $S_3 S_4 \parallel BD$ sein, geradeso wie $S_1 S_2 \parallel AC$ war. Der Gesammtschwerpunkt S des Vierecks muss nun im Schnitte von $S_1 S_2$ mit $S_3 S_4$ liegen. Zieht man nun durch D und C Parallelen zu AC bezw. BD, und schneiden sich diese in F, so muss die Verbindungsgerade EF durch S gehen, und es muss $ES = \frac{1}{3} EF$ sein, da $ES_1 = \frac{1}{3} ED$, $ES_4 = \frac{1}{3} EC$, $S_1 S \parallel DF$, $S_4 S \parallel CF$. Denkt man sich aber AF und BF gezogen, so würde der Schwerpunkt eines Dreiecks ABF im unteren Drittelspunkte von EF liegen, d. h. mit S zusammenfallen. Hiernach ist der Schwerpunkt des Vierecks $ABCD$ gleichbedeutend mit demjenigen des Dreiecks ABF. Um ihn zu finden, ist es in diesem Falle wohl am einfachsten, die Seite AB in drei gleiche Theile zu theilen (Fig. 144), $DF \parallel AC$, $CF \parallel BD$, $GS \parallel AF$, $HS \parallel BF$ zu ziehen.

Fig. 143.

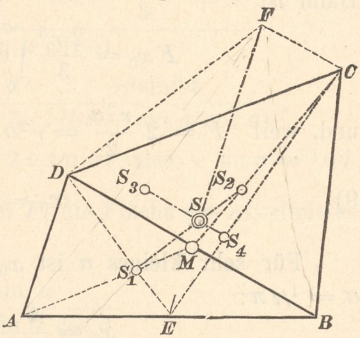
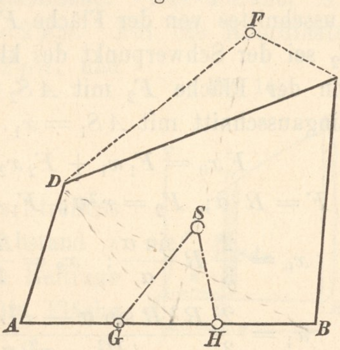


Fig. 144.

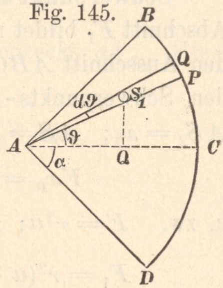


Die Theilschwerpunkte S_1 bis S_4 in Fig. 143 haben also nur zur Herleitung des Verfahrens gedient, sind aber für die Ausführung unnöthig.

Dies Verfahren rührt von Prof. Rob. Land (Zeitschrift des Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 1895, S. 451) her und kann auch für Trapeze angewendet werden, da es ebenso einfach ist, wie die in Fig. 141 und 142 (S. 130) angegebenen Verfahren.

Schwerpunkt des Kreisausschnittes. Schliesst der beliebige Halbmesser AP (Fig. 145) mit der Mittellinie AC den Winkel ϑ ein und ist PQA ein unendlich kleiner Ausschnitt vom Centriwinkel $d\vartheta$, so ist dessen Fläche $dF = \frac{1}{2} r \cdot r\, d\vartheta$; der Theilschwerpunkt S_1 liegt um $\frac{2}{3} r$ von A entfernt und hat die Abscisse $AQ = \frac{2}{3} r \cos \vartheta$. In

Fig. 145.



Gleichung 6, S. 128 bedeutet dF freilich ein nach zwei Richtungen unendlich kleines Flächentheilchen, doch kann man als Beitrag des Sektors PQA zu dem statischen Momente schreiben $PQA \cdot AQ$. Dann ist

$$F x_0 = \frac{2\, r^3}{3} \int_0^a \cos\vartheta\, d\vartheta = \frac{2}{3}\, r^3 \sin a$$

und, weil $F = 2\,\frac{r^2 a}{2} = r^2 a$,

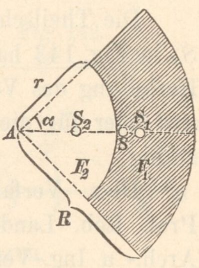
$$9) \qquad x_0 = \frac{2}{3}\, r\, \frac{\sin a}{a}.$$

Für sehr kleines a ist $x_0 = {}^2/_3\, r$, für die Halbkreisfläche mit $a = {}^1/_2\, \pi$:

$$x_0 = \frac{4}{3}\,\frac{r}{\pi} \quad (\text{rund } {}^2/_5\, r).$$

Schwerpunkt des Ringausschnittes. Der Ringausschnitt ist als Unterschied zweier Kreisausschnitte der Halbmesser R und r anzusehen. Ist S der Schwerpunkt des grossen Ausschnittes von der Fläche F, so ist $AS = x_0$; S_2 sei der Schwerpunkt des kleinen Ausschnittes von der Fläche F_2 mit $AS_2 = x_2$; F_1 sei der Ringausschnitt mit $AS_1 = x_1$. Dann wird

Fig. 146.



$$F x_0 = F_1 x_1 + F_2 x_2, \quad \text{u. zw.}$$

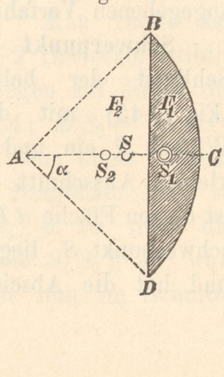
$$F = R^2 a;\; F_2 = r^2 a;\; F_1 = (R^2 - r^2)\, a;$$

$$x_0 = \frac{2}{3}\, R\, \frac{\sin a}{a};\quad x_2 = \frac{2}{3}\, r\, \frac{\sin a}{a} \quad \text{und}$$

$$x_1 = \frac{2}{3}\, \frac{R^2 R \sin a - r^2 r \sin a}{(R^2 - r^2)\, a} = \frac{2}{3}\, \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}\, \frac{\sin a}{a}.$$

Schwerpunkt der Kreisabschnittfläche. Der Abschnitt F_1 bildet mit dem Dreieck $ABD = F_2$ den Ausschnitt $ABCD = F$. Die entsprechenden Schwerpunkts-Abscissen seien $AS_1 = x_1$, $AS_2 = x_2$; $AS = x_0$. Dann ist

Fig. 147.



$$F x_0 = F_1 x_1 + F_2 x_2,$$

u. zw. $\quad F = r^2 a;\; F_2 = r^2 \sin a \cos a;$

$$F_1 = r^2 (a - \sin a \cos a);$$

$$x_0 = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}; \quad x_2 = \frac{2}{3} r \cos \alpha \quad \text{und}$$

$$x_1 = \frac{r^2 \alpha \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha} - r^2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{2}{3} r \cos \alpha}{r^2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{r^3 \sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{r^2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} = \frac{2}{3} \frac{r^3 \sin^3 \alpha}{r^2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}.$$

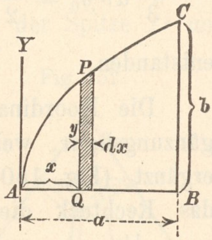
Es ist aber die Sehne $BD = l = 2r \sin \alpha$, also $r \sin \alpha = \frac{1}{2} l$, mithin $x_1 = \frac{2}{3} \frac{l^3}{8 F_1} = \frac{l^3}{12 F_1}$, wenn F_1 die Fläche des Abschnittes. Man kann auch schreiben

$$x_1 = \frac{2}{3} r \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}.$$

Für $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ wird der Abschnitt wieder zur Halbkreisfläche und $x_1 = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi}$, wie vom Ausschnitte aus abgeleitet.

Schwerpunkt der halben Parabelfläche. Die Parabel AC (Fig. 148) habe die Gleichung $y^2 = 2px$. Für die Koordinaten des Endpunktes C wird dann $b^2 = 2pa$, und durch Division entsteht

Fig. 148.



$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a}.$$

Die unendlich kleinen Theilchen des Streifens $PQ = y\,dx$ haben gemeinsamen Abstand x von der AY, können daher zu dem Beitrage $y\,dx\,x$ zusammengefasst werden. Die Fläche $ABC = F$ ist

$$\int_0^a y\,dx = \frac{b}{\sqrt{a}} \int_0^a x^{1/2} dx = \frac{b}{\sqrt{a}} a^{3/2} \frac{2}{3} = \frac{2}{3} ab,$$

d. h. $\frac{2}{3}$ von der Fläche des umschriebenen Rechtecks ab. Hiernach wird

$$\frac{2}{3} ab\, x_0 = \int_0^a y\,dx\,x = \frac{b}{\sqrt{a}} \int_0^a x^{3/2} dx$$

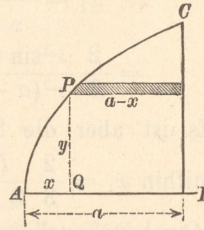
$$= \frac{2}{5} \frac{b}{\sqrt{a}} a^{5/2} = \frac{2}{5} b a^2$$

also $x_0 = \frac{3}{5} a$, unabhängig von b.

Zur Auffindung der Ordinate y_0 des Schwerpunktes trenne man einen Streifen ab, dessen Theilchen den gleichen Abstand y von AB haben (Fig. 149). Dann wird

$$\frac{2}{3}\,ab\,y_0 = \int_0^b (a-x)\,dy\,y;$$

Fig. 149.



dies wird wegen $x : a = y^2 : b^2$:

$$\frac{2}{3}\,ab\,y_0 = \frac{a}{b^2}\int_0^b (b^2-y^2)\,y\,dy$$

$$= \frac{a}{b^2}\left\{b^2\int_0^b y\,dy - \int_0^b y^3\,dy\right\}$$

$$= \frac{a}{b^2}\left\{\frac{b^4}{2}-\frac{b^4}{4}\right\} = \frac{ab^2}{4},\quad \text{mithin } y_0 = \frac{3}{8}\,b.$$

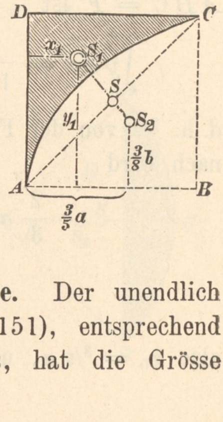
Man hätte auch als Beitrag des Streifens $y\,dx$ (Fig. 148) zum statischen Momente in Bezug auf AB die Fläche des Streifens mit der Schwerpunktshöhe $^1/_2\,y$ multiplicirt einführen können, dann wäre

$$\frac{2}{3}\,ab\,y_0 = \frac{1}{2}\int_0^a y^2\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{b^2}{a}\int_0^a x\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{b^2}{a}\,\frac{a^2}{2} = \frac{ab^2}{4}$$

entstanden.

Die Koordinaten x_1 und y_1 des Schwerpunktes S_1 der Ergänzungsfigur, welche die Parabelfläche zum Rechteck $ABCD$ ergänzt (Fig. 150), findet man leicht, weil das Rechteck die Schwerpunkts-Koordinaten $x_0 = {}^1/_2\,a$; $y_0 = {}^1/_2\,b$ hat:

Fig. 150.



$$x_1 \cdot {}^1/_3\,ab + {}^3/_5\,a \cdot {}^2/_3\,ab = {}^1/_2\,a \cdot ab$$

$$x_1 = {}^3/_{10}\,a.$$

$$y_1 \cdot {}^1/_3\,ab + {}^3/_8\,b \cdot {}^2/_3\,ab = {}^1/_2\,b \cdot ab$$

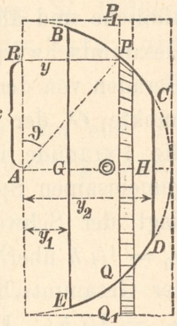
$$y_1 = {}^3/_4\,b.$$

S_1, S und S_2 liegen auf einer Geraden, und es ist $SS_1 = 2 \cdot SS_2$.

Schwerpunkt einer Kugelzonen-Oberfläche. Der unendlich kleine Theil der Oberfläche bei PQ (Fig. 151), entsprechend einem Bogentheilchen ds des äusseren Kreises, hat die Grösse

$dF = ds \cdot 2\pi x$. Nun bildet ds mit dy denselben Winkel ϑ wie $AP = r$ mit $AR = x$. Daraus folgt $ds = dy : \cos\vartheta = dy \cdot r : x$ und $dF = 2r\pi\, dy$, gleich einer Cylinderfläche vom Halbmesser r und der Höhe dy. Diese Cylinderfläche bei $P_1 Q_1$ hat dann dasselbe statische Moment wie die Kugelzonenfläche. Daher muss auch die ganze Zonenfläche $BCDE$ gleiche Fläche, gleiches Moment und gleiche Schwerpunktslage haben mit dem entsprechenden Theile der die Kugel umschliessenden Cylinderfläche. Da der Schwerpunkt der Cylinderfläche in der Mitte der Mittellinie liegt, so liegt auch derjenige der Kugelzone in der Mitte von GH. Die Rechnung führt zu gleichem Ergebnisse:

Fig. 151.

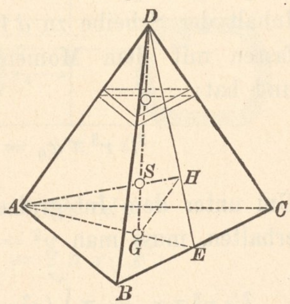


$$2r\pi(y_2 - y_1)y_0 = 2r\pi\int_{y_1}^{y_2} y\,dy = r\pi(y_2^2 - y_1^2);\quad y_0 = \frac{y_2 + y_1}{2}.$$

Gleiches gilt von der Oberfläche der Kugelhaube.

Schwerpunkt des Körpers der dreiseitigen Pyramide. Durch Schnitte, parallel mit der Grundfläche ABC (Fig. 152) lässt sich die Pyramide in dreieckige Scheiben zerlegen, deren Schwerpunkte durchweg auf der Verbindungsgeraden zwischen der Spitze D und dem Schwerpunkte G der Grundfläche liegen. Die Linie DG enthält daher den Gesammtschwerpunkt S. Der Punkt G wird erhalten, indem man BC in E halbirt, AE zieht und $EG = 1/3\, EA$ macht. Betrachtet man in gleicher Weise BCD als Grundfläche, zieht DE mit $EH = 1/3\, DE$, so muss der Schwerpunkt auch auf AH liegen. DG und AH schneiden sich in S. Weil $EG = 1/3\, EA$, $EH = 1/3\, ED$, ist $GH \parallel AD$ und $= 1/3\, AD$. Daher ist $SGH \sim SDA$, $SG = 1/3\, SD = 1/4\, GD$. Theilt man also die Gerade von der Spitze nach dem Schwerpunkte der Grundfläche in 4 gleiche Theile, so ist der der Grundfläche zunächst liegende Theilpunkt der Schwerpunkt S. In demselben Verhältnisse 1 : 4 wie $SG : GD$ stehen auch die Höhenlothe y_0

Fig. 152.

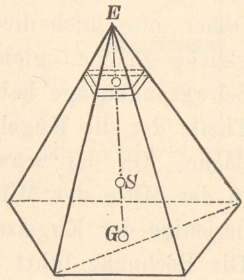


und h, von der Spitze D und dem Schwerpunkte S auf die Grundfläche gefällt;

$$y_0 = {}^1\!/_4\, h.$$

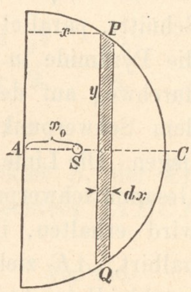
Eine vierseitige Pyramide (Fig. 153) lässt sich in lauter ähnliche und ähnlich liegende Scheiben zerlegen. Daher muss der Gesammtschwerpunkt S wieder liegen auf der Geraden von der Spitze E nach dem Schwerpunkte G der Grundfläche. Zerlegt man die Pyramide in zwei dreiseitige mit der gemeinsamen Spitze E und der Höhe h, so liegt der Schwerpunkt jeder in der Höhe $y_0 = {}^1\!/_4\, h$ über der Grundfläche, daher auch der Gesammtschwerpunkt S in dieser Höhe $y_0 = {}^1\!/_4\, h$. Es ist also $GS = {}^1\!/_4\, GE$. Offenbar gilt dies auch für die Körper vielseitiger Pyramiden und Kegel: der Schwerpunkt liegt im unteren Viertelpunkte der Geraden vom Schwerpunkte der Grundfläche nach der Spitze.

Fig. 153.



Schwerpunkt des Halbkugelkörpers. Schneidet man eine cylindrische Scheibe PQ (Fig. 154) vom Halbmesser y im Abstande x vom Mittelpunkte A heraus, so haben deren Theilchen durchweg den gleichen Abstand x von der durch A gelegten yz-Ebene. Man kann daher den Inhalt der Scheibe zu $dV = y^2 \pi dx$ zusammenfassen mit dem Momente $dVx = y^2 \pi dx\, x$, und hat:

Fig. 154.



$${}^2\!/_3\, r^3 \pi x_0 = \pi \int_0^r y^2 x\, dx.$$

Um unter dem Integralzeichen eine Differential-Funktion von x zu erhalten, muss man $y^2 = r^2 - x^2$ setzen. Dann wird

$${}^2\!/_3\, r^3 \pi x_0 = \pi \int_0^r (r^2 - x^2)\, x\, dx = r^2 \pi \int_0^r x\, dx - \pi \int_0^r x^3\, dx$$

$$= {}^1\!/_2\, r^4 \pi - {}^1\!/_4\, r^4 \pi = {}^1\!/_4\, r^4 \pi,$$

also

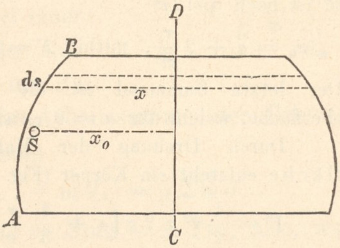
$$x_0 = {}^3\!/_8\, r.$$

Satz von Pappus und Guldin. Die Lehre vom Schwerpunkte war schon Archimedes (287—212 v. Chr.) bekannt. Der alexandrinische

Gelehrte Pappus benutzte gegen Ende des dritten oder vierten Jahrhunderts n. Chr. die Schwerpunkte ebener Kurven und Flächen zur Berechnung von Umdrehungsflächen und -Körpern. Der betreffende Satz wurde vom Jesuitenpater Guldin aus St. Gallen 1635 n. Chr. weiter verwerthet und heisst danach der Satz von Pappus und Guldin.

1) Dreht sich eine ebene Kurve AB (Fig. 155) um eine in ihrer Ebene liegende Achse CD, so entsteht eine Umdrehungsfläche. Ein Bogentheilchen ds mit dem Drehungshalbmesser x erzeugt eine Fläche $dF = ds\, 2\pi x$. Der Inhalt der ganzen erzeugten Umdrehungsfläche ist daher

Fig. 155.



$$F = 2\pi \int ds\, x.$$

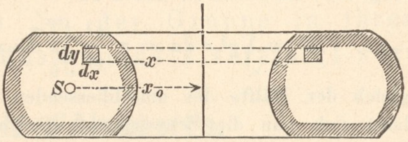
Weil nun nach der Lehre vom Schwerpunkt $\int ds\, x = s x_0$, so wird

$$F = 2\pi x_0 s.$$

Darin bedeutet x_0 den Drehungshalbmesser des Schwerpunktes S der erzeugenden Kurve von der Länge $AB = s$.

2) Dreht sich aber eine ebene Fläche um eine in ihrer Ebene liegende Achse (Fig. 156), so erzeugt ein Flächentheilchen $dF = dx\, dy$ mit dem Halbmesser x einen Kreisring vom Inhalte

Fig. 156.



$$dV = \left\{ (x + dx)^2 - x^2 \right\} \pi\, dy = d(x^2)\, \pi\, dy$$

$$= 2\, x\, dx\, \pi\, dy = 2\, \pi\, x\, dx \cdot dy = 2\, \pi\, x\, dF.$$

Der ganze Umdrehungskörper wird sonach

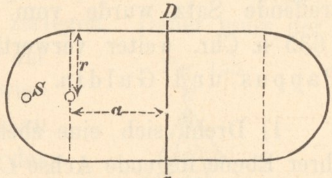
$$V = 2\pi \int dF\, x, \text{ oder, weil } \int dF\, x = F x_0,$$

$$V = F\, 2\pi x_0, \text{ daher der Pappus-Guldin'sche Satz:}$$

Der Inhalt einer Fläche, welche durch Drehung einer ebenen Kurve um eine in ihrer Ebene liegende

Achse entsteht, ist gleich der Länge der Kurve mal dem Drehungswege $2\pi x_0$ ihres Schwerpunktes. — Der Inhalt eines Körpers, welcher durch Drehung einer ebenen Fläche um eine in ihrer Ebene liegende Achse entsteht, ist gleich der Fläche mal dem Drehungswege ihres Schwerpunktes.

Fig. 157.

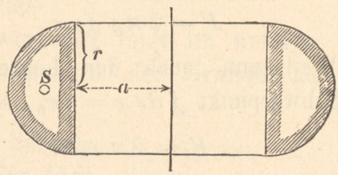


Beispiel: Dreht sich nach Fig. 157 ein Halbkreisbogen um die Achse CD, so ist nach S. 127

$$x_0 = a + 2\frac{r}{\pi}, \text{ mithin } F = r\pi\left(a + 2\frac{r}{\pi}\right)2\pi = 2ra\pi^2 + 4r^2\pi.$$

Der letzte Summand ist die Kugeloberfläche, welche für $a = 0$ entsteht.

Fig. 158.

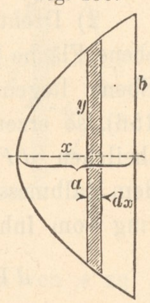


Durch Drehung der Halbkreisfläche entsteht ein Körper (Fig. 158)

$$V = \frac{1}{2}r^2\pi\,2\pi\left(a + \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)$$
$$= r^2\pi^2 a + \frac{4}{3}r^3\pi.$$

Der letzte Summand bezeichnet den Inhalt des Kugelkörpers, welcher für $a = 0$ entsteht.

Fig. 159.



Beispiel: Der Inhalt eines Umdrehungs-Paraboloids (Fig. 159) ist leicht zu finden zu

$$V = \int y^2\pi\,dx = \pi\frac{b^2}{a}\int_0^a x\,dx = \frac{\pi b^2 a}{2},$$

gleich der Hälfte des umschliessenden Cylinders. Daraus lässt sich nun die Schwerpunkts-Ordinate y_0 der halben Parabelfläche berechnen:

$$\tfrac{1}{2}b^2 a\pi = \tfrac{2}{3}ab\,2\pi y_0,$$

mithin $y_0 = \tfrac{3}{8}b$, wie auf S. 134 gefunden.

II. Arbeit der Schwerkräfte an einer beliebigen Massengruppe.

Der Schwerpunkt wurde im Vorhergehenden als der Mittelpunkt der Schwerkräfte eines starren Körpers, oder sonstiger, über die Masse eines starren Körpers gleichmässig vertheilter Massenkräfte gleichen Sinnes bezeichnet. Aber auch für Körper veränderlicher Form, ja selbst für beliebige Gruppen von Massen (mit oder ohne