9. Zusammensetzung von Parallelkräften gleichen Sinnes im Raume.

Ist (Fig. 130) $\alpha_1 = \alpha_2 \ldots = \alpha_n = \alpha,$

$$\beta_1 = \beta_2 \ldots = \beta_n = \beta,$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 \ldots = \gamma_n = \gamma,$$

so wird nach S. 112

$$X = \cos\alpha\, \Sigma K; \quad Y = \cos\beta\, \Sigma K; \quad Z = \cos\gamma\, \Sigma K,$$

$$\text{mithin } R = \Sigma K$$

für die bei der Zurückführung auf den Punkt A sich ergebende Einzelkraft. Ausserdem entstehen nach S. 114 die Achsenmomente:

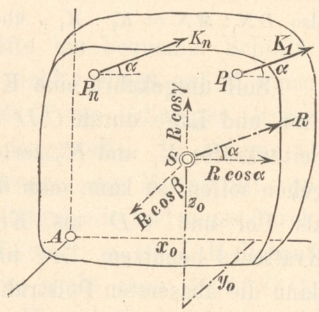
$$\mathfrak{M}_x = \cos\gamma\, \Sigma Ky - \cos\beta\, \Sigma Kz,$$

$$\mathfrak{M}_y = \cos\alpha\, \Sigma Kz - \cos\gamma\, \Sigma Kx,$$

$$\mathfrak{M}_z = \cos\beta\, \Sigma Kx - \cos\alpha\, \Sigma Ky.$$

Die Parallelkräfte müssen sich aber auch auf eine Kraft $R = \Sigma K$ ohne Achsenmoment zurückführen lassen; denn wenn man die Parallelkräfte der Reihe nach vereinigt, gelangt man stets zu einer Einzelkraft; es kommt nur noch darauf an, deren Lage aufzufinden. Ein Punkt S derselben werde durch die unbekannten Koordinaten x_0, y_0, z_0 bezeichnet. Diese durch den Punkt S gehende Einzelkraft R muss nun gleichwerthig sein mit dem Ergebnisse der ersten Zusammensetzung mit Hülfe des Punktes A, oder, weil die Achsenmomente nach S. 114 gleichbedeutend sind mit den statischen Momenten der Kräfte in Bezug auf die Koordinatenachsen, so muss die in S angreifende Kraft R, welche in die Seitenkräfte $R\cos\alpha$, $R\cos\beta$, $R\cos\gamma$ zerlegt werden kann, die statischen Momente $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ haben. In Bezug auf AX hat $R\cos\gamma$ das Moment $R\cos\gamma\, y_0$, $R\cos\beta$ das Moment $-R\cos\beta\, z_0$, $R\cos\alpha$ das Moment Null. Daher muss sein:

Fig. 130.



$$R\cos\gamma\, y_0 - R\cos\beta\, z_0 = \cos\gamma\, \Sigma Ky - \cos\beta\, \Sigma Kz;$$

$$R\cos\alpha\, z_0 - R\cos\gamma\, x_0 = \cos\alpha\, \Sigma Kz - \cos\gamma\, \Sigma Kx;$$

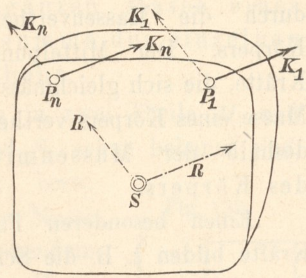
$$R\cos\beta\, x_0 - R\cos\alpha\, y_0 = \cos\beta\, \Sigma Kx - \cos\alpha\, \Sigma Ky.$$

Diesen Gleichungen wird genügt durch $Rx_0 = \Sigma Kx$; $Ry_0 = \Sigma Ky$; $Rz_0 = \Sigma Kz$; denn durch Einsetzung dieser Werthe werden beide Seiten der drei Gleichungen einander gleich. Die Koordinaten des Punktes S werden hiernach

$$1) \qquad x_0 = \frac{\Sigma Kx}{\Sigma K}; \; y_0 = \frac{\Sigma Ky}{\Sigma K}; \; z_0 = \frac{\Sigma Kz}{\Sigma K}.$$

Da diese Werthe ganz unabhängig von den Richtungswinkeln α, β, γ der gegebenen Kräfte, nur abhängig sind von den Kraftgrössen K und von den auf ihren Richtungslinien gewählten Angriffspunkten (der Koordinaten x, y, z), so bleibt S unverändert, wenn die Parallelkräfte K sich um die Angriffspunkte P drehen. Während einer solchen Drehung der gegebenen Parallelkräfte (Fig. 131) dreht sich also die Mittelkraft $R = \Sigma K$ um den Punkt S, welcher aus diesem Grunde der Mittelpunkt der in den Punkten P angreifenden Parallelkräfte heisst.

Fig. 131.



10. Mittelpunkt der Massen (Schwerpunkt) eines starren Körpers.

Es möge die Gruppe der Parallelkräfte gleichen Sinnes derartig über die Masse des Körpers vertheilt sein, dass an jedem Massentheilchen eine der Masse verhältnisgleiche Kraft angreife. Dann können die an den Massentheilchen $m_1, m_2 \ldots m_n$ auftretenden Kräfte geschrieben werden: $m_1 p$; $m_2 p \ldots m_n p$. Es würde dann p die gemeinsame Beschleunigung sein, welche die Massentheilchen durch die Kräfte erfahren würden.

Die Absisse des Mittelpunktes S dieser Parallelkräfte ist dann $x_0 = \frac{\Sigma m p x}{\Sigma m p}$; die Bedeutung der Σ-Zeichen erhellt aus der Form:

$$x_0 = \frac{m_1 p x_1 + m_2 p x_2 + \ldots m_n p x_n}{m_1 p + m_2 p + \ldots x m_n p};$$