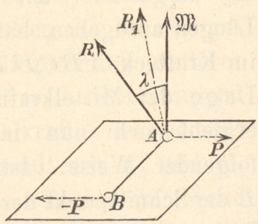
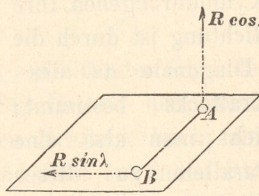
Steht die ursprünglich gefundene Momentenachse $\mathfrak{M}$ rechtwinklig zu $R$, ist also $\lambda = 90^0$, so wird $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \cos \lambda = 0$ und $r = \mathfrak{M} : R$; d. h. in diesem Falle verschwindet das Achsenmoment $\mathfrak{M}_1$, und die gegebene Kräftegruppe hat sich auf eine Einzelkraft $R$ zurückführen lassen.

Fig. 124.




Eine beliebige Kräftegruppe lässt sich auch stets auf zwei nicht in derselben Ebene liegende Kräfte zurückführen. Ist nämlich das Ergebnis der ersten Zusammenfassung etwa $R$ und $\mathfrak{M}$ im Punkte $A$ (Fig. 124), so kann man $\mathfrak{M}$ in die Faktoren $P \cdot r$ zerlegen, wobei man die eine Kraft $P$ durch $A$ legt, $AB = r$ macht und $-P$ durch $B$ gehen lässt. $P$ und $R$ kann man nun zu $R_1$ zusammensetzen, so dass $R_1$ und $-P$ der gegebenen Kräftegruppe gleichwerthig sind. Dabei war die Grösse $P$ beliebig gewählt. Macht man aber $P = R \sin \lambda$, so fällt die Kraft $R_1$ in die Richtung von $\mathfrak{M}$ und bekommt die Grösse $R \cos \lambda$ (Fig. 125), während die durch $B$ gelegte Kraft $P = R \sin \lambda$ ist. Hiernach ist die Zurückführung einer Kräftegruppe auf zwei im Raume sich rechtwinklig kreuzende Kräfte möglich.

Fig. 125.

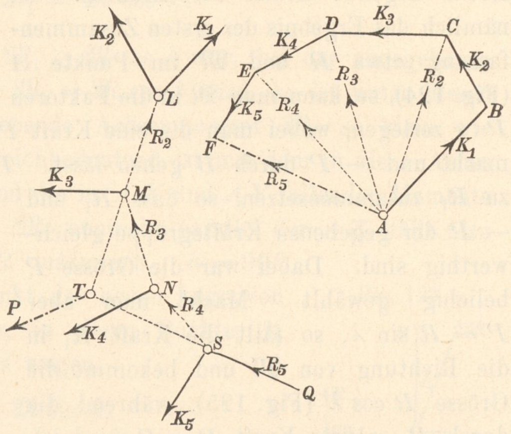



## 8. Zeichnerische Zusammensetzung von Kräften in einer Ebene.

Haben die Kräfte einen gemeinsamen Schnittpunkt, so findet man ihre Mittelkraft nach Grösse, Richtung und Sinn mittels des Kraftecks nach S. 41. Sind die Kräfte aber in einer Ebene zerstreut, so kann man jede an einen beliebigen, gemeinsamen Punkt $A$ der Ebene verschieben, wenn man nur gleichzeitig ein Kräftepaar in der Ebene hinzufügt. Man erhält dann durch Zusammensetzung eine Mittelkraft $R$ und ein Moment $\mathfrak{M}$. Beide lassen sich ersetzen durch eine einzige Kraft $R$, welche aber gegen den Punkt $A$ um die Länge $l = \mathfrak{M} : R$ parallel verschoben ist. Es wird also Grösse, Richtung und Sinn von $R$ gerade so gefunden, wie bei Kräften mit gemeinsamem Schnittpunkte, d h. mittels des Kraftecks, nur die Lage der Mittelkraft in der Ebene ist noch besonders zu ermitteln. Dies erfolgt in der Figur der gegebenen Richtungslinien der Kräfte.

In Fig. 126 sind links die Richtungslinien der Kräfte $K_1$ bis $K_5$ dargestellt; auf diesen die Kraftgrössen durch bestimmte Längen anzugeben, hat keinen Zweck, weil die Grössen der Kräfte im Krafteck $ABCDEF$ (der rechtsseitigen Figur) erscheinen. Die Lage der Mittelkraft ergiebt sich nun in folgender Weise: Ist $L$ der Schnittpunkt der Richtungslinien von $K_1$ und $K_2$, so muss durch diesen auch die Mittelkraft $R_2$ von $K_1$ und $K_2$ hindurchgehen. Ihre Richtung ist durch die Diagonale $AC$ des Kraftecks bestimmt; zieht man also eine Parallele zu dieser durch $L$, so hat man damit die Lage von $R_2$. Der Punkt $M$, in welchem $R_2$ die Richtungslinie von $K_3$ schneidet, muss nun auch ein Punkt der Mittelkraft $R_3$ von $R_2$ und $K_3$ (also auch von $K_1$, $K_2$ und $K_3$) sein; zieht man daher $MN \parallel AD$, so ist $MN$ die wahre Richtungslinie von $R_3$. In derselben Weise legt man durch $N$ eine Parallele zu $AE$ bis zum Schnittpunkte $S$ mit der Kraft $K_5$ und durch $S$ endlich $SQ \parallel AF$, so ist $SQ$ die Richtungslinie der Mittelkraft $R_5$ der gegebenen 5 Kräfte.

Fig. 126.




Der Linienzug $LMNSQ$ heisst das Seileck (Seilpolygon) der gegebenen Kräfte, weil er, wie weiter unten gezeigt werden wird, die Gleichgewichtsform eines bei $Q$ befestigten, biegsamen Seiles darstellt, an welchem die Kräfte $K_1$ bis $K_5$ in den Knotenpunkten $L$, $M$, $N$ und $S$ angreifen.

Es ist besonders zu beachten, dass in der Seileckfigur keine Kraftgrössen dargestellt sind, sondern nur Richtungslinien von Kräften. Die Grösse der Kräfte findet man im Krafteck.

Wie man im Krafteck nicht nur die Mittelkraft aller gegebenen Kräfte, sondern mit Hülfe der Diagonalen auch die Mittelkraft von jeder anderen Theilgruppe auf einander folgender Kräfte nach Grösse, Richtung und Sinn findet, so bestimmt das Seileck auch deren Lagen mittels der Schnittpunkte der Seileckseiten.

Ist $LMNSQ$ (Fig. 126) ein zu den Kräften $K_1$ bis $K_5$ gezeichnetes Seileck (welches man sich durch Hinzufügung weiterer Kräfte noch beliebig fortgesetzt denken kann), so bedeutet irgend eine der Seiten die Richtungslinie der Mittelkraft aller vorausgehenden Kräfte. So ist z. B. $R_2$ (in $LM$ liegend) mit $K_1$ und $K_2$ gleichwerthig, was wir schreiben $R_2 \equiv K_1, K_2$. Ebenso ist irgend eine andere Mittelkraft, z. B. $R_5$ (in $SQ$ liegend) mit $K_1$ bis $K_5$ gleichwerthig, d. h.

$$R_5 \equiv K_1, K_2, K_3, K_4, K_5.$$

Ersetzt man auf der rechten Seite $K_1$ und $K_2$ durch $R_2$, so entsteht

$$R_5 \equiv R_2, K_3, K_4, K_5.$$

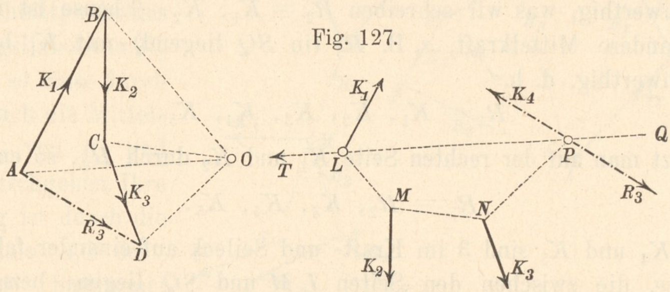
$K_3$, $K_4$ und $K_5$ sind 3 im Kraft- und Seileck auf einander folgende Kräfte, die zwischen den Seiten $LM$ und $SQ$ liegen; bezeichnet man deren Mittelkraft (die im entsprechenden Krafteck leicht als die Diagonale $CF$ nach Grösse, Richtung und Sinn zu finden ist) mit $P$, und ersetzt $K_3$, $K_4$ und $K_5$ durch diese, so wird $R_5 \equiv R_2, P$. Wenn aber eine Kraft die Mittelkraft zweier anderen $R_2$ und $P$ ist, so müssen alle 3 einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, und weil der Schnittpunkt $T$ von $R_2$ und $R_5$, d. h. der Schnittpunkt der Seiten $LM$ und $SQ$ gegeben ist, so muss auch die Mittelkraft $P$ durch diesen Punkt $T$ gehen; oder: Die Mittelkraft mehrerer im Seileck auf einander folgenden Kräfte geht durch den Schnittpunkt der diese Kräfte einschliessenden Seilseiten.

Die erste Kraft $K_1$ im Seileck kann man sich auch schon als Mittelkraft etwaiger vorausgehender Kräfte denken; es kann daher die Richtungslinie der ersten Kraft auch schon als eine Seite des Seilecks im Sinne des obigen Satzes aufgefasst werden. Die Mittelkraft von $K_2$ und $K_3$ muss hiernach z. B. durch den Schnittpunkt von $K_1$ mit $MN$ gehen.

Diese Eigenschaft der Schnittpunkte der Seileckseiten ist von besonderer Wichtigkeit für die Zusammensetzung von Kräften, welche so liegen, dass ihre Schnittpunkte für die Zeichnung nicht bequem oder überhaupt nicht benutzbar sind. In solchem Falle würde das auf S. 118 beschriebene Verfahren zur Zeichnung eines Seilecks, welches in dem Schnittpunkte $L$ zweier Kräfte beginnt, nicht anwendbar sein. Diese Schwierigkeit kann man nun aber umgehen, indem man der gegebenen Kräftegruppe $K_1$ bis $K_5$ irgend eine beliebig gewählte Kraft $T$, welche $K_1$ in einem passenden Punkte $L$ schneidet, vorausgehen lässt.

Sind also $K_1$, $K_2$, $K_3$ gegeben (Fig. 127), welche das Krafteck $ABCD$ mit $AD$ als Mittelkraft $R_3$ liefern, so wählt man, weil

Fig. 127.



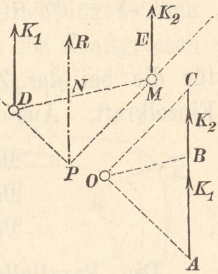

in der rechtsseitigen Lagenfigur der Kräfte ein bequemer Schnittpunkt irgend zweier der gegebenen Kräfte nicht vorliegt, auf $K_1$ einen Punkt $L$ und legt durch diesen eine Kraft $T$ von beliebiger Grösse und Richtung, im Krafteck durch $OA$ dargestellt. Es ist nun $O$ der Anfangspunkt des gesammten Kräftezuges; die Mittelkraft von $T$ und $K_1$ wird durch die Strecke $OB$ dargestellt und muss durch $L$ hindurch gehen. Zieht man also $LM \parallel OB$, so ist $LM$ die auf $T$ und $K_1$ folgende Seileckseite. Ebenso zieht man $MN \parallel OC$, $NP \parallel OD$. Die Mittelkraft $R_3$ von $K_1$, $K_2$ und $K_3$ muss nun nach S 119 durch den Schnittpunkt der diese Kräfte einschliessenden Seiten des Seilecks gehen, wobei die erste Kraft $T$ als die der Kräftegruppe vorausgehende Seite zu betrachten ist, während $NP$ auf die Gruppe folgt. Die Richtung von $T$ schneidet $NP$ in $P$, so dass $R_3$ durch $P$ gelegt werden muss, u. zw. parallel mit $AD$. Der Punkt $O$ heisst der Pol des Kraftecks, die von ihm ausgehenden Geraden nach den Endpunkten der gegebenen Kräfte heissen Polstrahlen.

$K_4 = -R_3$ bedeutet diejenige Kraft, welche $K_1$, $K_2$ und $K_3$ aufheben würde.

Das vorstehend beschriebene Verfahren lässt sich selbstverständlich auch auf Parallelkräfte anwenden. Der Kräftezug der gegebenen Kräfte im Krafteck wird dann zu einer Geraden.

Soll die Mittelkraft von nur 2 aufwärts gerichteten Parallelkräften $K_1$ und $K_2$ gesucht werden (Fig. 128), von denen $K_1$ durch einen Punkt $D$ geht, während $K_2$ rechts davon bei $E$ liegt, so zeichne man aus $AB = K_1$ und $BC = K_2$ das Krafteck. Wählt man dann den beliebigen Pol $O$ (etwa der Mitte von $AC$ gegenüber), so bedeutet $OA$ die hinzugefügte Kraft $T$, deren Lage man durch den Punkt $D$ führen kann. $DP$ ist dann die Richtungslinie der ersten Seileckseite, $DM \parallel OB$ die zweite, $MP \parallel OC$ die dritte. Durch den Schnittpunkt $P$ der ersten und dritten Seite geht die Mittelkraft $R$.

Fig. 128.




Schneidet $R$ die Seite $DM$ im Punkt $N$, so ist $DNP \backsim OAB$, mithin $DN : NP = OB : AB = OB : K_1$; ebenso wird $MN : NP = OB : K_2$, also $DN : MN = K_2 : K_1$, übereinstimmend mit S. 103.

Soll umgekehrt eine Kraft $R$, welche nach Grösse, Richtung, Sinn und Lage durch $CD$ (Fig. 129) gegeben ist, in zwei parallele Seitenkräfte $K_1$ und $K_2$ zerlegt werden, deren Lagen durch $A$ und $B$ gehen sollen, so kann man den Punkt $A$ als Pol und $CD$ als Kräftezug des Kraftecks benutzen. $AC$ und $AD$ sind dann die äussersten Polstrahlen, während der mittlere noch unbekannt ist. $AC$ ist zugleich die erste Seite des Seilecks, $CB \parallel AD$ die letzte. Dadurch ist als mittlere Seite des Seilecks $AB$ gefunden, und weil $A$ der Pol, so ist $AB$ zugleich der verlängerte mittlere Polstrahl, der $CD$ in dem Punkte $T$ schneidet. $T$ theilt sodann die Kraft $R = CD$ in $CT = K_1$, welche bei $A$ liegt, und in $TD = K_2$, welche durch $B$ geht.

Fig. 129.