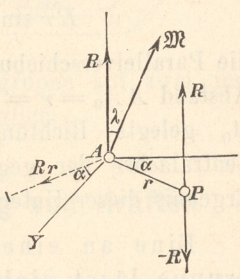
7. Centralachse einer Kräftegruppe.

Die Zusammensetzung einer beliebigen räumlichen Kräftegruppe hat auf R und $\mathfrak{M}$ geführt. R ist einfach die Mittelkraft, die sich bei Parallelverschiebung aller Kräfte an den Punkt A ergab, mithin unabhängig von der Wahl des beliebig angenommenen Punktes A. $\mathfrak{M}$ dagegen ist von den Koordinaten der Angriffspunkte der Kräfte in Bezug auf ein durch A gelegtes Achsenkreuz abhängig, wird daher mit einer Verschiebung des Sammelpunktes A sich ändern. Hat man für einen angenommenen Sammelpunkt A die Mittelkraft R gefunden, so wird eine Verschiebung von A auf der Richtungslinie von R keine Änderung von $\mathfrak{M}$ zur Folge haben, weil man ja jeden Punkt dieser Richtungslinie als Angriffspunkt von R behandeln kann. Verschiebt man aber A nach einer ausserhalb R gelegenen Stelle, entsprechend einer Parallelverschiebung von R selbst, so muss das zugehörige Achsenmoment $\mathfrak{M}$ eine Änderung erfahren.

Um diese Veränderung möglichst einfach zu übersehen, wählen wir die Richtungslinie der im Punkte A erhaltenen Kraft R zur z-Achse (Fig. 122) und legen durch R und die zugehörige von A aus gezogene Momentenachse $\mathfrak{M}$ eine xz-Ebene. $\mathfrak{M}$ bilde mit R den Winkel λ. Will man nun die durch A gehende Kraft R mit einer gleichen Kraft R vertauschen, welche die xy-Ebene in einem Punkte P mit dem Abstande $AP = r$ schneidet, so bringe man in P zunächst zwei sich aufhebende Kräfte R und $-R$ an. Dann bilden R in A und $-R$ in P ein Kräftepaar, dessen Achse Rr in der xy-Ebene liegt und von AY um den Winkel α nach links abweicht, wenn AP mit AX den Winkel α bildet. Dieses Achsenmoment Rr muss nun mit $\mathfrak{M}$ zusammengesetzt werden. Zu dem Zwecke zerlegen wir $\mathfrak{M}$ und Rr nach den drei Achsen und erhalten

Fig. 122.



in der x-Achse: $\mathfrak{M} \sin \lambda - Rr \sin \alpha$,

in der y-Achse: $Rr \cos \alpha$,

in der z-Achse: $\mathfrak{M} \cos \lambda$.

Aus diesen Einzelmomenten entsteht dann das neue Gesammtmoment

$$\mathfrak{M}_1 = \sqrt{(\mathfrak{M} \sin \lambda - Rr \sin \alpha)^2 + (Rr \cos \alpha)^2 + (\mathfrak{M} \cos \lambda)^2}.$$

Hiernach ist $\mathfrak{M}_1 \geqq \mathfrak{M} \cos \lambda$. Es ist aber eine solche Verschiebung von R, d. h. eine solche Wahl des Punktes P möglich, dass $\alpha = 90^0$ und zugleich $Rr \sin \alpha = \mathfrak{M} \sin \lambda$ wird. Dann fallen in der letzten Gleichung die von r und α abhängigen Summanden fort, und es wird einfach

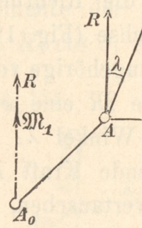
$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \cos \lambda.$$

Weil nun allgemein $\mathfrak{M}_1 \geqq \mathfrak{M} \cos \lambda$ war, bei der angegebenen Wahl von r und α aber $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \cos \lambda$ wird, so ist unter diesen Umständen das sich ergebende Achsenmoment $\mathfrak{M}_1$ so klein wie möglich; und weil $\mathfrak{M}_1$ gleichbedeutend ist mit dem in die z-Achse fallenden Momente, während die in AX und AY fallenden Momente aufgehoben werden, so ist $\mathfrak{M}_1$ nunmehr parallel der AZ, fällt also mit der Richtung von R zusammen. $\alpha = 90^0$ bedeutet, dass P, der Punkt der neuen Lage von R, auf AY liegen muss, in einem Punkte A_0 (Fig. 123), und zwar muss wegen

$$Rr \sin \alpha = \mathfrak{M} \sin \lambda,$$

die Parallelverschiebung der Kraft R, nämlich der Abstand $AA_0 = r = \mathfrak{M} \sin \lambda : R$ sein. Die durch A_0 gelegte Richtungslinie von R heisst die Centralachse der gegebenen Kräftegruppe. Das Ergebnis dieser Untersuchung fassen wir noch wie folgt zusammen:

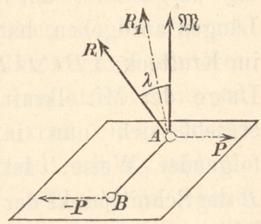
Fig. 123.



Eine an einem starren Körper wirkende Kräftegruppe lässt sich auf unendlich viele Arten zu einer Mittelkraft R und einem Kräftepaar oder Achsenmoment $\mathfrak{M}$ zusammenfassen. Bei allen diesen Arten ist R nach Grösse, Richtung und Sinn dieselbe; nur ihre **Lage** ist verschieden; das Moment $\mathfrak{M}$ ist im Allgemeinen nach Grösse, Richtung und Sinn verschieden. Unter den verschiedenen Lagen von R giebt es eine, die **Centralachse** der Kräftegruppe, bei welcher das Achsenmoment so klein wie möglich wird und mit der Richtung von R zusammenfällt.

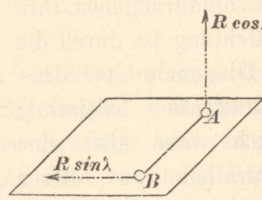
Steht die ursprünglich gefundene Momentenachse $\mathfrak{M}$ rechtwinklig zu R, ist also $\lambda = 90^0$, so wird $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \cos \lambda = 0$ und $r = \mathfrak{M} : R$; d. h. in diesem Falle verschwindet das Achsenmoment $\mathfrak{M}_1$, und die gegebene Kräftegruppe hat sich auf eine Einzelkraft R zurückführen lassen.

Fig. 124.



Eine beliebige Kräftegruppe lässt sich auch stets auf zwei nicht in derselben Ebene liegende Kräfte zurückführen. Ist nämlich das Ergebnis der ersten Zusammenfassung etwa R und $\mathfrak{M}$ im Punkte A (Fig. 124), so kann man $\mathfrak{M}$ in die Faktoren $P \cdot r$ zerlegen, wobei man die eine Kraft P durch A legt, $AB = r$ macht und $-P$ durch B gehen lässt. P und R kann man nun zu R_1 zusammensetzen. so dass R_1 und $-P$ der gegebenen Kräftegruppe gleichwerthig sind. Dabei war die Grösse P beliebig gewählt. Macht man aber $P = R \sin \lambda$, so fällt die Kraft R_1 in die Richtung von $\mathfrak{M}$ und bekommt die Grösse $R \cos \lambda$ (Fig. 125), während die durch B gelegte Kraft $P = R \sin \lambda$ ist. Hiernach ist die Zurückführung einer Kräftegruppe auf zwei im Raume sich rechtwinklig kreuzende Kräfte möglich.

Fig. 125.



8. Zeichnerische Zusammensetzung von Kräften in einer Ebene.

Haben die Kräfte einen gemeinsamen Schnittpunkt, so findet man ihre Mittelkraft nach Grösse, Richtung und Sinn mittels des Kraftecks nach S. 41. Sind die Kräfte aber in einer Ebene zerstreut, so kann man jede an einen beliebigen, gemeinsamen Punkt A der Ebene verschieben, wenn man nur gleichzeitig ein Kräftepaar in der Ebene hinzufügt. Man erhält dann durch Zusammensetzung eine Mittelkraft R und ein Moment $\mathfrak{M}$. Beide lassen sich ersetzen durch eine einzige Kraft R, welche aber gegen den Punkt A um die Länge $l = \mathfrak{M} : R$ parallel verschoben ist. Es wird also Grösse, Richtung und Sinn von R gerade so gefunden, wie bei Kräften mit