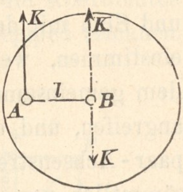
Achsenstrecken zusammensetzen, indem man letztere parallel an einen gemeinsamen Schnittpunkt verschiebt und wie Einzelkräfte behandelt.

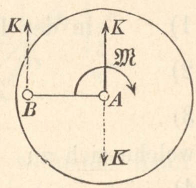
Parallelverschiebung einer Kraft. Greift in einem Punkte A eine Kraft K an (Fig. 117), so kann man zwei gleiche entgegengesetzte K in B hinzufügen; von den drei Kräften bilden nun die ursprünglich gegebene und die entgegengesetzt hinzugefügte ein Kräftepaar $\mathfrak{M} = Kl$, und ausserdem bleibt eine mit der gegebenen gleichgesinnte Kraft K übrig, welche um l gegen die ursprüngliche Lage verschoben ist. Die Parallelverschiebung einer Kraft K um die Entfernung l bedingt also die Hinzufügung eines Paares Kl.

Fig. 117.



Sind aber in einer Ebene eines starren Körpers eine Einzelkraft K in A mit dem Sinne aufwärts und ein Kräftepaar $\mathfrak{M}$ gegeben (Fig. 118), so bringe man $\mathfrak{M}$ auf die Form $\mathfrak{M} = Kl$, lege die eine Kraft K des Paares so durch A, dass sie mit der gegebenen entgegengesetzten Sinn hat, sich also damit aufhebt, und die andere in den Abstand $AB = l = \mathfrak{M} : K$; dann bleibt letztere, durch B gehende Kraft K allein übrig.

Fig. 118.



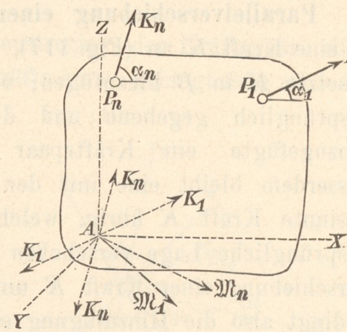
Ein Kräftepaar $\mathfrak{M}$ setzt sich also in derselben Ebene mit einer Einzelkraft K zusammen zu einer Kraft K, welche um $l = \mathfrak{M} : K$ gegen die gegebene Kraft K verschoben ist.

6. Zusammensetzung von Kräften im Raume mit verschiedenen Angriffspunkten.

Greifen an einen starren Körper beliebige Kräfte $K_1 \ldots K_n$ an (Fig. 119), von denen der Einfachheit wegen nur K_1 und K_n gezeichnet werden sollen, so wähle man zum Zwecke möglichster Vereinigung derselben einen beliebigen Punkt A und füge in diesem zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte K_1 hinzu; dann bilden die gegebene K_1 und die entgegengesetzt hinzugefügte ein Kräftepaar, dessen Drehungsebene durch K_1 in P_1 und den Punkt A gegeben ist, und dessen Hebelarm l_1 der rechtwinklige Abstand der in P_1

wirkenden Kraft K_1 vom Punkte A ist. Dieses Paar lässt sich durch seine Achse $\mathfrak{M}_1$ darstellen, welche wir durch A legen können. Ebenso verfährt man mit allen übrigen gegebenen Kräften, zuletzt mit K_n. Dann erhält man statt der gegebenen, am Körper zerstreut angreifenden n Kräfte: n Kräfte, deren Richtung, Grösse und Sinn mit den gegebenen übereinstimmen, welche aber alle in dem gemeinsamen Schnittpunkte A angreifen, und ebenso viele Kräftepaar-Achsenstrecken, die man sämmtlich von A ausgehen lassen kann. Die Einzelkräfte K lassen sich wie auf S. 40 zusammensetzen.

Fig. 119.



Sind $a_1, a_2 \ldots a_n$ die Neigungswinkel der gegebenen Kräfte gegen die positive x-Richtung, $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$ und $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$ diejenigen gegen die y-Richtung, bezw. z-Richtung, so ergiebt sich

1) in der Linie AX eine Kraft $\mathbf{X} = \Sigma \mathbf{K} \cos a$,

2) in AY „ „ $\mathbf{Y} = \Sigma \mathbf{K} \cos \beta$,

3) in AZ „ „ $\mathbf{Z} = \Sigma \mathbf{K} \cos \gamma$,

welche sich zu

4) $$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

mit den Richtungs-Kosinussen

5) $$\cos a = X : R; \; \cos \beta = Y : R; \; \cos \gamma = Z : R$$

zusammensetzen.

Sind die Richtungswinkel der Kräftepaar-Achsen bezw. $\delta_1, \varepsilon_1, \eta_1 \ldots \delta_n, \varepsilon_n, \eta_n$, so ergiebt sich

in AX eine Achse $\mathfrak{M}_x = \Sigma \mathfrak{M} \cos \delta$,

„ AY „ „ $\mathfrak{M}_y = \Sigma \mathfrak{M} \cos \varepsilon$,

„ AZ „ „ $\mathfrak{M}_z = \Sigma \mathfrak{M} \cos \eta$,

welche sich zu einer resultirenden Achse

6) $$\mathfrak{M} = \sqrt{\mathfrak{M}_x{}^2 + \mathfrak{M}_y{}^2 + \mathfrak{M}_z{}^2}$$

mit den Richtungs-Kosinussen

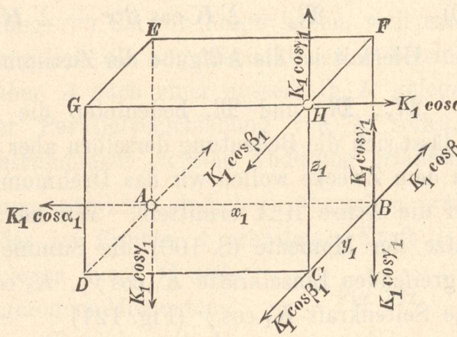
7) $$\cos \delta = \mathfrak{M}_x : \mathfrak{M}; \; \cos \varepsilon = \mathfrak{M}_y : \mathfrak{M}; \; \cos \eta = \mathfrak{M}_z : \mathfrak{M}$$

zusammensetzen. Somit haben wir die beliebigen Kräfte zurückgeführt auf eine resultirende, durch A gehende Einzelkraft R und ein Kräftepaar vom Momente $\mathfrak{M}$.

Die Kraft R ist aus den gegebenen Einzelkräften K völlig bestimmt; die Kräftepaar-Achse $\mathfrak{M}$ ist aber noch nicht auf unmittelbar gegebene Grössen zurückgeführt. Es soll daher der Beitrag einer der gegebenen Kräfte, etwa K_1, zu der Achse $\mathfrak{M}_x$ näher bestimmt werden.

Der Angriffspunkt H von K_1 (Fig. 120) habe die Koordinaten x_1, y_1, z_1, aus denen wir ein rechtwinkliges Parallelepiped zeichnen.

Fig. 120.



Zerlegen wir K_1 in seine drei rechtwinkligen Seitenkräfte und bringen auch in A dieselben Kräfte entgegengesetzten Sinnes an, so bilden die beiden Kräfte $K_1 \cos\gamma_1$ ein Paar, welches in einer Diagonalebene $ACHE$ wirkt. Zur Vereinfachung fügen wir im Punkte B noch zwei solche sich aufhebende Kräfte hinzu; die in A abwärts, in B aufwärts wirkende Kraft bilden ein in der xz-Ebene wirkendes Paar, dessen Achse in AY fällt, mithin zu $\mathfrak{M}_x$ keinen Beitrag liefert. Die in H aufwärts, in B abwärts wirkenden $K_1 \cos\gamma_1$ liegen aber in der Seitenebene $BCHF$, haben von rechts aus betrachtet, positiven Drehsinn, so dass ihre Achse in der Grösse $K_1 \cos\gamma_1 \, y_1$ auf der AX aufzutragen ist.

Auch zu den beiden $K_1 \cos\beta_1$ fügen wir in B und C noch zwei sich aufhebende hinzu. Die eine hiervon bildet mit der in A angreifenden ein Kräftepaar in der Ebene $ABCD$, dessen Achse in die AZ fällt, also zu $\mathfrak{M}_x$ keinen Beitrag liefert; die in H und B angreifenden aber bilden mit dem Abstande z_1 ein Kräftepaar, dessen Drehsinn von rechts betrachtet negativ ist, dessen Beitrag zu $\mathfrak{M}_x$ also ebenfalls negativ sein muss, nämlich $- K_1 \cos\beta_1 \, z_1$.

Die beiden in A und H angreifenden Kräfte $K_1 \cos\alpha_1$ liefern zu $\mathfrak{M}_x$ keinen Beitrag, denn ihre Wirkungsebene ist die Diagonalebene $AGHB$, so dass die Achse in der yz-Ebene, mithin rechtwinklig zu AX liegt.

Der gesammte Beitrag der Kraft K_1 zu $\mathfrak{M}_x$ ist also

$$K_1 \cos\gamma_1 y_1 - K_1 \cos\beta_1 z_1 .$$

Die Beiträge der übrigen Kräfte ergeben sich in entsprechender Form, so dass im Ganzen

8) $$\mathfrak{M}_x = \Sigma \boldsymbol{K} \cos\gamma\, \boldsymbol{y} - \Sigma \boldsymbol{K} \cos\beta\, \boldsymbol{z} \quad \text{wird.}$$

In gleicher Weise erhält man für die anderen Richtungen

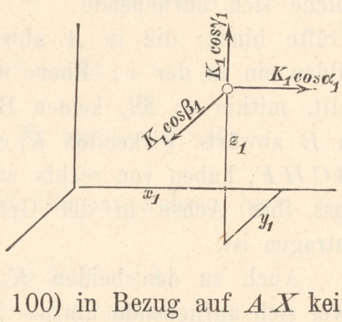
9) $$\mathfrak{M}_y = \Sigma \boldsymbol{K} \cos\alpha\, \boldsymbol{z} - \Sigma \boldsymbol{K} \cos\gamma\, \boldsymbol{x} \quad \text{und}$$

10) $$\mathfrak{M}_z = \Sigma \boldsymbol{K} \cos\beta\, \boldsymbol{x} - \Sigma \boldsymbol{K} \cos\alpha\, \boldsymbol{y} .$$

Hiermit ist die Aufgabe der Zusammensetzung der Kräfte gelöst.

$\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$ und $\mathfrak{M}_z$ bedeuteten die Achsen von Kräftepaaren; es lässt sich die Bedeutuug derselben aber noch einfacher ausdrücken. Zu dem Zwecke wollen wir das Drehmoment der Kraft K_1 in Bezug auf die Achse AX ermitteln. Wir können für dasselbe nach dem Satze der Momente (S. 100) die Summe der Momente der in H angreifenden Einzelkräfte $K_1 \cos\gamma_1$, $K_1 \cos\beta_1$ und $K_1 \cos\alpha_1$ setzen.

Fig. 121.



Die Seitenkraft $K_1 \cos\gamma$ (Fig. 121) kreuzt die AX rechtwinklig in einem Abstande y_1, hat daher das Moment $K_1 \cos\gamma_1 y_1$, und zwar, von rechts gesehen, positiv drehend; $K_1 \cos\beta_1$ kreuzt die AX rechtwinklig in einem Abstande z_1, und zwar, von rechts gesehen, negativ drehend, hat daher das Moment $-K_1 \cos\beta_1 z_1$; $K_1 \cos\alpha_1$ aber ist mit AX parallel; hat also (nach S. 100) in Bezug auf AX kein Moment. Das Moment der ursprünglich gegebenen Kraft K_1 in Bezug auf AX ist demnach $K_1 \cos\gamma_1 y_1 - K_1 \cos\beta_1 z_1$, stimmt also mit dem Beitrage der Kraft K_1 zu der Kräftepaar-Achse $\mathfrak{M}_x$ überein. Hiernach können die Kräftepaar-Achsen $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$ und $\mathfrak{M}_z$ gedeutet werden als die Momentensummen der ursprünglich gegebenen Kräfte K in Bezug auf die Achsen AX, AY und AZ.