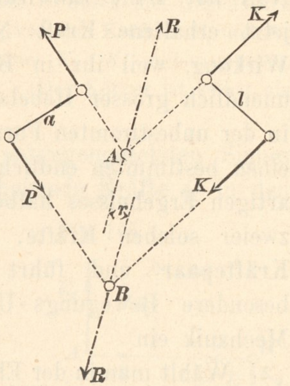
5. Zusammensetzung von Kräftepaaren.

Sind in einer Ebene die Kräftepaare von den Momenten Kl und $-Pa$ gegeben (Fig. 109), so kann man die im Punkte A sich schneidenden Kräfte durch eine Mittelkraft R ersetzen und ebenso die anderen beiden, welche sich in B schneiden. Die beiden Kräfte R sind gleich und entgegengesetzt, bilden daher im Allgemeinen ein Kräftepaar von Momant Rr. Wendet man den Satz der Drehmomentc auf die in A sich schneidenden Kräfte an, bezogen auf B, so wird $Rr = Kl - Pa$. Die beiden gegebenen Kräftepaare von entgegengesetztem Sinne lassen sich hiernach durch ein einziges Kräftepaar ersetzen, dessen Moment gleich dem Unterschiede der Momente der gegebenen Kräftepaare, dessen Sinn mit dem des stärkeren Kräftepaares übereinstimmt.

Fig. 109.

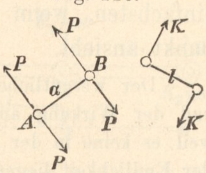


Für $Kl = Pa$ entsteht $Rr = 0$, d. h. $r = 0$. Die Kräfte R fallen dann in dieselbe Gerade und heben sich auf. Daraus folgt der Satz:

Zwei in derselben Ebene wirkende Kräftepaare von gleichen Momenten und entgegengesetztem Sinne heben sich auf.

Ist nun ein Kräftepaar Kl gegeben (Fig. 110), so kann man in derselben Ebene an einem beliebigen Punkte A zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte P hinzufügen, ebenso im Punkte B. Wählt man die Lage der Punkte A und B so, dass $Pa = Kl$, so hebt das Kräftepaar Pa mit negativem Drehsinne das gegebene Kl auf, und es bleibt ein Kräftepaar $Pa = Kl$ mit positivem Drehsinn übrig, welches mit dem gegebenen Kl gleichwerthig ist, und man hat den Satz:

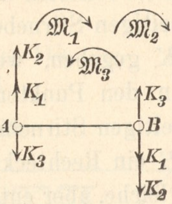
Fig. 110.



Zwei in derselben Ebene wirkende Kräftepaare von gleichen Momenten und gleichem Drehsinne haben gleiche Wirkung.

Hiernach ist die Wirkung eines Kräftepaares gar nicht von der Grösse der Kräfte K, von ihrer Richtung und Lage, sondern nur von dem Momente, dem Drehsinne und der Wirkungsebene abhängig; ein Kräftepaar in einer bestimmten Ebene ist daher durch einen Drehungspfeil und die Momentengrösse $\mathfrak{M}$ genügend gekennzeichnet. Sind nun in der Zeichenebene mehrere Kräftepaare gegeben, etwa $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ von positivem, $\mathfrak{M}_3$ von negativem Sinne (Fig. 111), so kann man sie zu einem einzigen Paare vereinigen; hierzu wählt man einen Arm $l = AB$, macht $K_1 = \mathfrak{M}_1 : l$ und stellt $\mathfrak{M}_1$ durch zwei Kräfte K_1 dar, die an den Punkten A und B angreifen. An denselben Punkten und mit gleichen Richtungen kann man zwei Kräfte $K_2 = \mathfrak{M}_2 : l$ anbringen als Darstellung von $\mathfrak{M}_2$, ebenso zwei Kräfte $K_3 = \mathfrak{M}_3 : l$ mit entgegengesetzten Richtungen. In A kann man die drei Kräfte K_1, K_2 und K_3 zu einer Mittelkraft $R = K_1 + K_2 - K_3$ zusammensetzen, ebenso an B. R und R bilden ein Kräftepaar von dem Moment

Fig. 111.



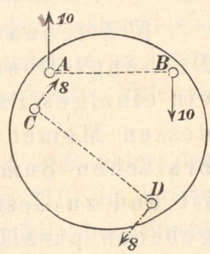
$$\mathfrak{M} = Rl = K_1 l + K_2 l - K_3 l = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_3,$$

woraus sich ergiebt:

Mehrere in derselben Ebene wirkende Kräftepaare können zu einem einzigen Paare in derselben Ebene zusammengesetzt werden, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Einzelmomente ist.

War $\mathfrak{M}_1 = 12^{\,\mathrm{mkg}}$; $\mathfrak{M}_2 = 24^{\,\mathrm{mkg}}$; $\mathfrak{M}_3 = -20^{\,\mathrm{mkg}}$ und wählt man $l = 1^{\,\mathrm{m}}$, so wird $K_1 = 12^{\,\mathrm{kg}}$; $K_2 = 24^{\,\mathrm{kg}}$; $K_3 = -20^{\,\mathrm{kg}}$, mithin $R = 12 + 24 - 20 = 16^{\,\mathrm{kg}}$ und das daraus entstehende Kräftepaar $\mathfrak{M} = 16^{\,\mathrm{mkg}}$.

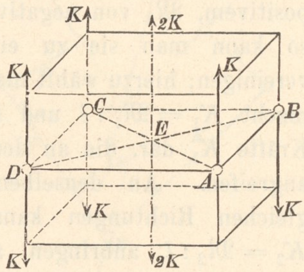
Fig. 112.



Sind an einem Holzklotze (Fig. 112) die vorstehenden Griffe A und B in $0{,}16^{\,\mathrm{m}}$ Entfernung angebracht, ebenso C und D in $0{,}2^{\,\mathrm{m}}$ Abstand, und übt man an A und B mit den Händen die Kräfte $10^{\,\mathrm{kg}}$ aus, also das Moment $10 \cdot 0{,}16 = 1{,}6^{\,\mathrm{mkg}}$, so kann man ganz dieselbe Wirkung erreichen, wenn man an C und D ein Kräftepaar, bestehend aus zwei Kräften von $8^{\,\mathrm{kg}}$, angreifen lässt. Das zweite Kräftepaar würde, in entgegengesetzter Richtung angebracht, die Wirkung des ersteren völlig aufheben, so dass der Körper sich so verhalten würde, als ob die Kräftepaare gar nicht vorhanden wären. In diesen Beziehungen wird nichts geändert, wenn man dem Klotze etwa eine feste Drehachse, rechtwinklig zur Bildebene, giebt. Wo die Achse auch liegen mag, — gleichwerthige Kräftepaare werden um diese Achse stets dasselbe Drehungsbestreben haben, während gleiche entgegengesetzte Kräftepaare sich stets gegenseitig tilgen werden.

Auch in eine Parallelebene kann man ein Kräftepaar verschieben, ohne in der Wirkung etwas zu ändern. An einem starren Parallelepiped (Fig. 113) seien die in den Punkten A und B der rechtsseitigen Stirnebene angreifenden Kräfte K gegeben, welche ein Paar bilden. In den Punkten C und D der linksseitigen Stirnebene, welche mit A und B ein Rechteck bilden, füge man je 2 gleiche, aber entgegengesetzte Kräfte K hinzu, dann haben die jetzt vorhandenen 6 Kräfte die gleiche Wirkung, wie die beiden gegebenen. Die beiden Diagonalen des Rechtecks $ABCD$ halbiren sich gegenseitig in E. Die in A und C angreifenden aufwärts gerichteten Kräfte K kann man durch ihre Mittelkraft $2K$ im Punkte E ersetzen, ebenso die beiden in B und D angreifenden abwärts gerichteten. Da nun die beiden durch E gehenden Kräfte $2K$ sich aufheben, so bleiben nur noch die in der linksseitigen Stirnebene, bei D aufwärts, bei C abwärts wirkenden Kräfte übrig, welche dem gegebenen Kräftepaare gleichwerthig sind.

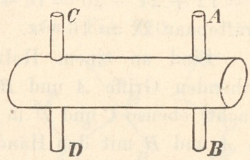
Fig. 113.



Hat ein Körper 2 Arme AB und CD (Fig. 214), so ist es für die Bewegung von gleicher Wirkung, ob man mit den Händen in A und B oder in C und D angreift.

Diese Betrachtung führt dann mit den früheren Sätzen zu dem Ergebnisse:

Fig. 114.

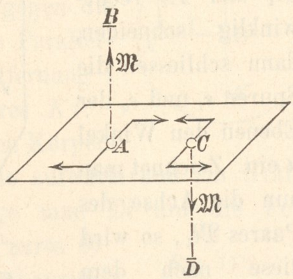


K r ä f t e p a a r e m i t p a r a l l e l e n D r e h u n g s - E b e n e n k ö n n e n d u r c h e i n e i n z i g e s P a a r e r s e t z t w e r d e n , d e s s e n M o m e n t g l e i c h d e r a l g e b r a i s c h e n S u m m e d e r M o m e n t e d e r g e g e b e n e n P a a r e i s t u n d z u d e s s e n D r e h u n g s e b e n e i r g e n d e i n e d e n g e g e b e n e n p a r a l l e l e E b e n e g e w ä h l t w i r d .

Hiernach gehört eine bestimmte Drehungsebene gar nicht zu den kennzeichnenden Eigenschaften eines Kräftepaares, sondern die

Richtung seiner Drehungsebene. Zwei andere Merkmale sind die Grösse des Momentes und der Drehungssinn. Diese drei lassen sich geometrisch mittels einer Geraden darstellen. Man errichtet eine Rechtwinklige zu der gegebenen Drehungsebene und bezeichnet sie als Achse des Kräftepaares. Jede zur Achse rechtwinklige Ebene kann dann zur Drehungsebene gewählt werden. Die Grösse des Momentes lässt sich nach irgend einem Mafsstabe als Strecke auf der Achse abtragen (Fig. 115). Diese Strecke werde von der Ebene aus auf der Achse in solchem Sinne aufgetragen, dass wenn man von dem Endpunkte auf die Ebene blickt, der Drehsinn als rechtsherum erscheint. Der Endpunkt aber lässt sich kennzeichnen, indem man auf der Achse eine nach dem Endpunkte weisende Pfeilspitze anbringt. Das bei A wirkende Kräftepaar (Fig. 115) erscheint, von oben betrachtet, rechts drehend, von der Unterseite der Ebene aber erblickt man das Spiegelbild mit der Drehung links herum (ebenso wie das Spiegelbild einer Uhr oder eine Uhr mit durchscheinendem Zifferblatte, von der Rückseite betrachtet, eine Linksdrehung der Zeiger erkennen lässt). Daher muss der Endpunkt B der Achse AB oberhalb A liegen, durch eine aufwärts weisende Pfeilspitze also B als Endpunkt gekennzeichnet werden, während es für das bei C wirkende Paar gerade umgekehrt ist. Es lässt sich nun weiter zeigen, dass die Zusammensetzung von Kräftepaaren auch in sich schneidenden Ebenen mit Hülfe ihrer Achsenstrecken nach denselben Regeln wie die Zusammensetzung von Einzelkräften erfolgen kann. Dabei bietet sich noch die Erleichterung, dass, während eine Einzelkraft eine bestimmte Lage hat, die Momentenachse an irgend einem Punkte der Drehungsebene errichtet werden konnte, sich also auch beliebig parallel verschieben lässt.

Fig. 115.

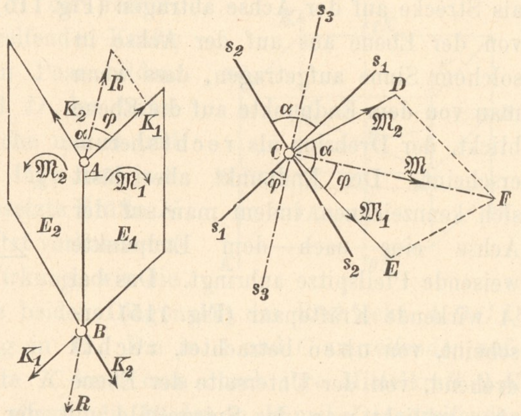


Es seien nun in zwei sich in der Geraden AB unter dem Winkel α schneidenden Ebenen E_1 nnd E_2 (Fig. 116) die Kräftepaare $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ mit den durch die Drehungspfeile bezeichneten Drehungssinnen gegeben. Man führe sie beide auf den Arm $AB = l$ zurück, so dass $K_1 l = \mathfrak{M}_1$; $K_2 l = \mathfrak{M}_2$. In A kann man K_1

und K_2 zur Mittelkraft R zusammensetzen, welche mit K_1 den Winkel φ bildet. In B erscheint dann die gleiche entgegengesetzte Parallelkraft R, und man hat an Stelle der gegebenen Paare ein einziges mit dem Moment Rl.

Wendet man aber auf die Achsenstrecken der Kräftepaare die Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte an, so gelangt man zu dem gleichen Ergebnisse.

Fig. 116.



Eine Grundrissebene möge die Ebenen E_1 und E_2 rechtwinklig schneiden, dann schliessen die Spuren s_1 und s_2 der Ebenen den Winkel α ein. Zeichnet man nun die Achse des Paares $\mathfrak{M}_1$, so wird diese nach dem früheren von C nach E gerichtet sein müssen; man mache $CE = \mathfrak{M}_1$. Ebenso ist $CD = \mathfrak{M}_2$ die Achse des zweiten Paares. Behandelt man $CE = \mathfrak{M}_1$ und $CD = \mathfrak{M}_2$ wie zwei Einzelkräfte, zeichnet aus ihnen ein Parallelogramm mit CF als Mittelkraft, so ist dieses Parallelogramm ähnlich dem aus K_1 und K_2 gezeichneten; seine Seiten haben die l fache Länge des letzteren und stehen zu ihnen rechtwinklig. Daher ist auch $CF = Rl$, d. h. gleich dem Momente des resultirenden Kräftepaares und steht rechtwinklig auf der Ebene desselben. Von F aus betrachtet erscheint das Paar Rl rechts drehend; mithin hat CF alle Eigenschaften der Achse des resultirenden Paares $\mathfrak{M}$, und eine Ebene mit der Spur s_3, rechtwinklig zu CF würde als Wirkungsebene von $\mathfrak{M}$ gewählt werden können.

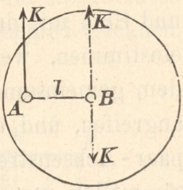
Da das Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte unmittelbar zum Parallelepiped-Gesetze führte, so muss letzteres auch für Kräftepaar-Achsen gelten. Danach sind auch die zur Zusammensetzung von Kräften an einem Punkte auf S. 40 angegebenen Verfahren unmittelbar auf solche Achsen zu übertragen. Oder:

Kräftepaare in beliebigen Ebenen lassen sich wie Kräfte, die an einem Punkte angreifen, mit Hülfe ihrer

Achsenstrecken zusammensetzen, indem man letztere parallel an einen gemeinsamen Schnittpunkt verschiebt und wie Einzelkräfte behandelt.

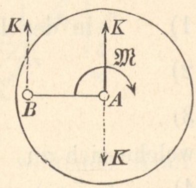
Parallelverschiebung einer Kraft. Greift in einem Punkte A eine Kraft K an (Fig. 117), so kann man zwei gleiche entgegengesetzte K in B hinzufügen; von den drei Kräften bilden nun die ursprünglich gegebene und die entgegengesetzt hinzugefügte ein Kräftepaar $\mathfrak{M} = Kl$, und ausserdem bleibt eine mit der gegebenen gleichgesinnte Kraft K übrig, welche um l gegen die ursprüngliche Lage verschoben ist. Die Parallelverschiebung einer Kraft K um die Entfernung l bedingt also die Hinzufügung eines Paares Kl.

Fig. 117.



Sind aber in einer Ebene eines starren Körpers eine Einzelkraft K in A mit dem Sinne aufwärts und ein Kräftepaar $\mathfrak{M}$ gegeben (Fig. 118), so bringe man $\mathfrak{M}$ auf die Form $\mathfrak{M} = Kl$, lege die eine Kraft K des Paares so durch A, dass sie mit der gegebenen entgegengesetzten Sinn hat, sich also damit aufhebt, und die andere in den Abstand $AB = l = \mathfrak{M} : K$; dann bleibt letztere, durch B gehende Kraft K allein übrig.

Fig. 118.



Ein Kräftepaar $\mathfrak{M}$ setzt sich also in derselben Ebene mit einer Einzelkraft K zusammen zu einer Kraft K, welche um $l = \mathfrak{M} : K$ gegen die gegebene Kraft K verschoben ist.

6. Zusammensetzung von Kräften im Raume mit verschiedenen Angriffspunkten.

Greifen an einen starren Körper beliebige Kräfte $K_1 \ldots K_n$ an (Fig. 119), von denen der Einfachheit wegen nur K_1 und K_n gezeichnet werden sollen, so wähle man zum Zwecke möglichster Vereinigung derselben einen beliebigen Punkt A und füge in diesem zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte K_1 hinzu; dann bilden die gegebene K_1 und die entgegengesetzt hinzugefügte ein Kräftepaar, dessen Drehungsebene durch K_1 in P_1 und den Punkt A gegeben ist, und dessen Hebelarm l_1 der rechtwinklige Abstand der in P_1