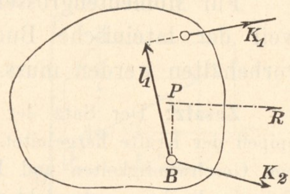
der Lage von R möglichst einfach wird. Man wähle (Fig. 103) irgend einen Punkt der Richtungslinie von K_2, z. B. B zum Drehpunkte, dann hat K_2 den Hebelarm $l_2 = 0$, und es wird

Fig. 103.



$$l = \frac{K_1 l_1}{R} = BP,$$

womit die Lage von R bestimmt ist.

Beispiel: $K_1 = 20$ kg; $K_2 = 30$ kg (dargestellt durch 2 bezw. 3 cm); sie schneiden sich unter dem Winkel $\alpha = 30^0$; $l_1 = 1{,}5$ cm $= 0{,}015$ m.

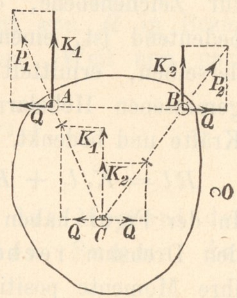
Dann wird $R = \sqrt{400 + 900 + 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 0{,}866} = 10 \sqrt{23{,}4} = 48{,}4$ kg.

$l = 20 \cdot 0{,}015 : 48{,}4 = 0{,}0062$ m $= 6{,}2$ mm.

4. Zusammensetzung paralleler Kräfte.

Wirken an einem Körper zwei Parallelkräfte K_1 und K_2 gleichen Sinnes (Fig. 104), so kann man deren Angriffspunkte A und B so wählen, dass AB rechtwinklig zu den Kräften ist. Man würde sehr leicht zur Mittelkraft R gelangen, wenn man das vorstehend benutzte Verfahren, welches für Kräfte mit einem in der Endlichkeit liegenden Schnittpunkte gültig war, ohne Weiteres auf Kräfte mit einen unendlich fernen Schnittpunkte anwenden wollte. Doch erscheint es gerathen, die Richtigkeit dieser Erweiterung nachzuweisen. Daher führen wir in A und B 2 gleiche entgegengesetzte Kräfte Q hinzu, wodurch an der Wirkung der Kräfte K_1 und K_2 nichts geändert wird. Die Kräfte im Punkte A lassen sich nun zu P_1, diejenigen im Punkte B zu P_2 vereinigen. P_1 und P_2 aber schneiden sich in C und können hier zu einer Mittelkraft R vereinigt werden, welche dann zugleich die gesuchte Mittelkraft von K_1 und K_2 sein muss. Die Grösse und Richtung von R erkennt man leicht, wenn man mit P_1 und P_2 auch die in A und B gezeichneten Kräfterechtecke an den Punkt C verschiebt, d. h. mittels derselben P_1 in K_1 und Q, P_2 in K_2 und Q zerlegt, dann heben sich Q und Q wieder auf, und es bleiben in C wirksam K_1 und K_2, welche durch

Fig. 104.



$R = K_1 + K_2$ ersetzt werden. Es ist also die Mittelkraft zweier Parallelkräfte gleichen Sinnes gleich der Summe beider, mit ihnen parallel und gleichen Sinnes Ihre Lage könnte man leicht aus Fig. 104 ermitteln, doch lässt sich zeigen, dass der Satz der Drehmomente auch für Kräfte mit unendlich fernem Schnittpunkte gilt. Wählt man nämlich in Fig. 104 einen beliebigen Drehpunkt O, nennt die Hebelarme von

$$\begin{matrix} K_1 & K_2 & P_1 & P_2 & Q & R & \text{bezw.} \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 & l, & \end{matrix}$$

so ist für die im Punkte A sich schneidenden Kräfte

$$P_1\, l_3 = K_1\, l_1 - Q\, l_5 \quad (Q \text{ dreht links}),$$

ebenso für die im Punkte B sich schneidenden Kräfte

$$P_2\, l_4 = K_2\, l_2 + Q\, l_5, \text{ also durch Zusammenzählen:}$$

$$P_1\, l_3 + P_2\, l_4 = K_1\, l_1 + K_2\, l_2 .$$

Für die in C sich schneidenden Kräfte P_1, P_2 und ihre Mittelkraft R gilt aber

$$R\, l = P_1\, l_3 + P_2\, l_4 = K_1\, l_1 + K_2\, l_2 ,$$

d. h. das Moment der Mittelkraft R = der Momentensumme von K_1 und K_2. Würde in derselben Ebene noch eine Kraft K_3 hinzutreten, so könnte man in gleicher Weise diese mit dem gefundenen R verbinden, und man erkennt leicht, dass bei beliebig vielen Parallelkräften gleichen Sinnes

$$R = \text{und} \parallel \Sigma K \text{ und } R\, l = \Sigma K l$$

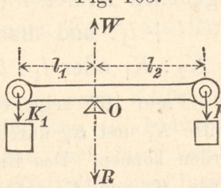
sein muss.

Legt man den Drehpunkt O auf die Richtungslinie von R (Fig. 105), so ist deren Hebelarm Null, und es wird

$$0 = K_1\, l_1 - K_2\, l_2, \text{ mithin}$$

2) $$\boldsymbol{l_1 : l_2 = K_2 : K_1},$$

Fig. 105.



d. h. die Abstände der Mittelkraft von den beiden Einzelkräften verhalten sich umgekehrt wie die Kräfte selbst. Bei gleichen Kräften liegt die Mittelkraft in deren Mitte, bei ungleichen Kräften aber der grösseren Kraft näher. Man kann auch schreiben:

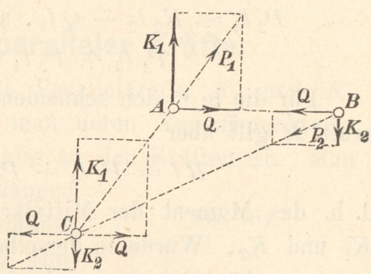
$$l_1 : (l_1 + l_2) = K_2 : (K_1 + K_2).$$

Beispiel: $K_1 = 30^{\text{kg}}$, $K_2 = 20^{\text{kg}}$ in der Entfernung $l_1 + l_2 = 2{,}5^{\text{cm}}$. Dann hat man diese $2{,}5^{\text{cm}}$ in dem Verhältnisse 20 : 30 zu theilen, d. h. man theilt $l_1 + l_2$ in 5 gleiche Theile, dann ist $l_1 = \frac{2}{5}(l_1 + l_2) = 1^{\text{cm}}$, $l_2 = 1{,}5^{\text{cm}}$.

Die Mittelkraft R, welche K_1 und K_2 völlig ersetzt, kann durch eine entgegengesetzte Kraft $W = R$ aufgehoben werden; W hebt dann zugleich K_1 und K_2 auf, und der Körper verhält sich gerade so, als ob auf ihn gar keine Kräfte wirkten. In Fig. 105 wird die Kraft W durch den Gegendruck einer Schneide ausgeübt, deren Abstände l_1 und l_2 von den Kräften K_1 und K_2 (angehängten Gewichten) genau in dem Verhältnisse $K_2 : K_1$ stehen müssen, damit der Körper auf der Schneide ruhen kann. (Der Körper ist selbst als gewichtlos angesehen.)

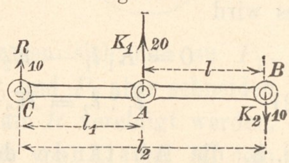
Sind 2 Parallelkräfte K_1 und K_2 entgegengesetzten Sinnes (Fig. 106), so fügt man wieder 2 sich aufhebende Kräfte Q in den Punkten A und B der Winkelrechten AB hinzu, vereinigt K_1 und Q in A zu P_1, ebenso K_2 und Q in B zu P_2, zerlegt P_1 und P_2 im Schnittpunkte C wieder in K_1 und Q bezw. in K_2 und Q, so dass dort die beiden Q sich aufheben und ersetzt K_1 und K_2 in C durch die Mittelkraft $R = K_1 - K_2$, welche $\parallel K_1$ und mit der grösseren von beiden gleichen Sinnes, in Fig. 106 also mit K_1. Der Satz der Momente für den Punkt C ergiebt dann $0 = -K_1 l_1 + K_2 l_2$ oder wiederum $l_1 : l_2 = K_2 : K_1$. Der Figur zufolge liegt R in diesem Falle nicht zwischen den Kräften, sondern ausserhalb derselben und auch jetzt wieder näher an der grösseren, d. h. auf der Seite der grösseren Kraft.

Fig. 106.



Nennt man jetzt den Abstand der gegebenen Kräfte l (Fig. 107), so wird $l_2 = l + l_1$, und man erhält: $l_1 : l + l_1 = K_2 : K_1$ oder $l_1 : l = K_2 : (K_1 - K_2)$.

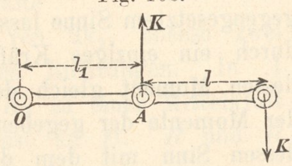
Fig. 107.



Figur 107 zeigt ein Beispiel, wie zwei Kräfte K_1 und K_2 durch eine Kraft R ersetzt werden können. Das Entgegengesetzte von R würde K_1 und K_2 aufheben, d. h. hält man den Punkt C fest, so wird der Körper durch K_1 und K_2 nicht in Bewegung gesetzt.

Denkt man sich, K_1 sei ursprünglich grösser als K_2 gewesen, nähme aber ab und nähere sich mehr und mehr K_2, während K_2 unverändert bleibt, so wird die Mittelkraft R kleiner und kleiner, während zugleich l_1 sich fortgesetzt vergrössert. Im Grenzfalle, für $K_1 = K_2$ wird $R = 0$ und $l_1 = \infty$. Die Zusammensetzung zweier gleichen Parallelkräfte entgegengesetzten Sinnes führt also auf eine Mittelkraft von der Grösse Null, die aber in unendlicher Ferne liegt. Eine in der Endlichkeit liegende Kraft von der Grösse Null hat keine Einwirkung auf die Bewegung des Körpers. Die jetzt erhaltene Kraft Null in unendlicher Ferne aber hat eine Wirkung, weil ihr in Bezug auf einen Drehpunkt am Körper ein unendlich grosser Hebelarm zugehört, so dass ihr Moment zunächst in der unbestimmten Form $0 \cdot \infty$ erscheint, wofür wir aber sehr bald einen bestimmten endlichen Werth erhalten werden. Dieses eigenartigen Ergebnisses halber verzichtet man auf die Zusammensetzung zweier solchen Kräfte, nennt sie ein **Kräftepaar** und führt sie als eine besondere Bewegungs-Ursache in die Mechanik ein.

Fig. 108.



Wählt man in der Ebene des Kräftepaares einen beliebigen Drehpunkt O (Fig. 108) im Abstande l_1 von einer der Kräfte K, so ist die Summe der Momente der beiden Kräfte

$$\mathfrak{M} = -Kl_1 + K(l_1 + l) = Kl,$$

d. h. $\mathfrak{M}$ ist von l_1, also von der Lage des Drehpunktes O unabhängig. Während bei sonstigen Kräften stets die Achse genannt werden muss, wenn die Momente eine bestimmte Bedeutung haben sollen, ist dies bei einem Kräftepaare nicht erforderlich. In Bezug auf jeden Drehpunkt in der Kräfteebene ergiebt sich das gleiche Moment Kl, man nennt daher l den Arm und Kl schlechtweg das Moment des Kräftepaares. Den Drehungssinn erkennt man am einfachsten, wenn man einen Punkt A der einen Kraft als Drehpunkt ansieht.

Der wesentliche Unterschied zwischen der Wirkung eines Kräftepaares und der Wirkung anderer Parallelkräfte besteht darin, dass ein Kräftepaar, weil es keine in der Endlichkeit liegende Mittelkraft hat, auch durch keine in der Endlichkeit liegende Kraft $W = -R$, etwa durch Festhalten eines Punktes C, aufgehoben werden kann. In Figur 108 mag man den Drehpunkt O wählen, wie man will, immer wird das Kräftepaar den Körper mit dem Momente Kl rechts herum in Drehung setzen, während in den Figuren 105 und 107 Punkte O bezw. C gefunden werden konnten, deren Befestigung die Drehwirkung der gegebenen Kräfte K_1 und K_2 vernichtet.