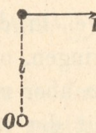
war, kann man entweder geometrische Beziehungen benutzen, oder mit besonderem Vortheile einen Satz der Mechanik, den wir jetzt entwickeln wollen, nämlich den Satz der statischen Momente von Kräften

3. Satz der Drehmomente der Kräfte.

Ist K eine in der Bildebene wirkende Kraft, O eine Achse, rechtwinklig zur Bildebene (Fig. 98), so dass also Kraftlinie und Achse sich im Raume rechtwinklig kreuzen; dann nennt man das Produkt Kraft mal Hebelarm oder Kl das Drehmoment oder statische Moment der Kraft in Bezug auf die Achse O. Der Hebelarm ist die rechtwinkliche Entfernung der Kraft von der Achse.

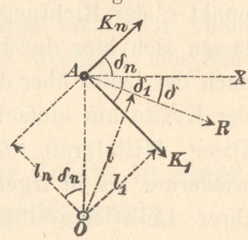
Fig. 98.



Momentum ist (wahrscheinlich) eine Abkürzung von Movimentum und bedeutet Bewegungsmittel; Drehmoment bedeutet also „Mittel zur Erzeugung einer Drehbewegung".

Greifen an demselben Massenpunkte A mehrere in der Bildebene liegende Kräfte K_1 und K_2 an, deren Mittelkraft R ist (Fig. 99) und sind l_1, l_n, l die bezüglichen Hebelarme, von der Achse oder dem Drehpunkte O aus gemessen, so lässt sich zeigen, dass das Moment der Mittelkraft R gleich der Momentensumme der Einzelkräfte. Betrachtet man nämlich AO als y-Achse, AX nach rechts als positive x-Achse, welche mit den Kräften die Neigungswinkel δ_1, δ_n und δ bildet, so ist nach der Figur $l_n = OA \cos \delta_n$, ebenso $l_1 = OA \cos \delta_1$, $l = OA \cos \delta$, so dass man die Momente auch schreiben kann: $K_1\, OA \cos \delta_1$, $K_n\, OA_n \cos \delta_n$ und $R\, OA \cos \delta$. Da aber nach der Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte (S. 40)

Fig. 99.

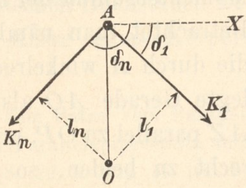


$$R \cos \delta = K_1 \cos \delta_1 + \ldots + K_n \cos \delta_n,$$

so folgt, wenn man allen Gliedern dieser Gleichung den Faktor OA hinzufügt, ohne Weiteres, dass das Moment von R gleich der Summe der Momente der Kräfte K.

In Figur 99 waren sämmtliche cos δ positiv. In Figur 100 aber haben cos δ_1 und cos δ_n verschiedene Vorzeichen, so dass in der Gleichung $R \cos\delta \cdot AO = \Sigma K \cos\delta \cdot AO$ auf der rechten Seite Summanden von verschiedenen Vorzeichen sich ergeben. Die Bedeutung dieses Unterschiedes ist aus der ursprünglichen Erklärung des Momentes Kl nicht ohne Weiteres ersichtlich; sie tritt aber hervor, wenn man die drehende Wirkung der Kräfte, auf die es beim Momente wesentlich ankommt, ins Auge fasst. Denkt man sich den Punkt A mit der Achse O in starrer Verbindung und O als eine feste Drehachse, so haben in Fig. 99 die Kräfte K_1 und K_n übereinstimmend einen Drehsinn rechts herum, im Sinne der Drehung des Uhrzeigers, während in Figur 100 der Drehsinn der Kräfte verschieden ist. Den Drehsinn **rechts** herum pflegt man als positiv zu bezeichnen, die entsprechenden Momente ebenfalls positiv zu setzen, und umgekehrt, doch ist diese Festsetzung eine willkürliche; man könnte auch das Entgegengesetzte wählen. Verschiedener Drehsinn kennzeichnet verschiedene Vorzeichen der Momente, aber welche Richtung man positiv einführen will, steht frei. Es ist jedoch nützlich, sich an eine feste Regel zu binden, damit man bei der Aufschreibung einer Momentensumme nicht unnöthig zu überlegen braucht. Mit Berücksichtigung dieses Umstandes ist dann bei beliebig vielen Kräften in einer Ebene mit gemeinsamem Angriffspunkte

Fig. 100.



$$Rl = \pm K_1 l_1 \pm K_2 l_2 + \ldots \pm K_n l_n$$

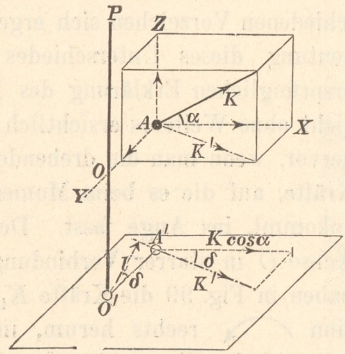
oder kürzer geschrieben

$$\textbf{1)} \qquad \boldsymbol{Rl = \Sigma Kl.}$$

Liegen die an einem Punkte A angreifenden Kräfte nicht in einer zur Achse OP rechtwinkligen Ebene, so ist die bisherige Deutung des Momentes nicht mehr brauchbar. Mit Rücksicht darauf aber, dass das Drehmoment ein Mafs für die drehende Wirkung der Kräfte sein soll, was allerdings erst später, gelegentlich der Betrachtung der Drehbewegung um eine feste Achse näher erläutert werden kann, bezeichnet man als **Moment einer Kraft** K **in Bezug auf eine beliebige Achse** OP **das Moment derjenigen Kraft** K', **welche sich als Projektion von** K

auf eine zur Achse OP rechtwinklige Ebene ergiebt. Es lässt sich zeigen, dass auch in dieser allgemeinen Bedeutung das Moment der Mittelkraft gleich der Momentensumme der Einzelkräfte ist. Betrachtet man nämlich (Fig. 101) die durch A winkelrecht zu OP gelegte Gerade AO als y-Achse, legt AZ parallel zu OP, und AX winkelrecht zu beiden, so kann man K mittels eines Parallelepipeds in bekannter Weise zerlegen in $K \cos \alpha$, $K \cos \beta$, $K \cos \gamma$, von denen die beiden ersteren unten in der Projektionsebene gleichfalls erkennbar sind. K' bedeutet die Mittelkraft dieser beiden. In der Projektionsebene aber kann das Moment $K'l$ von K' auch in der Form $K' \cdot O'A' \cdot \cos \delta$ (Fig. 101) geschrieben werden, oder, weil $K' \cos \delta$ die Seitenkraft in der Richtung AX, $= K \cos \alpha$ bedeutet, auch in der Form $K \cdot \cos \alpha \cdot OA$. Greifen nun im Punkte A beliebig viele Kräfte K an, deren Mittelkraft R ist, so kann man in gleicher Weise das Moment von R in Bezug auf OP in die Form $R \cos \alpha \cdot OA$ bringen. Weil nun noch $R \cos \alpha = \Sigma K \cos \alpha$, so wird auch

Fig. 101.



$$R \cos \alpha \cdot OA = \Sigma K \cos \alpha \cdot OA,$$

und man hat den Satz:

Für Kräfte an einem Punkte ist das Moment der Mittelkraft gleich der algebraischen Summe der Momente der Einzelkräfte.

Da das Moment der Kraft K zu $\mathfrak{M} = K \cos \alpha \cdot OA$ gefunden wurde, so wird es gleich Null, wenn $\alpha = 90^0$ ist, d. h. wenn K rechtwinklig zu AX steht, sich also in der yz-Ebene befindet, der auch die Achse OP angehört. Das Moment einer Kraft wird also Null in Bezug auf eine Achse, die mit ihr in derselben Ebene liegt, d. h. sie schneidet oder ihr parallel ist.

Eine Kraft, deren Projektion auf die Drehungsebene $= 1^{\text{kg}}$, giebt mit einem Hebelarme $= 1^{\text{m}}$ das Moment Eins. Diese

Momenten-Einheit nennt man, wie die Arbeitseinheit, Meterkilogramm; in ihrer Bedeutung aber ist sie von der Arbeitseinheit verschieden.

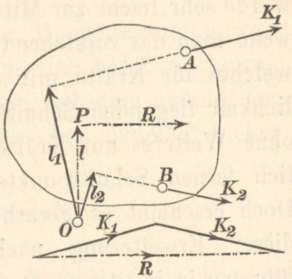
Für Momentengrössen wählen wir den deutschen Buchstaben $\mathfrak{M}$, weil der lateinische Buchstabe M für die Masse eines Körpers vorbehalten werden muss.

Zusatz: Der Satz der Drehmomente ist aus dem Satze vom Parallelepiped der Kräfte hergeleitet. Da ein entsprechender Parallelepiped-Satz auch von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gilt (S. 22 u. 25), so ist der Satz der Drehmomente nicht nur für Kräfte, sondern auch für Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gültig.

Nunmehr kann die Lage der Mittelkraft R von zwei in der Zeichenebene liegenden Kräften auch gefunden werden, wenn der Schnittpunkt C in Fig. 97, S. 97, nicht benutzbar ist.

Man ermittelt zunächst (Fig. 102) Grösse, Richtung und Sinn von R, indem man an beliebiger Stelle, z. B. in einer Hülfsfigur aus K_1 und K_2 einen Kräftezug bildet, dessen Schlussseite $= R$. Sodann wählt man eine beliebige Achse O, rechtwinklig zur Zeichenebene, oder, was gleichbedeutend ist, einen Drehpunkt O in derselben, ermittelt die rechtwinklig gemessenen Hebelarme l_1 und l_2 der Kräfte und bedenkt, dass

Fig. 102.



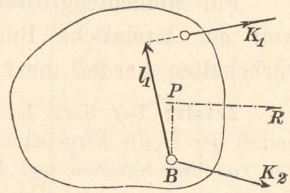
$$R\,l = K_1\,l_1 + K_2\,l_2 \text{ sein muss.}$$

In der Figur haben K_1 und K_2 beide den Drehsinn rechts herum, weshalb ihre Momente positiv angesetzt wurden. R muss dann an dem Hebelarme

$$l = \frac{K_1\,l_1 + K_2\,l_2}{R}$$

ebenfalls rechts herum drehen. Legt man daher durch O eine Rechtwinklige zur Schlussseite R des Kräftezuges und trägt auf ihr die Länge $l = OP$ ab, so muss die endgültige Lage von R durch P gehen, denn es dreht dann R an dem Arme OP, u. zw. rechts herum, wie erforderlich war. Da man aber O ganz beliebig wählen kann, so wird man ihm eine solche Lage geben, dass die Bestimmung der Lage von R möglichst einfach wird. Man wähle (Fig. 103) irgend einen Punkt der Richtungslinie von K_2, z. B. B zum Drehpunkte, dann hat K_2 den Hebelarm $l_2 = 0$, und es wird

Fig. 103.



$$l = \frac{K_1 \, l_1}{R} = BP,$$

womit die Lage von R bestimmt ist.

Beispiel: $K_1 = 20$ kg; $K_2 = 30$ kg (dargestellt durch 2 bezw. 3 cm); sie schneiden sich unter dem Winkel $\alpha = 30^0$; $l_1 = 1{,}5$ cm $= 0{,}015$ m.

Dann wird $R = \sqrt{400 + 900 + 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 0{,}866} = 10 \sqrt{23{,}4} = 48{,}4$ kg.

$l = 20 \cdot 0{,}015 : 48{,}4 = 0{,}0062$ m $= 6{,}2$ mm.

4. Zusammensetzung paralleler Kräfte.

Wirken an einem Körper zwei Parallelkräfte K_1 und K_2 gleichen Sinnes (Fig. 104), so kann man deren Angriffspunkte A und B so wählen, dass AB rechtwinklig zu den Kräften ist. Man würde sehr leicht zur Mittelkraft R gelangen, wenn man das vorstehend benutzte Verfahren, welches für Kräfte mit einem in der Endlichkeit liegenden Schnittpunkte gültig war, ohne Weiteres auf Kräfte mit einen unendlich fernen Schnittpunkte anwenden wollte. Doch erscheint es gerathen, die Richtigkeit dieser Erweiterung nachzuweisen. Daher führen wir in A und B 2 gleiche entgegengesetzte Kräfte Q hinzu, wodurch an der Wirkung der Kräfte K_1 und K_2 nichts geändert wird. Die Kräfte im Punkte A lassen sich nun zu P_1, diejenigen im Punkte B zu P_2 vereinigen. P_1 und P_2 aber schneiden sich in C und können hier zu einer Mittelkraft R vereinigt werden, welche dann zugleich die gesuchte Mittelkraft von K_1 und K_2 sein muss. Die Grösse und Richtung von R erkennt man leicht, wenn man mit P_1 und P_2 auch die in A und B gezeichneten Kräfterechtecke an den Punkt C verschiebt, d. h. mittels derselben P_1 in K_1 und Q, P_2 in K_2 und Q zerlegt, dann heben sich Q und Q wieder auf, und es bleiben in C wirksam K_1 und K_2, welche durch

Fig. 104.