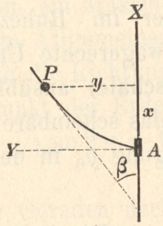
kugel-Regler (Centrifugal-Regulator) zur Regelung des Ganges von Maschinen benutzt. An der lothrechten Achse werden bei O zwei Gelenkstangen von der Länge l befestigt, welche die Kugeln tragen und ihnen zugleich die Kreisbahn CBC_1 vorschreiben. Bei einer Winkelgeschwindigkeit ω wird sich dann die Höhe $h = g : \omega^2$ bilden. Bei grösserer Drehgeschwindigkeit werden die Kugeln steigen, und umgekehrt. Durch geeignetes Gestänge überträgt man das Steigen bezw. Sinken der Kugeln auf die Kraftquelle, indem man diese vermindert bezw. verstärkt.

Soll die Kugel bei gleichbleibender Umdrehungsgeschwindigkeit an jeder Stelle des Armes in scheinbarer Ruhe verbleiben können, so muss die Form des Armes eine solche sein, dass die Gl. 1, S. 90: $\operatorname{tg}\beta\, y\, \omega^2 = g$ für jeden Werth von y Gültigkeit hat. Es muss also offenbar $\operatorname{tg}\beta$ mit y umgekehrt sich ändern. Bezieht man (Fig. 90) die gesuchte Kurve AP auf den Punkt A als Anfangspunkt, so ist $\operatorname{tg}\beta = dy : dx$, mithin $y\,\omega^2 \cdot dy : dx = g$ oder $2\,\omega^2 y\, dy = 2\, g \cdot dx$. Sind zwei Differentiale einander gleich, so dürfen sich deren unbestimmte Integrale nur um eine Konstante C unterscheiden, und man erhält

Fig. 90.



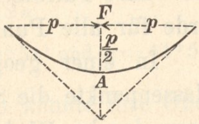
$$\omega^2 y^2 = 2\, gx + C.$$

Weil aber der Punkt A mit den Koordinaten $x = 0$ und $y = 0$ auch der Kurve angehört, so muss die Konstante in obiger Gleichung so bestimmt werden, dass für $x = 0$ auch $y = 0$ wird. Das giebt

$$0 = 0 + C \text{ oder } C = 0, \text{ und nach } y^2 \text{ aufgelöst: } y^2 = 2\left(\frac{g}{\omega^2}\right) x.$$

Diese Gleichung bedeutet eine Parabel, deren Achse mit der x-Achse zusammenfällt und deren Parameter $g : \omega^2$ ist. Für bestimmtes g entspricht jeder Drehgeschwindigkeit ω eine bestimmte Parabel als Gleichgewichtsform. Ist die der Form entsprechende Drehgeschwindigkeit vorhanden, so kann die Kugel an jeder Stelle des Drahtes in scheinbarer Ruhe verbleiben, ist die Geschwindigkeit $> \omega$, so strebt die Kugel fortgesetzt nach aussen, und umgekehrt.

Fig. 91.

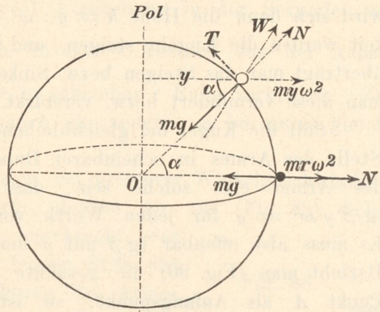


Dreht sich die Achse mit dem Arme in jeder Sekunde 1 Mal um, so ist $\omega = 2\pi$ und der Parameter der Parabel $p = 9{,}81 : (4\,\pi^2) = 0{,}25$ m (Fig. 91).

20. Einfluss der Drehung der Erde um ihre Achse auf das scheinbare Gewicht bezw. die scheinbare Fallbeschleunigung.

Denken wir uns die Erde vorläufig als Kugel vom Halbmesser $r = 6\,370\,000$ m und betrachten wir einen Massenpunkt, der am Äquator auf der Erdoberfläche ruht, so ist dieser Zustand nur ein scheinbarer Ruhezustand in Bezug auf die sich drehende Erde (Fig. 92). Zu der Anziehungskraft mg der Erde und dem nach aussen gerichteten Normalwiderstande N der Erdoberfläche muss daher noch die Centrifugalkraft $mr\omega^2$ hinzugefügt werden, damit Gleichgewicht entstehe. Daher ist $N = mg - mr\omega^2$. Nun wird aber das Gewicht eines Körpers nach dem Drucke beurtheilt, den er im Ruhezustande auf eine wagerechte Unterlage (die Wagschale) ausübt, so dass N als das scheinbare Gewicht und $N : m$ als die scheinbare Fallbeschleunigung g_0 in der geographischen Breite Null zu bezeichnen ist, also

Fig. 92.



$$g_0 = g - r\omega^2.$$

Die Zeit einer Umdrehung der Erde beträgt

$$23^{\text{h.}}\ 56^{\text{m.}}\ 4^{\text{s.}} = 86\,164^{\text{s.}};$$

daher $\omega = 2\pi : 86\,164 = 0{,}000073$, hiernach wird

$$r\omega^2 = 6\,370\,000 \cdot 0{,}000\,073^2 = 0{,}034.$$

Nun ist die scheinbare Fallbeschleunigung am Äquator durch Pendelbeobachtungen (s. S. 78) zu $g_0 = 9{,}781 \frac{\text{m}}{\text{s.}^2}$ beobachtet, daher wird

$$g = 9{,}781 + 0{,}034 = 9{,}815$$

die wahre Fallbeschleunigung am Äquator, welche bei kugelförmiger Erde für alle Punkte der Erdoberfläche gelten würde.

In einer geographischen Breite α halten sich nun an dem Massenpunkte die Schwere mg, die Centrifugalkraft $my\omega^2$ mit dem Gegendrucke W der Erdoberfläche im Gleichgewichte, woraus folgt, dass W im Allgemeinen nicht durch den Erdmittelpunkt O geht. Zerlegt man W in einen Normalwiderstand N und einen Tangentialwiderstand T, so wird, weil $y = r \cos\alpha$,

$$N = mg - mr\omega^2 \cos^2\alpha = m(g - r\omega^2 \cos^2\alpha) \text{ und}$$

$$T = mr\omega^2 \sin\alpha \cos\alpha.$$

Von diesen beiden Seitenkräften ist $N \geqq m\,(9{,}81 - 0{,}034)$ oder $N \geqq m \cdot 9{,}776$, dagegen $T \leqq m \cdot 0{,}034 \cdot {}^1/_2$ (für $\alpha = 45^0$), daher $N : T \geqq 575$. Da nun N und T die Katheten, W die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks darstellen, so ist die Hypothenuse W bei solchem Verhältnisse von $N : T$ mit grosser Annäherung gleich N zu setzen. W bedeutet aber wiederum die scheinbare Schwere und $W : m$ die scheinbare Fallbeschleunigung g_a in der geographischen Breite a; mithin ist

$$g_a = g - r\,\omega^2 \cos^2 a = g - r\,\omega^2 + r\,\omega^2 \sin^2 a.$$

Da nun $g - r\,\omega^2 = g_0 = 9{,}781$, so wird

$$2) \qquad g_a = 9{,}781 + 0{,}034 \sin^2 a = 9{,}798 - 0{,}017 \cos 2\,a.$$

Die scheinbare Schwere W würde auch nach Richtung und Grösse die Spannkraft eines Fadens bilden, an welchem ein Massenpunkt etwa als Loth aufgehängt wäre. Da nun W im Allgemeinen nicht mit der Normalen N zusammenfällt, so geht auch die Richtung des Lothes im Allgemeinen nicht durch den Mittelpunkt der Erde, nur am Äquator und an den Polen, wo $T = m\,r\,\omega^2 \cdot {}^1\!/\!_2 \sin 2\,a = 0$ ist, findet dies Statt.

Für den Winkel δ, um den das Loth von der Geraden nach dem Mittelpunkte der Erde abweicht, gilt

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{T}{N} = \frac{m\,r\,\omega^2 \sin a \cos a}{m\,g_a}$$

$$= \frac{0{,}034 \sin a \cos a}{9{,}798 - 0{,}017 \cos 2\,a} = \frac{0{,}017 \sin 2\,a}{9{,}798 - 0{,}017 \cos 2\,a}.$$

Will man wissen, in welcher Breite a dieses ein Maximum wird, so setzt man die Abgeleitete von $\operatorname{tg}\delta$ gleich Null, mithin

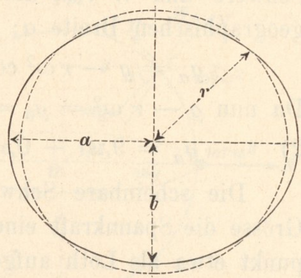
$$0 = (9{,}798 - 0{,}017 \cos 2\,a) \cdot 0{,}034 \cos 2\,a - 0{,}017 \sin 2\,a \cdot 0{,}034 \sin 2\,a, \text{ oder}$$

$$9{,}798 - 0{,}017 \cos 2\,a = 0{,}017 \sin 2\,a\, tg\, 2\,a$$

und daraus $\cos 2\,a = \frac{0{,}017}{9{,}798} = 0{,}001735$. Das giebt $2\,a = 89^0\,54'$ und $a = 44^0\,52'$.

Wäre die Erde vollkommen kugelförmig, so könnte ihre Oberfläche einen von der Normalen abweichendeu Widerstand W gar nicht leisten; die Seitenkraft T, welche für den scheinbaren Ruhezustand erforderlich wäre, könnte von ihr nicht ausgeübt werden; es würden daher alle leicht beweglichen Körper, namentlich die Wassertheilchen des Meeres nach dem Äquator fortgleiten, bis die Kugelform sich so geändert haben würde, dass W rechtwinklig zur Oberfläche steht. Diese Formänderung findet aber nicht mehr statt, weil die Gestalt der Erde eben keine Kugel ist, sondern ein Ellipsoid, welches jener Bedingung, dass die Richtung des Lothes rechtwinklig zur Oberfläche steht, entspricht (Fig. 93). Der Erdhalbmesser $a = 6\,377\,000^{m}$ am Äquator ist etwa 21 km grösser als der Polradius $b = 6\,356\,000^{m}$. In Folge dieses Umstandes wird ein Massenpunkt, wenn man ihn vom Äquator her nach dem Pole verschiebt, dem Mittelpunkte der Erde näher kommen, woraus allein schon eine Zunahme der Anziehung folgt, deren Einfluss jene andere Zunahme noch verstärkt, die in Folge der Abnahme der Wirkung der Centrifugalkraft sich ergiebt. Pendelversuche

Fig. 93.



haben ergeben, dass man in Gl. 2 (S. 93) die Zahlenwerthe ändern muss, um sie mit der Wirklichkeit in Übereinstimmung zu bringen; es ist nämlich thatsächlich

$$3)\qquad g_a = 9{,}781 + 0{,}051 \sin^2 \alpha = 9{,}806 - 0{,}025 \cos 2\alpha.$$

$$\alpha = 0 \quad \text{giebt } g_0 = 9{,}781$$

$$\alpha = 45^0 \quad „ \quad g_{45} = 9{,}806$$

$$\alpha = 90^0 \quad „ \quad g_p = 9{,}831 \text{ (am Pole).}$$

Für Hannover ist $\alpha = 52^0\,23'$, daher $g_a = 9{,}812$.

Da wir das Gewicht eines Liters Wasser (bei 4° C.) unter 45° geographischer Breite als Krafteinheit (Kilogramm) bezeichnet haben, so beträgt das Gewicht dieses Körpers am Äquator

$$9{,}781 : 9{,}806 = 0{,}997^{kg}, \text{ am Pole } 9{,}831 : 9{,}806 = 1{,}003^{kg}.$$

Vorstehende Formeln und Zahlen gelten für die Höhe des Meeresspiegels. Die Fallbeschleunigung in einer Höhe von h Metern über dem Meeresspiegel wird dann genau genug gefunden, indem man nach S. 58 die vorstehenden Werthe noch mit $(1 - 2h : r)$, oder, wenn man $r = 6\,370\,000^{m}$ setzt, mit $(1 - 0{,}000\,000\,32\,h)$ multiplicirt. Dann wird (genau genug) $g_a = 9{,}806 - 0{,}025 \cos 2\alpha - 0{,}000\,003\,h$. Auf dem Brocken unter $51^0\,50'$ geographischer Breite und in etwa 1140^{m} Meereshöhe ist $g_a = 9{,}808$, in Ilsenburg am Fusse des Brocken (260^{m} Meereshöhe) 9,811. Der Unterschied ist also nur gering.