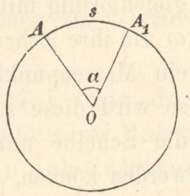
Pendelschwingungen von der Dauer $t = \pi \sqrt{\frac{l}{r}}$ entstehen. Die Richtung von r giebt zugleich die Stellung an, welche ein Fahrgast annehmen muss, um nicht umzufallen, wenn der Wagen eine nach rechts gerichtete beschleunigte Bewegung hat, oder wenn der nach links fahrende Wagen beim Anhalten eine Verzögerung p erfährt.

19. Ruhe in Bezug auf einen sich gleichmässig drehenden Raum.

Dreht sich ein Körper um eine feste Achse O (rechtwinklig zur Bildebene, Fig. 85), so ist die Bewegungsart schon durch die Bewegung eines einzigen Punktes oder auch eines beliebigen Drehungshalbmessers OA bestimmt. Der beliebige Punkt muss sich in einer Kreislinie bewegen und wenn $AA_1 = s$ die während der Zeit t zurückgelegte Wegeslänge ist, so wird $s = f(t)$ das Bewegungsgesetz sein, welches die Kreisbewegung des Punktes A im Abstande $OA = r$ von der Drehachse und damit auch die Drehbewegung des Körpers völlig bestimmt.

Fig. 85.

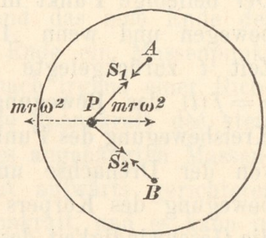


Es ist dann $v = ds : dt$ die Geschwindigkeit des Punktes A. Setzt man nun $s = AA_1 = r a$, so wird $a = {}^1\!/_r f(t)$ oder $a = \varphi(t)$ das Gesetz der Drehbewegung des Halbmessers OA. Ebenso wie man $v = ds : dt$ die Geschwindigkeit des Punktes A nennt, heisst $\omega = da : dt = \varphi'(t)$ die Winkelgeschwindigkeit der Drehung, d. h. der auf die Zeiteinheit (Sekunde) bezogene Drehungswinkel oder die Umfangsgeschwindigkeit im Abstande Eins von der Drehachse. Wie $s = r a$ ist auch $v = r\omega$ und $\omega = v : r$.

Beispiel: Dreht sich ein Körper in jeder Sekunde ein Mal gleichförmig um seine Achse, so beschreibt ein Punkt im Abstande r von der Achse den Weg $2 r \pi$ in jeder Sekunde, mithin ist $v = 2 r \pi$; ein Punkt im Abstande $r = 1$ also hat die Geschwindigkeit $\omega = v : r = 2\pi$; oder man kann auch sagen: Der Winkel 2π einer ganzen Umdrehung wird in jeder Sekunde zurückgelegt, daher ist $\omega = 2\pi$. Die Gradzahl eines Winkels ist nicht ein natürliches, sondern ein künstliches, willkürliches Maſs für die Grösse desselben. Die natürliche Einheit des Winkels ist derjenige Winkel α, dem bei einem Halbmesser Eins eine Bogenlänge Eins entspricht. Da nun einem Winkel von 180^0 nach dem meist üblichen Gradmafse eine halbe Umdrehung, d. h. ein Bogen π entspricht, so wird der Bogeneinheit eine Gradzahl $180 : \pi = 57{,}3$ entsprechen. Dass dieser Winkel etwas unter 60^0 liegen muss, ergiebt sich daraus, dass beim Winkel von 60^0 die Sehne gleich dem Halbmesser, der Bogen also etwas grösser als der Halbmesser ist.

Dreht sich ein Raum gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Achse und befindet sich in dem Raume ein Massenpunkt, und zwar in dem Abstande r von der Achse, in scheinbarer (relativer) Ruhe gegen den Raum, so macht er die Bewegung des Raumes thatsächlich mit, führt mithin eine gleichförmige Kreisbewegung mit der Geschwindigkeit $v = r\,\omega$ aus, wobei er (nach S. 61) eine Centripetalbeschleunigung $v^2 : r = r^2\omega^2 : r = r\omega^2$ erfährt. Dazu ist dann eine Centripetalkraft von der Grösse $m\,r\,\omega^2$ erforderlich. Liegt z. B. auf einer wagerechten Scheibe, die sich gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω um ihre lothrechte Achse dreht (Fig. 86), ein Massenpunkt, etwa eine kleine Kugel, so wird diese zur scheinbaren Ruhe gegen die Scheibe nur durch Kräfte gezwungen werden können, etwa durch die Spannkräfte S_1 und S_2 zweier bei A und B mit der Scheibe verbundenen Fäden. S_1 und S_2 werden dann so gross, dass ihre Mittelkraft von der Grösse $m\,r\,\omega^2$ und nach dem Mittelpunkte O gerichtet ist. Hierdurch sind S_1 und S_2 völlig bestimmt.

Fig. 86.



Diese Bedingung für die scheinbare Ruhe kann aber auch in ähnlicher Weise ausgedrückt werden wie die Bedingung für scheinbare Ruhe im fortschreitenden Raume. Haben nämlich die auf den Punkt wirkenden Kräfte S_1 und S_2 die Mittelkraft $m\,r\,\omega^2$, so würde das Entgegengesetzte dieser Kraft, also eine radial nach aussen gerichtete Kraft $-m\,r\,\omega^2$, mit S_1 und S_2 im Gleichgewichte sein. Diese zu den wirklichen Kräften S_1 und S_2 hinzuzufügende Kraft $-m\,r\,\omega^2$, welche mit ihnen im Gleichgewichte sein muss, entspricht dann genau der Ergänzungskraft $-m\,p$ (S. 84); sie ist, wie diese, keine wirklich vorhandene Kraft, sondern nur eine gedachte Ergänzungskraft der scheinbaren Bewegung bezw. Ruhe und heisst wegen ihrer Richtung Centrifugalkraft. Nach ihrer

Hinzufügung ist dann die Bedingung für den scheinbaren Ruhezustand dieselbe wie für wirkliche Ruhe, nämlich Gleichgewicht der Kräfte. Nur muss man sich hüten, die Centrifugalkraft als eine wirkliche Kraft anzusehen. In dem Falle der Figur 86 ist ja auch durchaus kein Körper nachzuweisen, der den Punkt mit der Kraft $m r \omega^2$ nach aussen triebe, vielmehr sind nur die Fadenkräfte wirksam, die den Punkt hindern, sich von dem Mittelpunkte O zu entfernen. Durchschnitte man die Fäden plötzlich, so würde der Punkt sich auch nicht etwa radial nach aussen bewegen, sondern vielmehr tangential zu seiner bisherigen Kreisbahn mit der Geschwindigkeit v weiter gehen.

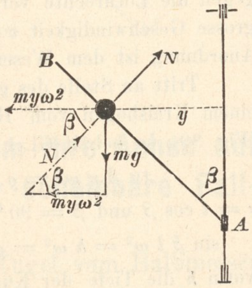
Von einer zum Schleifen dienenden, schnell umlaufenden Schmirgelscheibe fliegen die abgelösten, glühenden Metalltheilchen in tangentialer Richtung fort. Lässt man die Schnur einer Schleuder los, so fliegt der Stein aus derselben in tangentialer Richtung weiter.

Die Centrifugalkraft ist nur eine Hilfsvorstellung zur Vereinfachung mancher Untersuchungen.

Soll ein Massenpunkt gegen einen sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω gleichförmig drehenden Raum bei einem Abstande r von der Drehachse in scheinbarer Ruhe verbleiben, so müssen die auf ihn wirkenden Kräfte sich mit der als Ergänzungskraft hinzuzufügenden Centrifugalkraft $m r \omega^2$ im Gleichgewichte halten.

Beispiel: An einer lothrechten Achse (Fig. 87) befinde sich ein schräger Arm AB aus Draht, auf welchem eine kleine Kugel verschiebbar sei. Wirkt auf die Kugel die Schwere mg, so übt der Draht den Normalwiderstand N aus. Beide können sich aber allein nicht im Gleichgewichte halten, sondern es wird unter ihrer Einwirkung die Kugel auf dem Drahte beschleunigt abwärts gleiten. Ertheilt man aber der Achse und damit auch dem Arme eine Winkelgeschwindigkeit ω, so ist es nun möglich, dass die Kugel auf dem Arme sich nicht verschiebe. Die Bedingung dafür besteht darin, dass nach Hinzufügung der Centrifugalkraft $m y \omega^2$ zu den Kräften mg und N Gleichgewicht herrsche. Diese drei Kräfte bilden dann ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypnotheuse rechtwinklig zum Arme steht, also mit der Wagerechten den Winkel β bildet.

Fig. 87.



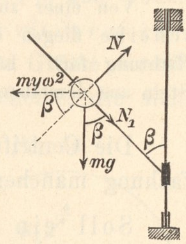
Daher muss $\operatorname{tg}\beta = mg : m y \omega^2$ oder

1) $$\operatorname{tg}\beta = \frac{g}{y\omega^2} \text{ und } \omega = \sqrt{\frac{g}{y \operatorname{tg}\beta}} \text{ oder } y = \frac{g}{\omega^2 \operatorname{tg}\beta} \text{ sein.}$$

Ist z. B. $\beta = 45^0$, $\operatorname{tg}\beta = 1$, $\omega = 2\pi$ (1 Umdrehung in der Sekunde), so ergiebt sich $y = \frac{9{,}81}{1 \cdot 4\pi^2} = 0{,}25^{\text{ m}}$; d. h. in $0{,}25^{\text{ m}}$ Abstand von der Achse würde die Kugel nunmehr auf dem Arme in scheinbarer Ruhe verbleiben. Zu jedem anderen Werthe y gehört aber auch ein anderes ω bei sonst gleich bleibenden Verhältnissen.

Um zu erkennen, wie die Kugel sich bei grösserer Winkelgeschwindigkeit, als Gl. 1 entspricht, bewegen würde, denken wir uns (Fig. 88) dicht oberhalb der Kugel einen Vorsteckstift angebracht, der eine Vergrösserung von y verhindert. Dieser Stift übt dann einen Widerstand N_1 in der Richtung des Armes nach unten aus, und es müssen sich nun die Kräfte N_1, N, mg und $m y \omega^2$ aufheben. Zerlegt man sämmtliche Kräfte in solche, welche in die Richtung des Armes fallen bezw. dazu rechtwinklig stehen, so muss die Kräftesumme in der Armrichtung Null sein, d. h.

Fig. 88.



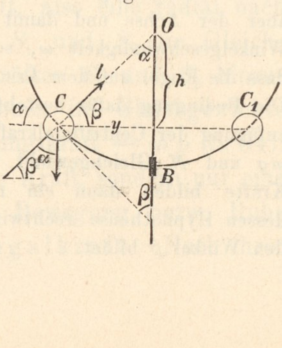
$$N_1 + mg\cos\beta - m y \omega^2 \sin\beta = 0\,,$$

mithin
$$N_1 = m y \omega^2 \sin\beta - mg\cos\beta$$
$$= mg\cos\beta\left(\frac{y\omega^2 \operatorname{tg}\beta}{g} - 1\right).$$

Ist nun $\omega^2 > \frac{g}{y \operatorname{tg}\beta}$, so wird $\omega^2 y \operatorname{tg}\beta > g$ und $N_1 > 0$; d. h. der Stift leistet der Kugel thatsächlich einen Gegendruck; mithin drückt die Kugel nach dem Gesetze der Wechselwirkung auch gegen den Stift, würde also, falls der Stift fehlte, auf dem Arme nach oben gleiten. Der Stiftdruck wird Null, wenn $\omega^2 y \operatorname{tg}\beta = g$, während ein kleineres ω ein negatives N_1, d. h. den nach oben gerichteten Widerstand eines unterhalb der Kugel angebrachten Stiftes verlangt, entsprechend der Neigung der Kugel, abwärts zu gleiten. Hiermit ist zugleich bewiesen, dass sich beim Kegelpendel (S. 69) der Neigungswinkel gegen die Lothrechte vergrössern wird, wenn man dem Massenpunkt eine zu grosse Geschwindigkeit v giebt, und umgekehrt. Denn die jetzt betrachtete Anordnung ist dem Wesen nach auch ein Kegelpendel.

Tritt an Stelle des geraden Armes ein nach einem Kreisbogen vom Halbmesser l geformter (Fig. 89), so behält Gl. 1 ihre Gültigkeit; es ist

Fig. 89.



$$\operatorname{tg}\beta\, y\, \omega^2 = g, \text{ oder, weil}$$

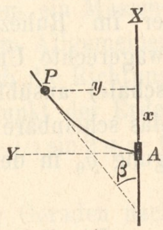
$y = l\cos\beta$ und $\beta = 90^0 - \alpha$,

$$\sin\beta\, l\, \omega^2 = h\,\omega^2 = g \text{ und } h = g : \omega^2,$$

worin h die Tiefe der Kugel unter O bedeutet; h ändert sich im umgekehrten Verhältnisse mit ω^2. Diese Vorrichtung wird als Schwungkugel-Regler (Centrifugal-Regulator) zur Regelung des Ganges von Maschinen benutzt. An der lothrechten Achse werden bei O zwei Gelenkstangen von der Länge l befestigt, welche die Kugeln tragen und ihnen zugleich die Kreisbahn CBC_1 vorschreiben. Bei einer Winkelgeschwindigkeit ω wird sich dann die Höhe $h = g : \omega^2$ bilden. Bei grösserer Drehgeschwindigkeit werden die Kugeln steigen, und umgekehrt. Durch geeignetes Gestänge überträgt man das Steigen bezw. Sinken der Kugeln auf die Kraftquelle, indem man diese vermindert bezw. verstärkt.

Soll die Kugel bei gleichbleibender Umdrehungsgeschwindigkeit an jeder Stelle des Armes in scheinbarer Ruhe verbleiben können, so muss die Form des Armes eine solche sein, dass die Gl. 1, S. 90: $\operatorname{tg}\beta\, y\, \omega^2 = g$ für jeden Werth von y Gültigkeit hat. Es muss also offenbar $\operatorname{tg}\beta$ mit y umgekehrt sich ändern. Bezieht man (Fig. 90) die gesuchte Kurve AP auf den Punkt A als Anfangspunkt, so ist $\operatorname{tg}\beta = dy : dx$, mithin $y\,\omega^2 \cdot dy : dx = g$ oder $2\,\omega^2 y\, dy = 2\, g \cdot dx$. Sind zwei Differentiale einander gleich, so dürfen sich deren unbestimmte Integrale nur um eine Konstante C unterscheiden, und man erhält

Fig. 90.



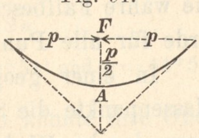
$$\omega^2 y^2 = 2\, gx + C.$$

Weil aber der Punkt A mit den Koordinaten $x = 0$ und $y = 0$ auch der Kurve angehört, so muss die Konstante in obiger Gleichung so bestimmt werden, dass für $x = 0$ auch $y = 0$ wird. Das giebt

$$0 = 0 + C \text{ oder } C = 0, \text{ und nach } y^2 \text{ aufgelöst: } y^2 = 2\left(\frac{g}{\omega^2}\right) x.$$

Diese Gleichung bedeutet eine Parabel, deren Achse mit der x-Achse zusammenfällt und deren Parameter $g : \omega^2$ ist. Für bestimmtes g entspricht jeder Drehgeschwindigkeit ω eine bestimmte Parabel als Gleichgewichtsform. Ist die der Form entsprechende Drehgeschwindigkeit vorhanden, so kann die Kugel an jeder Stelle des Drahtes in scheinbarer Ruhe verbleiben, ist die Geschwindigkeit $> \omega$, so strebt die Kugel fortgesetzt nach aussen, und umgekehrt.

Fig. 91.



Dreht sich die Achse mit dem Arme in jeder Sekunde 1 Mal um, so ist $\omega = 2\,\pi$ und der Parameter der Parabel $p = 9{,}81 : (4\,\pi^2) = 0{,}25\,^{\mathrm{m}}$ (Fig. 91).

20. Einfluss der Drehung der Erde um ihre Achse auf das scheinbare Gewicht bezw. die scheinbare Fallbeschleunigung.

Denken wir uns die Erde vorläufig als Kugel vom Halbmesser $r = 6\,370\,000\,^{\mathrm{m}}$ und betrachten wir einen Massenpunkt, der am Äquator auf der Erdoberfläche ruht, so ist dieser Zustand nur ein