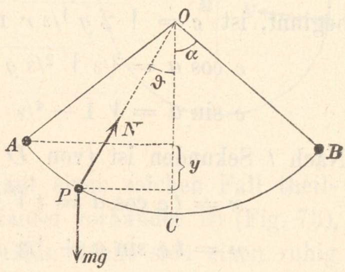
Daraus folgt, dass Parabel und Kreis an der Stelle D nicht allein den Punkt D und die Berührungsgerade gemein haben, sondern dass bei D auch der Krümmungshalbmesser ϱ der Parabel gleich demjenigen der Kreislinie, nämlich $\varrho = r$ sein muss. Berechnet man nach den Formeln der Differentialrechnung und der analytischen Geometrie den Krümmungshalbmesser der parabolischen Bahnlinie DE und setzt in der betreffenden Formel $x = 0$ (Punkt D), so ergiebt sich auch thatsächlich $\varrho = r$.

In ähnlicher Weise würde, wenn in Fig. 72 zwischen P und C die innere Röhrenwandung fehlte, der Massenpunkt bei P in eine parabolische Bewegung übergehen, die sich nicht bis zur Höhe des Punktes C erheben würde.

17. Einfaches (mathematisches) Pendel.

Wiederum möge ein Massenpunkt auf einem kreisförmig gebogenen Drahte in lothrechter Ebene unter Einwirkung der Schwere sich bewegen, jedoch möge der höchste Punkt, wo die Geschwindigkeit Null ist, im unteren Halbkreise liegen (Fig. 74). Der Halbmesser des Kreisbogens sei l. Die Anfangslage A sei durch den Winkel α, eine beliebige Zwischenlage P durch den Winkel ϑ bezeichnet. Der Massenpunkt wird an der Stelle B, der mit A in gleicher Höhe liegt, wieder die Geschwindigkeit Null haben, wird nach A zurückgehen und den Bogen AB und BA fortgesetzt durchlaufen, symmetrisch zur tiefsten Lage C. Solche Bewegung heisst Schwingung. In der beliebigen Lage P ist die Geschwindigkeit

Fig. 74.



1) $$v = \sqrt{2\,gy} = \sqrt{2\,gl\,(\cos\vartheta - \cos\alpha)}\,.$$

Es muss also nach Gl. 1, S. 66 sein:

$$\frac{v^2}{l} = 2\,g\,(\cos\vartheta - \cos\alpha) = \frac{N - mg\cos\vartheta}{m} \quad \text{oder}$$

2) $$N = mg\,(3\cos\vartheta - 2\cos\alpha)\,.$$

Da ϑ und α beide kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ sind, so wird für $\vartheta = \alpha$ $N_{min} = mg\cos\alpha$, für $\vartheta = 0$ aber $N_{max} = mg\,(3 - 2\cos\alpha)$.

Für $a = 48^0$ und $\cos a = {}^2/_3$ wird z. B. $N_{min} = {}^2/_3\, mg$; $N_{max} = {}^5/_3\, mg$.

Da N stets positiv ist, kann es durch die Spannkraft eines in O befestigten Fadens, an dem der Massenpunkt hängt, geleistet werden. In dieser Form heisst die Vorrichtung ein Pendel, u. zw. ein einfaches oder mathematisches, wenn man die Masse des Fadens vernachlässigt und einen einfachen Massenpunkt annimmt. Ein wirkliches (physisches) Pendel mit Rücksicht auf die körperliche Ausdehnung wird später untersucht werden. Betrachten wir die Bewegung von A aus, so ist die Wegeslänge in t Zeiteinheiten $s = AP = l\,(a - \vartheta)$, daher

$$ds = -l\,d\vartheta = v\,dt = dt\sqrt{2\,gl\,(\cos\vartheta - \cos a)}\,;$$

hieraus folgt

$$dt = -\frac{l\,d\vartheta}{v} = -\frac{l\,d\vartheta}{\sqrt{2gl\,(\cos\vartheta - \cos a)}} = -\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{d\vartheta}{\sqrt{2\,(\cos\vartheta - \cos a)}}.$$

Dies ist die Zeit für die Zunahme des Winkels ϑ um $d\vartheta$. Wird nun in der Zeit t der Bogen AP zurückgelegt, so muss

3) $$t = -\sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_a^\vartheta \frac{d\vartheta}{\sqrt{2\,(\cos\vartheta - \cos a)}} \quad \text{sein.}$$

Für $t = 0$ ist nämlich $\vartheta = a$, für $t = t$ aber $\vartheta = \vartheta$. Die Integration lässt sich in geschlossener Form nur ausführen, wenn man sich mit einer Annäherung begnügt, indem man nur k l e i n e Winkel a berücksichtigt. Es ist $\cos\vartheta = 1 - 2\sin^2({}^1/_2\,\vartheta)$, und wenn man den Sinus von ${}^1/_2\,\vartheta$ mit dem Bogen ${}^1/_2\,\vartheta$ vertauscht,

$$\cos\vartheta = 1 - 2\,({}^1/_4\,\vartheta^2) = 1 - {}^1/_2\,\vartheta^2;$$

ebenso $\cos a = 1 - {}^1/_2\,a^2$, mithin $2\,(\cos\vartheta - \cos a) = a^2 - \vartheta^2$. Also, wenn man noch in Gl. 3 die Grenzen vertauscht und daher gleichzeitig das Zeichen $-$ durch $+$ ersetzt,

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_\vartheta^a \frac{d\vartheta}{\sqrt{a^2 - \vartheta^2}}. \quad \text{Dies giebt aber}$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\left[\text{arc sin}\,\frac{\vartheta}{a}\right]_\vartheta^a$$

und weil arc sin $1 = {}^1\!/_2\,\pi$ ist,

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\left\{{}^1\!/_2\,\pi - \text{arc sin}\,\frac{\vartheta}{\alpha}\right\}.$$

Dies ist die Zeit zum Durchlaufen des Bogens AP.

Um zu ermessen, wie gross der Fehler der Annäherung ist, nehme man $\vartheta = 5^0$ an, dann ist $\cos\vartheta = \cos 5^0 = 0{,}996\,195$. Es ist aber $\vartheta = \text{arc}\,5^0 = \frac{5 \cdot \pi}{180} = 0{,}087\,266$, daher $1 - {}^1\!/_2\,\vartheta^2 = 0{,}996\,192$; es kommt also erst in der 6ten Decimale eine Abweichung vor.

Die Dauer der Schwingung von A nach B ist offenbar doppelt so gross wie die von A nach C (für $\vartheta = 0$). mithin wird die Dauer t_1 einer einfachen Schwingung von A nach B

$$4) \qquad t_1 = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\,({}^1\!/_2\,\pi) = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

was man auch erhält, wenn man zwischen den Grenzen $-\alpha$ und $+\alpha$ integrirt. Es ist für Meter und Sekunden und für $g = 9{,}81$: $\quad \frac{\pi}{\sqrt{g}} = 1{,}003$, mithin

$$t_1 = 1{,}003\,\sqrt{l} \quad \text{oder annähernd } t_1 = \sqrt{l}.$$

Für $l = 1^{\text{m}}$ wird $t_1 = 1{,}003$ Sekunden, oder ein Pendel von 1^{m} Länge macht in der Stunde 3589 einfache Schwingungen. $t_1 = 1$ giebt $l = \frac{g}{\pi^2} = 0{,}994^{\text{m}}$ als Länge des Sekundenpendels.

Da die Länge des Sekundenpendels mit g verhältnisgleich ist, so muss diese Länge an der Oberfläche der Sonne bezw. des Mondes (nach S. 59) 30 bezw. ${}^1\!/_6$ Mal so lang sein.

Man kann die Gleichung 4 auch schreiben $g = l\,\frac{\pi^2}{t^2}$, kann also mit Hülfe von Pendelschwingungen aus der gemessenen Pendellänge l und der beobachteten Dauer t einer Schwingung die Fallbeschleunigung an der betreffenden Stelle der Erde berechnen.

18. Scheinbare (relative) Bewegung eines Massenpunktes in Bezug auf einen fortschreitenden Raum.

Die Bewegung eines körperlichen Gebildes, eines Raumes heisst fortschreitend, wenn alle Theile desselben stets parallel ihrer