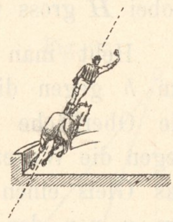
überhöhung nicht allein dem hier besprochenen Zwecke dienen, sondern zugleich noch andere Verhältnisse berücksichtigen muss.

Fig. 69.

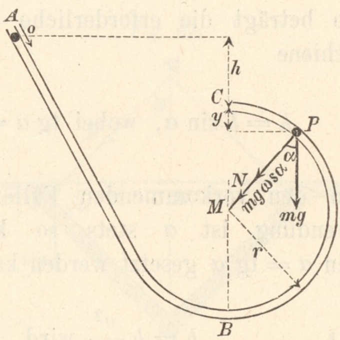


Beispiel: Auf demselben Grunde beruht die Nothwendigkeit der Schrägstellung eines Kunstreiters (Fig. 69), welcher, auf dem Pferde stehend oder sitzend, im Kreise vom Halbmesser r mit einer Geschwindigkeit v sich bewegt. Für $r = 5$ m, $v = 3$ m/s. wird $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3^2}{9{,}81 \cdot 5} = 0{,}18$; α etwa $= 10^0$. Wächst aber die Geschwindigkeit auf $v = 5$, so wird $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}51$; $\alpha = 27^0$.

16. Vorgeschriebene Bewegung in lothrechtem Halbkreise.

BPC (Fig. 70) sei eine nach einem Halbkreise vom Halbmesser r gebogene Röhre in lothrechter Ebene. Bei B schliesse sich eine Röhre AB von beliebiger Form an; A liege um h über dem Punkte C. Lässt man nun bei A einen Massenpunkt mit der Geschwindigkeit Null in die Röhre gelangen und gleitet er darin ohne Reibung und ohne Klemmen, so tritt er bei B mit einer Geschwindigkeit $v_{max} = \sqrt{2g(h + 2r)}$ in den Halbkreis, weil er von A bis B die Höhe $h + 2r$ durchsunken hat. Von B aus aufwärts steigend, verliert er an Geschwindigkeit, und zwar ist

Fig. 70.



diese an einer beliebigen Stelle P (bestimmt durch den Winkel α) noch $v = \sqrt{2g(h + y)} = \sqrt{2g(h + r - r\cos\alpha)}$. Der Normalwiderstand der Röhre sei N (nach innen gerichtet); dann zerlegt sich mg in $mg \sin\alpha$ (tangential und verzögernd) und $mg \cos\alpha$ (centripetal). Es wird $\frac{v^2}{r} = \frac{N + mg\cos\alpha}{m}$, mithin

$$1) \qquad N = \frac{mv^2}{r} - mg\cos\alpha = mg\left(\frac{2h}{r} + 2 - 3\cos\alpha\right).$$

Für $\alpha = 0$ (Punkt C) wird $\cos\alpha$ möglichst gross, nämlich $= 1$, daher N möglichst klein, nämlich

$$2)\qquad N_{min} = mg\left(\frac{2h}{r} - 1\right);$$

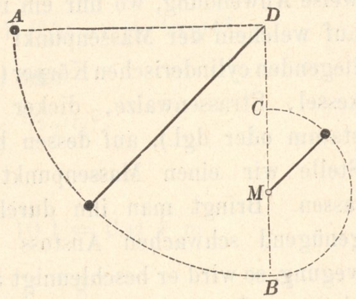
für $\alpha = \pi$ (Punkt B) wird $\cos\alpha$ möglichst klein, nämlich $= -1$, und N möglichst gross, nämlich

$$N_{max} = mg\left(\frac{2h}{r} + 5\right).$$

Im Allgemeinen kann N positiv oder negativ werden. Ein positives N bedeutet einen nach innen gerichteten Widerstand, der von der äusseren Wand der Röhre zu leisten ist, und umgekehrt. Überall wo $N > 0$, muss die äussere Wandung wirken; gegen diese legt sich der Massenpunkt, während die innere Wand überflüssig ist. Soll an allen Stellen $N \geqq 0$ sein, so muss nach Gl. 2 $h \geqq {}^1\!/_2\, r$ sein. In diesem Falle ist, statt einer völligen Röhre, eine einfache Rinne oder ein äusserer Cylindermantel hinreichend, welcher den Massenpunkt hindert, sich von der Kreisbahn tangential nach aussen hin zu entfernen.

Beispiel: Ein stets positives N, welches den Punkt nur hindert, nach aussen aus der vorgeschriebenen Bahn hinauszutreten, kann durch einen einfachen Faden geleistet werden. Damit N auch an der höchsten Stelle noch > 0 bleibe, möge etwa $h = r$ gemacht werden. Dann benutzt man einen Faden von der Länge $3\,r$ (Fig. 71) und befestigt diesen in D. Der Faden wird in der Lage DA wagerecht ausgestreckt; lässt man nun den Massenpunkt los, so beschreibt er den Viertelkreis AB. In M muss nun ein vorstehender dünner Stift sich befinden, damit die oberen zwei Drittel der Fadenlänge in der Lage DM zur Ruhe kommen, das untere Drittel r des Fadens aber sich um M drehe und den Punkt zur Bewegung BC zwinge. Ist der Massenpunkt unmittelbar rechts von B, so wird die Fadenspannkraft $N_{max} = mg\,(2 + 5) = 7\,mg$, d. h. 7 mal so gross, als wenn der Punkt ruhend an dem Faden hinge. Bei der Bewegung nach C hin vermindert sich die Spannkraft auf $N_{min} = mg\,(2 - 1) = mg$. Der Massenpunkt wird sich, nachdem er C erreicht hat, in dem Kreise weiter bewegen (symmetrisch zu CB), und es würde sich der Faden allmählich auf den Stift bei M aufwickeln. Wenn man aber in dem Augenblicke, wo der

Fig. 71.



Massenpunkt zum ersten Male wieder in B angelangt ist, den Stift M entfernt oder den Faden vom Stifte abschiebt, so wird der Massenpunkt symmetrisch zu BA einen Viertelkreis vom Halbmesser $3\,r$ beschreiben und auf der rechten Seite sich bis zu der Höhe des Punktes A wieder erheben.

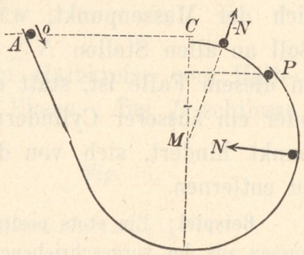
Liegt (Fig. 72) der Anfangspunkt A der Bewegung in gleicher Höhe mit C, ist die Überhöhung $h = 0$, so wird nach Gl. 1 (S. 72)

$$N = mg\;(2 - 3\cos\alpha);$$

$$N_{max} = mg \cdot 5;\; N_{min} = -\,mg.$$

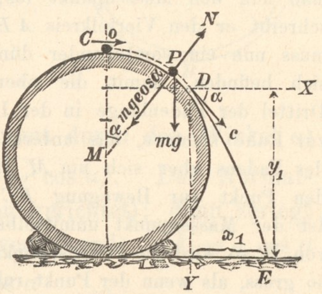
Mithin wird im oberen Theile des Kreises N negativ, nach aussen gerichtet, d. h der Massenpunkt drückt gegen die innere Wandung der Röhre. Der Übergang aus dem Positiven ins Negative erfolgt bei $\cos\alpha = {}^2\!/_3$; $\alpha = 48^0$; hier ist $N = 0$. Diese Stelle P ist am einfachsten durch Zeichnung zu finden; man theile MC in 3 gleiche Theile und ziehe durch den oberen Theilpunkt eine Wagerechte, so bestimmt diese den Punkt P. Unterhalb desselben ist ein äusserer, oberhalb ein innerer Mantel erforderlich.

Fig. 72.



Diese Betrachtungen finden auch auf einen solchen Fall theilweise Anwendung, wo nur ein innerer Mantel vorhanden ist (Fig. 73), auf welchem der Massenpunkt gleitet. Man denke sich einen ruhig liegenden cylinderischen Körper (Dampfkessel, Strassenwalze, dicker Baumstamm oder dgl.), auf dessen höchster Stelle wir einen Massenpunkt ruhen lassen. Bringt man ihn durch einen genügend schwachen Anstoss in Bewegung, so wird er beschleunigt abwärts gleiten. Der Anstoss soll so gering sein, dass die Anfangsgeschwindigkeit bei C annähernd = Null gesetzt werden kann. An einer Stelle P ist dann die

Fig. 73.



Geschwindigkeit $v = \sqrt{2\,gy} = \sqrt{2\,g\,(r - r\cos\alpha)}$. Der Normalwiderstand N kann unter den vorliegenden Umständen nur nach aussen gerichtet auftreten. Daher muss jetzt $\frac{v^2}{r} = \frac{mg\cos\alpha - N}{m}$, mithin $N = mg\cos\alpha - \frac{mv^2}{r} = mg\,(3\cos\alpha - 2)$ sein. Für $\cos\alpha = {}^2/_3$ oder $\alpha = 48^0$ wird wiederum $N = 0$; an dieser Stelle drückt der Punkt nicht mehr gegen den cylindrischen Körper. Für $\alpha > 48^0$ oder $\cos\alpha < {}^2/_3$ müsste zur Fortsetzung der kreisförmigen Bewegung ein nach innen gerichteter Druck N auftreten; da dieser aber nicht geleistet werden kann, so wird der Punkt von dieser Stelle an ($\alpha = 48^0$) der kreisförmigen Bahnlinie nicht mehr folgen, es wird der Normalwiderstand zu wirken aufhören und der Punkt sich unter alleiniger Einwirkung der Schwere parabolisch weiter bewegen, sich also von dem walzenförmigen Körper trennen. Es soll die weitere Bewegung untersucht und namentlich festgestellt werden, wann und wo der Punkt bei E den Boden erreicht.

Die Geschwindigkeit, mit der diese Bewegung im Punkte D beginnt, ist $c = \sqrt{2g\,{}^1/_3\,r}$ mit den Seitengeschwindigkeiten

$$c\cos\alpha = {}^2/_3\sqrt{{}^2/_3\,gr} = \sqrt{{}^8/_{27}\,gr} = 1{,}7\sqrt{r}$$

$$c\sin\alpha = \sqrt{1 - {}^4/_9}\sqrt{{}^2/_3\,gr} = \sqrt{{}^{10}/_{27}\,gr} = 1{,}9\sqrt{r}.$$

Nach t Sekunden ist (von D als Anfangspunkt gerechnet)

$$x = tc\cos\alpha = t\sqrt{{}^8/_{27}\,gr}$$

$$y = tc\sin\alpha + {}^1/_2\,gt^2 = t\sqrt{{}^{10}/_{27}\,gr} + {}^1/_2\,gt^2.$$

Für den Endpunkt E gilt $y_1 = {}^5/_3\,r$ oder

$$y_1 = {}^5/_3\,r = t_1\sqrt{{}^{10}/_{27}\,gr} + {}^1/_2\,gt_1^{\,2}.$$

Daraus erhält man

$$t_1 = \sqrt{\frac{r}{27\,g}}\,(10 - \sqrt{10}) = 0{,}42\sqrt{r}$$

und hiermit $x_1 = (10 - \sqrt{10})\sqrt{\frac{r}{27\,g}\,\frac{8}{27}\,gr} = 0{,}716\,r.$

Der Abstand des Endpunktes E von der Lothrechten CM wird dann

$$r\sqrt{{}^5/_9} + x_1 = 1{,}46\,r.$$

Der vorgeschriebenen kreisförmigen Bewegung und der freien parabolischen Bewegung entsprechen im Punkte D dieselben Kräfte.

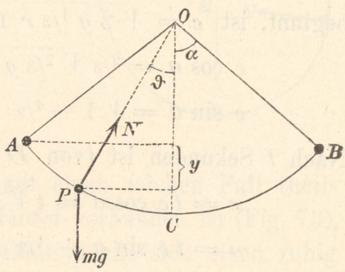
Daraus folgt, dass Parabel und Kreis an der Stelle D nicht allein den Punkt D und die Berührungsgerade gemein haben, sondern dass bei D auch der Krümmungshalbmesser ϱ der Parabel gleich demjenigen der Kreislinie, nämlich $\varrho = r$ sein muss. Berechnet man nach den Formeln der Differentialrechnung und der analytischen Geometrie den Krümmungshalbmesser der parabolischen Bahnlinie DE und setzt in der betreffenden Formel $x = 0$ (Punkt D), so ergiebt sich auch thatsächlich $\varrho = r$.

In ähnlicher Weise würde, wenn in Fig. 72 zwischen P und C die innere Röhrenwandung fehlte, der Massenpunkt bei P in eine parabolische Bewegung übergehen, die sich nicht bis zur Höhe des Punktes C erheben würde.

17. Einfaches (mathematisches) Pendel.

Wiederum möge ein Massenpunkt auf einem kreisförmig gebogenen Drahte in lothrechter Ebene unter Einwirkung der Schwere sich bewegen, jedoch möge der höchste Punkt, wo die Geschwindigkeit Null ist, im unteren Halbkreise liegen (Fig. 74). Der Halbmesser des Kreisbogens sei l. Die Anfangslage A sei durch den Winkel α, eine beliebige Zwischenlage P durch den Winkel ϑ bezeichnet. Der Massenpunkt wird an der Stelle B, der mit A in gleicher Höhe liegt, wieder die Geschwindigkeit Null haben, wird nach A zurückgehen und den Bogen AB und BA fortgesetzt durchlaufen, symmetrisch zur tiefsten Lage C. Solche Bewegung heisst Schwingung. In der beliebigen Lage P ist die Geschwindigkeit

Fig. 74.



1) $$v = \sqrt{2gy} = \sqrt{2gl(\cos\vartheta - \cos\alpha)}.$$

Es muss also nach Gl. 1, S. 66 sein:

$$\frac{v^2}{l} = 2g(\cos\vartheta - \cos\alpha) = \frac{N - mg\cos\vartheta}{m} \quad \text{oder}$$

2) $$N = mg(3\cos\vartheta - 2\cos\alpha).$$

Da ϑ und α beide kleiner als $1/2\,\pi$ sind, so wird für $\vartheta = \alpha$ $N_{min} = mg\cos\alpha$, für $\vartheta = 0$ aber $N_{max} = mg(3 - 2\cos\alpha)$.