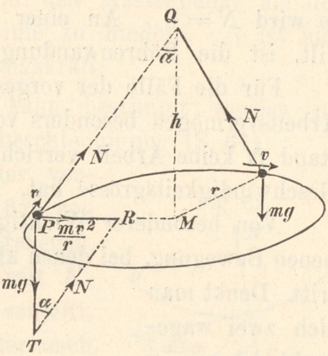
ganz wie bei der freien Fallbewegung. Ob der Punkt in freier (gerader oder parabolischer) Bahnlinie oder in beliebig gekrümmter vorgeschriebener Bahnlinie sich bewegt, ist für die Geschwindigkeitsgrösse gleichgültig. Jedes Mal, wenn er um h sich gesenkt hat, wird das Quadrat der Geschwindigkeit um $2\,g\,h$ gewachsen sein. Bei aufwärts gerichteter Bewegung gilt $v^2 = c^2 - 2\,g\,h$.

15. Vorgeschriebene Bewegung in wagerechtem Kreise.

Die vorgeschriebene Bahn, etwa aus einem kreisförmig gebogenen Drahte gebildet (Fig. 64), liege in wagerechter Ebene; r sei der Halbmesser. Als bewegende Kraft wirke die Schwere $m\,g$. Die Bewegung kann nur eine gleichförmige sein, weil die Schwere hier keine Arbeit verrichtet. Für diese Bewegung ist eine Centripetalkraft $m\,v^2 : r$, von P nach M gerichtet, erforderlich; folglich muss zu $m\,g$ ein derartiger Normalwiderstand N hinzutreten, dass die Mittelkraft beider $PR = m\,v^2 : r$ wird. Ist $PT = m\,g$, so wird die Strecke TR das gesuchte N darstellen. Selbstverständlich ist dann N an den Punkt P parallel zu verschieben. N weicht von der Lothrechten um einen Winkel α ab, für welchen gilt

Fig. 64.



$$1) \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{m\,v^2}{r\,m\,g} = \frac{v^2}{g\,r}.$$

N kann auch aufgefasst werden als Mittelkraft aus einem von P nach M gerichteten Drucke $= m\,v^2 : r$ und einem lothrecht aufwärts gerichteten von der Grösse $m\,g$. Nach dem Gesetze der Wechselwirkung übt der Massenpunkt auf die Bahn dieselben Kräfte in entgegengesetztem Sinne aus, drückt also mit der Kraft $m\,v^2 : r$ nach aussen, mit der Kraft $m\,g$ lothrecht nach unten. Die Kräftefigur PTR liegt stets in einer lothrechten Ebene, läuft aber mit dem Massenpunkte um und dreht sich dabei um eine Lothrechte durch M als Achse. Die Richtungslinie von N geht dann durch den festen Punkt Q dieser Achse, dessen Höhe h dadurch bestimmt ist, dass bei Q der Winkel α sich wieder findet. Es muss dann sein (mit Rücksicht auf Gleichung 1):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{h} = \frac{v^2}{g\,r}, \text{ mithin}$$

$$2)\qquad h = \frac{g\,r^2}{v^2}.$$

Die Kraft N können wir nun, nachdem wir ihre Bedingungen erkannt haben, auch noch in anderer Weise ausüben als durch den Draht. Wir können in Q einen völlig biegsamen und undehnbaren Faden befestigen, diesen in solcher Weise gerade ausspannen, dass h und r seine Projektionen sind, und bei P ihn mit dem Massenpunkte verbinden. Ertheilen wir dann dem Massenpunkte eine Geschwindigkeit

$$3)\qquad v = r\sqrt{\frac{g}{h}} = \sqrt{g\,r\operatorname{tg}\alpha}$$

in wagerechter Richtung und zugleich rechtwinklig zum ausgespannten Faden, so sind die Bedingungen, welche ursprünglich durch den Draht erzwungen wurden, auch mittels dieser Fadenaufhängung erfüllt; es wird also der wagerechte Kreis vom Halbmesser r gleichmässig mit der Geschwindigkeit v durchlaufen werden.

Der Draht erzwingt auch bei anderer, etwa grösserer, Geschwindigkeit v_1 eine gleichförmige Kreisbewegung, doch wird dann $\operatorname{tg}\alpha$ (nach Gl. 1) grösser. Bei der weniger bestimmten Fadenaufhängung ist aber genau diejenige Geschwindigkeit v erforderlich, die Gl. 3 entspricht. Was erfolgt, wenn die abweichende Geschwindigkeit v_1 dem Punkte ertheilt wird, soll weiter unten (S. 90) noch erörtert werden.

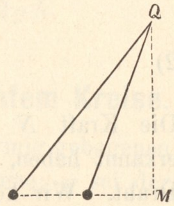
Da der Faden eine Kegelfläche beschreibt, so heisst diese Vorrichtung ein K e g e l p e n d e l. Bei einem Umlaufe muss der Punkt die Wegeslänge $2\,r\,\pi$ zurücklegen, wozu eine Zeit t erforderlich ist, welche sich mit Hülfe von Gl. 3 zu

$$4)\qquad t = \frac{2\,r\,\pi}{v} = 2\,\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

ergiebt. Hiernach ist die U m l a u f s z e i t t eines Kegelpendels nur von seiner Vertikalprojektion, der Höhe h, abhängig. Mehrere in Q

befestigte Kegelpendel gleicher Höhe h (Fig. 65) werden mithin dieselbe Umlaufszeit haben. Es rührt dies daher, dass bei gleichem h die erforderlichen Geschwindigkeiten v nach Gl. 3 in gleichem Verhältnisse mit r, also auch mit den Wegeslängen eines Umlaufes, wachsen.

Fig. 65.



Beispiel: Ist $r = 1^m$; $h = 1^m$, so muss

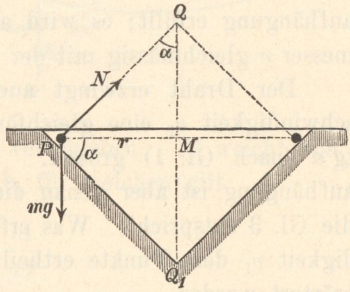
$$v = 1\sqrt{\frac{9{,}81}{1}} = 3{,}13\ ^m/s.,$$

entsprechend einer Fallhöhe $r^2 : 2h = {}^1/_2\ ^m$ gemacht werden.

Es ist dann die Umlaufszeit $t = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9{,}81}} = 2{,}01$ Sekunden.

Anstatt durch die Spannkraft eines Fadens kann die Kraft N auch durch den Gegendruck einer festen Fläche ausgeübt werden; letztere muss an der Stelle der Berührung mit dem Massenpunkte rechtwinklig zur Richtung von N stehen, mithin von der Wagerechten um den durch Gleichung 1 bestimmten Winkel abweichen. Dieser Bedingung würde genügt werden durch eine Kugelfläche mit dem Mittelpunkte Q (Fig. 64) und dem Halbmesser QP, welche der unmittelbarste Ersatz des Fadens QP sein würde. Eine Kegelfläche mit der Spitze in Q_1 (Fig. 66) erfüllt die Bedingung aber ebenfalls, sobald ihre Seiten mit der Wagerechten den Winkel α bilden. Soll der Massenpunkt in solchem Trichter eine wagerechte Kreisbewegung vom Halbmesser r ausführen, so muss ihm eine wagerechte Anfangsgeschwindigkeit rechtwinklig zu MP von der Grösse $v = \sqrt{g\,r\,\mathrm{tg}\,\alpha}$ (Gl. 3) ertheilt werden.

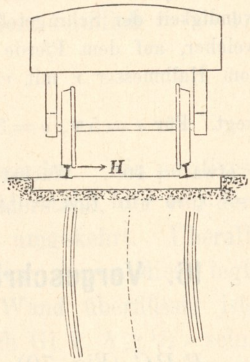
Fig. 66.



Einer solchen Kegelfläche müssen auch die Oberkanten der beiden Schienen eines Eisenbahngleises angehören, wenn die Mittellinie desselben in einem wagerechten Kreisbogen vom Halbmesser r liegt.

Würden die Schienen nämlich in gleicher Höhe liegen (Fig. 67), so könnte die erforderliche Centripetalkraft $m v^2 : r$ nur von dem seitlichen Gegendrucke H der äusseren Schiene gegen den Spurkranz des Rades geliefert werden. Einer solchen Aufgabe ist aber die Schiene bei grösserer Geschwindigkeit, wobei H gross wird, nicht gewachsen.

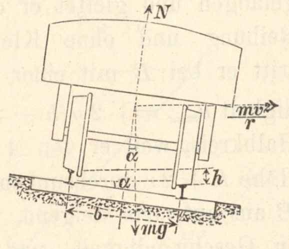
Fig. 67.



Hebt man nun die äussere Schiene um h gegen die innere (Fig. 68), so dass die Oberfläche des Schienengleises um α gegen die Wagerechte geneigt ist, so leistet das Gleis einen Normalwiderstand N, der um α von der Lothrechten abweicht und mit dem Gewicht mg die nöthige Centripetalkraft $mv^2 : r$ liefert. Ein Seitendruck der Schienen gegen die Spurkränze tritt nun nicht ein, wenn die Geschwindigkeit v dem Winkel α entspricht, d. h. wenn $v = \sqrt{g r \operatorname{tg} \alpha}$ ist.

Ist b die Entfernung der beiden Schienen eines Gleises (Fig. 68), so beträgt die erforderliche Überhöhung der äusseren Kurvenschiene

Fig. 68.



$$h = b \sin \alpha, \quad \text{wobei } \operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{g r}.$$

In den vorkommenden Fällen der Anwendung ist α stets so klein, dass $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha$ gesetzt werden kann, so dass

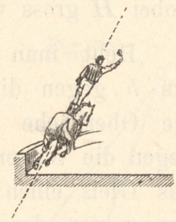
5) $$h = b \frac{v^2}{g r} \text{ wird.}$$

Beispiel: Für eine Eisenbahnkurve von 600 m Halbmesser, $b = 1{,}5$ m Schienenentfernung ergiebt sich für 20 m sekundl. Geschwindigkeit

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{20^2}{9{,}81 \cdot 600} = 0{,}068; \ \alpha = 3^0 54'; \ \sin \alpha = 0{,}068; \ h = 1{,}5 \cdot 0{,}068 = 0{,}102 \text{ m}.$$

Diese Formel ist beim Eisenbahnbau lange benutzt worden; in neuerer Zeit hat man statt ihrer eine einfache Erfahrungsformel gewählt, was darin seine Begründung findet, dass die Schienen-überhöhung nicht allein dem hier besprochenen Zwecke dienen, sondern zugleich noch andere Verhältnisse berücksichtigen muss.

Fig. 69.

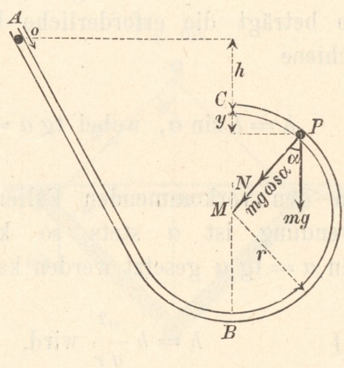


Beispiel: Auf demselben Grunde beruht die Nothwendigkeit der Schrägstellung eines Kunstreiters (Fig. 69), welcher, auf dem Pferde stehend oder sitzend, im Kreise vom Halbmesser r mit einer Geschwindigkeit v sich bewegt. Für $r = 5^{\mathrm{m}}$, $v = 3^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$. wird $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3^2}{9{,}81 \cdot 5} = 0{,}18$; α etwa $= 10^{0}$. Wächst aber die Geschwindigkeit auf $v = 5$, so wird $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}51$; $\alpha = 27^{0}$.

16. Vorgeschriebene Bewegung in lothrechtem Halbkreise.

BPC (Fig. 70) sei eine nach einem Halbkreise vom Halbmesser r gebogene Röhre in lothrechter Ebene. Bei B schliesse sich eine Röhre AB von beliebiger Form an; A liege um h über dem Punkte C. Lässt man nun bei A einen Massenpunkt mit der Geschwindigkeit Null in die Röhre gelangen und gleitet er darin ohne Reibung und ohne Klemmen, so tritt er bei B mit einer Geschwindigkeit $v_{max} = \sqrt{2g(h + 2r)}$ in den Halbkreis, weil er von A bis B die Höhe $h + 2r$ durchsunken hat. Von B aus aufwärts steigend, verliert er an Geschwindigkeit, und zwar ist diese an einer beliebigen Stelle P (bestimmt durch den Winkel α) noch $v = \sqrt{2g(h + y)} = \sqrt{2g(h + r - r\cos\alpha)}$. Der Normalwiderstand der Röhre sei N (nach innen gerichtet); dann zerlegt sich mg in $mg\sin\alpha$ (tangential und verzögernd) und $mg\cos\alpha$ (centripetal). Es wird $\frac{v^2}{r} = \frac{N + mg\cos\alpha}{m}$, mithin

Fig. 70.



$$1) \qquad N = \frac{mv^2}{r} - mg\cos\alpha = mg\left(\frac{2h}{r} + 2 - 3\cos\alpha\right).$$