Kräfte im Gleichgewicht sein sollen. Im Gleichgewichts-Zustande müssen also die Kräfte ein geschlossenes Krafteck bilden.

Liegen die Kräfte in einer gemeinsamen Ebene, so legt man zweckmässig auch die x- und y-Achse in diese Ebene. Dann werden die Neigungswinkel γ gegen die z-Achse sämmtlich zu 90^0 und $K \cos \gamma$ durchweg Null. Ausserdem wird dann $\cos \beta = \sin \alpha$ und die Gleichgewichts-Bedingungen beschränken sich auf

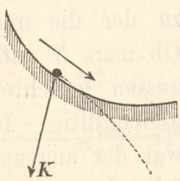
$$\Sigma K \cos \alpha = 0 \text{ und } \Sigma K \sin \alpha = 0.$$

Liegen die x- und y-Achse bezw. wagerecht und lothrecht, so sagt man auch: Die Summe aller wagerechten Seitenkräfte muss Null sein und die Summe aller lothrechten Seitenkräfte ebenfalls.

14. Bewegung auf vorgeschriebener Bahn.

Wirkt auf einen Massenpunkt eine gegebene Kraft K ein, so wird er bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit c eine bestimmte Bewegung ausführen müssen, die z. B. parabolisch ist, wenn K gleichbleibend nach Grösse und Richtung.

Fig. 61.



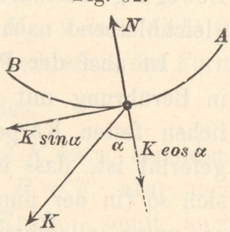
Ist aber der Punkt nicht völlig frei, sondern in Berührung mit der Oberfläche eines unbeweglichen festen Körpers (Fig. 61), welcher derartig geformt ist, dass er den Massenpunkt verhindert, sich so (in der punktirten Bahn) zu bewegen, wie es unter alleiniger Wirkung von K geschehen müsste, so übt die feste Oberfläche einen Einfluss auf die Bewegung des Massenpunktes aus, und einen solchen Einfluss haben wir (nach S. 31) als eine Kraft aufzufassen, welche als zweite Kraft zu K hinzutritt und ihrer Grösse nach von K in gewisser Weise abhängig ist.

Wir benutzen den Erfahrungssatz: Vollkommen glatte Körper, die sich ohne ein Bindemittel berühren, können an jeder Berührungsstelle nur einen gegenseitigen Druck, dessen Richtung rechtwinklig zur Berührungsebene steht, also einen gegenseitigen Normaldruck, auf einander ausüben. Völlig glatte Körper giebt es freilich nicht; obiger Satz trifft aber um so mehr zu, je grösser der Grad der Glätte wird, und umgekehrt. Die bezeichnete Kraft heisst der Normalwiderstand der vorgeschriebenen Fläche und wird mit N bezeichnet.

Noch enger beschränkt ist die Bewegung des Massenpunktes, wenn ihm eine bestimmte Linie als Bahn vorgeschrieben wird, z. B. durch eine Röhre, welche den als Massenpunkt gedachten Körper derartig umschliesst, dass er sich nur längs der Mittellinie der Röhre bewegen kann, oder durch einen steifen glatten Draht, auf dem der Massenpunkt mittels einer Bohrung geführt wird. Beide Vorrichtungen sind geeignet, nach allen Richtungen innerhalb einer Normalebene zur vorgeschriebenen Bahnlinie den Widerstand N zu leisten. Diese Kraft N tritt stets mit derjenigen Richtung und Grösse auf, die erforderlich sind, um den Massenpunkt an dem Verlassen der vorgeschriebenen Bahnlinie zu hindern. N ist hiernach eine bedingte oder eine Bedingungskraft.

Der Normalwiderstand N kann bestimmt werden mit Hülfe der Formel für die Centripetalbeschleunigung (S. 61).

Fig. 62.



Ein Punkt bewege sich auf der vorgeschriebenen ebenen Bahnlinie (Fig. 62) von A nach B unter Einwirkung einer gegebenen, in der Ebene der Kurve liegenden Kraft K, zu der die unbekannte Kraft N hinzutritt, Ob man N anfänglich nach innen oder nach aussen gerichtet annimmt, ist grundsätzlich gleichgültig. Ist das Endergebnis positiv, so war der angenommene Sinn richtig, andernfalls ist er umzukehren. Schliesst K mit der Normalen den Winkel a ein, so zerlegt man K in $K \sin a$ (in der Bewegungsrichtung) und $K \cos a$ rechtwinklig dazu. Dann wird $K \sin a$ als einzige Tangentialkraft die Tangentialbeschleunigung erzeugen; so dass $dv : dt = K \sin a : m$ wird. In der Richtung nach dem Krümmungsmittelpunkt ergiebt sich als Gesammtkraft $N - K \cos a$. Diese muss die Centripetalbeschleunigung hervorbringen, daher ist

$$1) \qquad \frac{v^2}{\varrho} = \frac{N - K \cos a}{m} \quad \text{oder}$$

$$2) \qquad N = \frac{m v^2}{\varrho} + K \cos a .$$

Ist K so gerichtet, dass die Pfeilspitze von $K \cos \alpha$ nach dem Krümmungsmittelpunkte hinweist, so wird

$$N = \frac{m v^2}{\varrho} - K \cos \alpha . \tag{3}$$

Dem Anfänger ist dringend zu empfehlen, in jedem vorliegenden Falle dieser Art die Gleichung 1 für die Centripetalbeschleunigung anzusetzen und daraus erst N zu berechnen, nicht aber zu versuchen, die Formeln 2 oder 3 für N unmittelbar anzuschreiben, weil dabei erfahrungsmässig leicht Irrthümer begangen werden.

Ist in Gleichung 3 die Seitenkraft $K \cos \alpha$ allein schon im Stande die Centripetalbeschleunigung zu erzeugen, nämlich

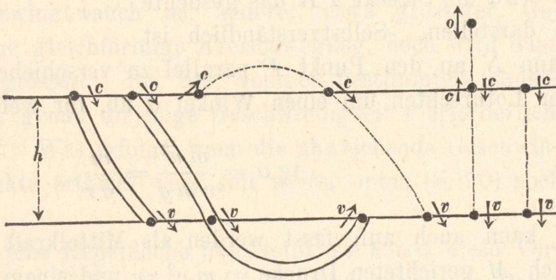
$$\frac{m v^2}{\varrho} = K \cos \alpha ,$$

so wird $N = 0$. An einer Stelle der Bahnlinie, für welche dies gilt, ist die Röhrenwandung bezw. der Führungsdraht überflüssig.

Für die Fälle der vorgeschriebenen Bewegung ist der Satz vom Arbeitsvermögen besonders vortheilhaft, weil der unbekannte Widerstand N keine Arbeit verrichtet, daher auch keinen Einfluss auf die Geschwindigkeitsgrösse hat.

Von besonderer Wichtigkeit sind solche Fälle der vorgeschriebenen Bewegung, bei denen als bewegende Kraft nur die Schwere auftritt. Denkt man sich zwei wagerechte Ebenen im Abstande h von einander (Figur 63), die durch beliebig, aber stetig, gekrümmte Röhren als vorgeschriebene Bahnlinie mit einander verbunden sind, so wird ein Massenpunkt, der oben mit einer Geschwindigkeit c in eine Röhre geworfen wird, sie unten mit der Geschwindigkeit v verlassen, und es gilt, weil nur die Schwere Arbeit verrichtet,

Fig. 63.



$$\tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m c^2 = m g h \text{ oder}$$

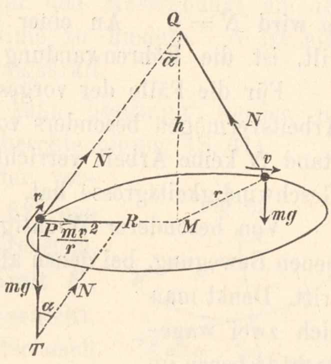
$$v^2 = c^2 + 2 g h ,$$

ganz wie bei der freien Fallbewegung. Ob der Punkt in freier (gerader oder parabolischer) Bahnlinie oder in beliebig gekrümmter vorgeschriebener Bahnlinie sich bewegt, ist für die Geschwindigkeitsgrösse gleichgültig. Jedes Mal, wenn er um h sich gesenkt hat, wird das Quadrat der Geschwindigkeit um $2gh$ gewachsen sein. Bei aufwärts gerichteter Bewegung gilt $v^2 = c^2 - 2gh$.

15. Vorgeschriebene Bewegung in wagerechtem Kreise.

Die vorgeschriebene Bahn, etwa aus einem kreisförmig gebogenen Drahte gebildet (Fig. 64), liege in wagerechter Ebene; r sei der Halbmesser. Als bewegende Kraft wirke die Schwere mg. Die Bewegung kann nur eine gleichförmige sein, weil die Schwere hier keine Arbeit verrichtet. Für diese Bewegung ist eine Centripetalkraft $mv^2 : r$, von P nach M gerichtet, erforderlich; folglich muss zu mg ein derartiger Normalwiderstand N hinzutreten, dass die Mittelkraft beider $PR = mv^2 : r$ wird. Ist $PT = mg$, so wird die Strecke TR das gesuchte N darstellen. Selbstverständlich ist dann N an den Punkt P parallel zu verschieben. N weicht von der Lothrechten um einen Winkel α ab, für welchen gilt

Fig. 64.



$$1) \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{m v^2}{r m g} = \frac{v^2}{g r}.$$

N kann auch aufgefasst werden als Mittelkraft aus einem von P nach M gerichteten Drucke $= mv^2 : r$ und einem lothrecht aufwärts gerichteten von der Grösse mg. Nach dem Gesetze der Wechselwirkung übt der Massenpunkt auf die Bahn dieselben Kräfte in entgegengesetztem Sinne aus, drückt also mit der Kraft $mv^2 : r$ nach aussen, mit der Kraft mg lothrecht nach unten. Die Kräftefigur PTR liegt stets in einer lothrechten Ebene, läuft aber mit dem Massenpunkte um und dreht sich dabei um eine Lothrechte durch M als Achse. Die Richtungslinie von N geht dann durch