Werden die Beschleunigungen mit der Masse m des Punktes multiplicirt, so erhält man die entsprechenden Kräfte. Zur Grössenänderung der Geschwindigkeit ist hiernach eine tangential gerichtete Kraft $K_t = m\,dv : dt$, zur Richtungsänderung eine nach dem (ersten) Krümmungsmittelpunkte gerichtete Centripetalkraft $K_n = m v^2 : \varrho$ erforderlich.

Wirkt auf einen Massenpunkt eine Kraft, die stets normal zur Bahnlinie gerichtet ist, so entsteht nur eine Normalbeschleunigung, also eine gleichförmige krummlinige Bewegung, was übrigens auch schon daraus folgt, dass eine Kraft von solcher Richtung keine Arbeit verrichtet, mithin auch keine Änderung des Arbeitsvermögens hervorbringen kann. Die Wirkung einer solchen Kraft besteht lediglich in einer Richtungsänderung der Geschwindigkeit.

Beispiel: Astronomischen Beobachtungen zufolge ist die Bewegung des Mondes um die Erde nahezu eine gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit $v = 1020$ m/s. in einem Kreise, dessen Halbmesser etwa 60 Erdhalbmessern gleich ist (vgl. S. 58). Die Beschleunigung des Mondes, wenn man denselben als Massenpunkt auffasst, besteht daher in einer stets nach dem Mittelpunkte der Erde gerichteten Beschleunigung $\frac{v^2}{r} = \frac{1020^2}{60 \cdot 6\,370\,000} = 0{,}0027 \frac{\text{m}}{\text{s.}^2}$. Der Umstand, dass diese Beschleunigung und die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche sich wie 1 zu $3600 = 1 : 60^2$, mithin umgekehrt wie die Quadrate der Abstände von dem Erdmittelpunkte verhalten (s. S. 58), hat Newton zuerst veranlasst, die Anziehungskraft zwischen zwei Massenpunkten als umgekehrt verhältnisgleich dem Quadrate ihrer Entfernung anzunehmen, welche Annahme dann, nachdem sie sich auch für die Planeten als zutreffend erwiesen hatte, zu dem allgemeinen Gesetze der Massenanziehung (S. 55) führte.

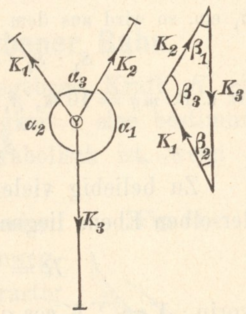
13. Gleichgewicht eines Massenpunktes.

Liefern die auf einen Massenpunkt wirkenden Kräfte eine Mittelkraft $R = 0$, so bewegt sich der Punkt gerade so, als ob gar keine Kraft auf ihn wirkte; seine Geschwinigkeit erfährt dann weder nach Grösse noch nach Richtung eine Änderung, er bewegt sich geradlinig und gleichförmig, und man sagt, die Kräfte halten sich an dem Massenpunkte im Gleichgewichte (vergl. S. 39). Ein besonderer Fall einer solchen Bewegung ist der Ruhezustand, in welchem nicht allein die Beschleunigung Null ist, sondern auch die Geschwindigkeit.

Halten beliebig viele Kräfte an einem Massenpunkte einander das Gleichgewicht, so ist jede derselben der Mittelkraft aller übrigen gleich und entgegengesetzt; denn sie hebt in diesem Falle jene Mittelkraft auf, somit auch die Wirkung aller derjenigen Kräfte, die durch diese Mittelkraft ersetzt wurden.

Sollen 3 Kräfte K_1, K_2 und K_3 an einem Punkte im Gleichgewicht sein, so muss die Mittelkraft von irgend zweien dieser Kräfte durch die dritte aufgehoben werden. Da aber (nach S. 38) die Mittelkraft zweier Kräfte mit beiden in derselben Ebene liegt, so müssen für den Gleichgewichtszustand die Richtungen der 3 Kräfte in derselben Ebene liegen. Bezeichnet man noch die den Kräften gegenüber liegenden Richtungswinkel mit α_1, α_2 und α_3 (Fig. 59) und bedenkt, dass nach S. 41 der Streckenzug der drei Kräfte ein geschlossenes Dreieck bilden muss, so lässt sich aus diesem das Verhältnis der drei Kräfte berechnen. Man erkennt leicht, dass die Dreieckswinkel β die Nebenwinkel der den Kräften gegenüber liegenden Richtungswinkel α sind. Die Sinus der Winkel β sind daher gleich den Sinus der entsprechenden Winkel α. Man erhält daher aus

Fig. 59.



$$K_1 : K_2 : K_3 = \sin \beta_1 : \sin \beta_2 : \sin \beta_3$$

die Gleichung

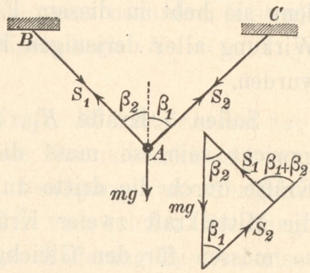
$$K_1 : K_2 : K_3 = \sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 : \sin \alpha_3 .$$

Die Grössen von drei an einem Massenpunkte sich im Gleichgewichte haltenden Kräften verhalten sich wie die Sinus der gegenüber liegenden Richtungswinkel. Aus der Figur folgt sofort: Fallen von den drei Kräften zwei in dieselbe Richtungslinie, so muss die dritte Null sein, wenn sie nicht ebenfalls in derselben Geraden liegt.

Beispiel: Ein Massenpunkt sei an zwei Fäden AB und AC aufgehangen (Fig. 60) und befinde sich in Ruhe, es sollen die in den Fäden herrschenden Spannkräfte S_1 und S_2 ermittelt werden.

Die Spannkraft der Fäden, die wir einstweilen als gewichtlos, aber vollkommen biegsam und undehnbar voraussetzen, fällt mit den Richtungen der Fäden zusammen. Dies Zusammenfallen ist eben der Begriff der Biegsamkeit. Durch die Lage der Befestigungspunkte B und C, sowie durch die Fadenlängen liegt das Dreieck BAC fest. Auf den Massenpunkt wirkt die Schwere mg; dann müssen die Strecken mg, S_1 und S_2 ein geschlossenes Dreieck bilden, mithin, weil mg lothrecht, in einer lothrechten Ebene liegen. Es ist also Gleichgewicht nur möglich, wenn der Massenpunkt sich in der durch B und C gelegten lothrechten Ebene befindet. (Andernfalls wird der Punkt an den Fäden als ein Pendel so lange schwingen, bis in Folge von Luft- und anderen Widerständen endlich in lothrechter Ebene Ruhe eintritt.) Schliessen BA und CA mit der Lothrechten die spitzen Winkel β_2 und β_1 ein, so wird aus dem Krafteck

Fig. 60.



$$S_1 : S_2 : mg = \sin\beta_1 : \sin\beta_2 : \sin(\beta_1 + \beta_2).$$

Ist z. B. $mg = 10^{\text{kg}}$, $\beta_1 = \beta_2 = 45^0$, so wird aus der Figur

$$S_1 : S_2 = 10 \cdot \sqrt{1/2} = 7{,}07^{\text{kg}}.$$

Zu beliebig vielen Kräften K_1, K_2, . . . K_n, welche nicht in derselben Ebene liegen, wurde (auf S. 40) die Mittelkraft in der Form

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \text{ gefunden,}$$

worin $X = \Sigma K \cos\alpha$; $Y = \Sigma K \cos\beta$; $Z = \Sigma K \cos\gamma$ bedeuten. Soll nun Gleichgewicht herrschen, so muss $R = 0$, also auch $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$ werden; da nun die Kräfte, somit auch X, Y und Z stets reelle Grössen (wodurch negative Werthe der Quadrate ausgeschlossen sind), so muss jeder der Summanden gleichzeitig Null sein, oder es muss stattfinden:

$$\Sigma K \cos\alpha = 0; \ \Sigma K \cos\beta = 0; \ \Sigma K \cos\gamma = 0.$$

Also: An einem Massenpunkte halten sich beliebig viele Kräfte im Gleichgewichte, wenn in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz die algebraische Summe der bei rechtwinkliger Zerlegung in jede Achsenrichtung fallenden Seitenkräfte gleich Null ist.

Da die Mittelkraft gegebener Kräfte (nach S. 41) auch durch die Schlusslinie eines ebenen oder räumlichen Kraftecks gefunden wird, so ist klar, dass die Schlussseite Null werden muss, wenn die

Kräfte im Gleichgewicht sein sollen. Im Gleichgewichts-Zustande müssen also die Kräfte ein geschlossenes Krafteck bilden.

Liegen die Kräfte in einer gemeinsamen Ebene, so legt man zweckmässig auch die x- und y-Achse in diese Ebene. Dann werden die Neigungswinkel γ gegen die z-Achse sämmtlich zu 90^0 und $K \cos \gamma$ durchweg Null. Ausserdem wird dann $\cos \beta = \sin \alpha$ und die Gleichgewichts-Bedingungen beschränken sich auf

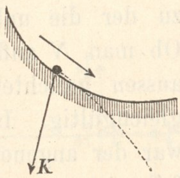
$$\Sigma K \cos \alpha = 0 \text{ und } \Sigma K \sin \alpha = 0.$$

Liegen die x- und y-Achse bezw. wagerecht und lothrecht, so sagt man auch: Die Summe aller wagerechten Seitenkräfte muss Null sein und die Summe aller lothrechten Seitenkräfte ebenfalls.

14. Bewegung auf vorgeschriebener Bahn.

Wirkt auf einen Massenpunkt eine gegebene Kraft K ein, so wird er bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit c eine bestimmte Bewegung ausführen müssen, die z. B. parabolisch ist, wenn K gleichbleibend nach Grösse und Richtung.

Fig. 61.



Ist aber der Punkt nicht völlig frei, sondern in Berührung mit der Oberfläche eines unbeweglichen festen Körpers (Fig. 61), welcher derartig geformt ist, dass er den Massenpunkt verhindert, sich so (in der punktirten Bahn) zu bewegen, wie es unter alleiniger Wirkung von K geschehen müsste, so übt die feste Oberfläche einen Einfluss auf die Bewegung des Massenpunktes aus, und einen solchen Einfluss haben wir (nach S. 31) als eine Kraft aufzufassen, welche als zweite Kraft zu K hinzutritt und ihrer Grösse nach von K in gewisser Weise abhängig ist.

Wir benutzen den Erfahrungssatz: Vollkommen glatte Körper, die sich ohne ein Bindemittel berühren, können an jeder Berührungsstelle nur einen gegenseitigen Druck, dessen Richtung rechtwinklig zur Berührungsebene steht, also einen gegenseitigen Normaldruck, auf einander ausüben. Völlig glatte Körper giebt es freilich nicht; obiger Satz trifft aber um so mehr zu, je grösser der Grad