die gleichbleibende Geschwindigkeit v_x, während in der y-Richtung die gesammte Verzögerung $K : m$ auftritt. Es entstehen daraus die Seitenbewegungen

$$x = c \cos \alpha \, t;$$

$$y = c \sin \alpha \, t - \frac{K}{m} \frac{t^2}{2}, \text{ und aus beiden}$$

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{K}{m} \frac{x^2}{2 c^2 \cos^2 \alpha}.$$

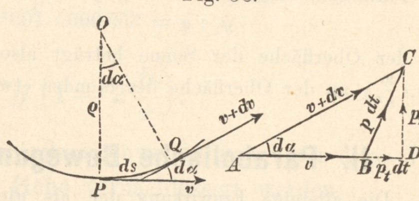
Die Verhältnisse sind also gerade so wie bei der Wurfbewegung; statt der lothrechten Richtung kommt aber hier die Richtung der Mittelkraft, statt der Fallbeschleunigung g der Werth $K : m$ in Frage. Es folgt hieraus: Ein Massenpunkt bewegt sich unter Einwirkung gleichbleibender Kräfte in einer Parabel, deren Achse mit der Mittelkraft K aller wirkenden Kräfte gleichgerichtet, deren Parameter $= \frac{m c^2 \cos^2 \alpha}{K}$ ist.

12. Tangential- und Normalbeschleunigung.

Nach S. 31 ist zu jeder Änderung der Geschwindigkeit, sowohl der Grösse, wie der Richtung nach, eine Kraft erforderlich. Es soll nun für eine gegebene, ungleichförmige und krummlinige Bewegung die zur Grössen- bezw. zur Richtungsänderung aufzuwendende Kraft bestimmt werden.

In der gegebenen Bahnlinie (Fig. 58) bewege sich der Massenpunkt in einem Augenblicke mit der Geschwindigkeit v, beschreibe während des nächsten Zeittheilchens dt das Bahntheilchen $PQ = ds$; dann hat die Geschwindigkeit eine Richtungsänderung um den Winkel $d\alpha$ erfahren, während ihre Grösse $v + dv$ geworden sein möge. Trägt man dann von einem Punkte A aus v und $v + dv$ als Strecken auf, so ist deren geometrische Differenz BC die Elementarbeschleunigung $p\,dt$ (vgl. S. 24). Zeichnet man noch das bei D rechtwinklige Dreieck BDC, so ist $p\,dt$ die geometrische Summe von BD und DC. Die wahre Beschleunigung p der krummlinigen Bewegung hat die Richtung BC und lässt sich zerlegen in eine Seitenbeschleunigung in der Richtung der Bewegung, oder der Tangente an die Bahnlinie, die sogenannte

Fig. 58.



Tangentialbeschleunigung p_t und eine dazu rechtwinklige, in die Richtung der Normalen PO fallende, die sog. Normalbeschleunigung p_n. Danach sind dann $BD = p_t dt$ und $DC = p_n dt$ die entsprechenden Elementarbeschleunigungen. Nach der Figur ist aber $p_t dt = (v + dv) \cos da - v$ oder, weil $\cos da = 1$ zu setzen, $p_t dt = v + dv - v = dv$, mithin

$$1) \qquad \boldsymbol{p_t = dv : dt.}$$

Ferner ist $p_n dt = (v + dv) \sin da$ oder, weil $\sin da = da$ und $dv \cdot da$ als unendlich klein höherer Ordnung gegen $v da$ zu vernachlässigen, $p_n dt = v da$. Weil aber $PQ = ds = v dt = \varrho da$ oder $da = v dt : \varrho$, so wird $v da = v^2 dt : \varrho$ oder

$$2) \qquad \boldsymbol{p_n = \frac{v^2}{\varrho}.}$$

Ist die Bahnlinie eine e b e n e Kurve, so liegen beide Beschleunigungen p_t und p_n in der Ebene der Kurve, und ϱ ist der Krümmungshalbmesser. Ist die Bahnlinie aber d o p p e l t gekrümmt, so bestimmen die an die beiden unendlich nahen Punkte gezogenen Tangenten v und $v + dv$ die sog. K r ü m m u n g s e b e n e; in dieser liegt dann die Figur $ABDC$, somit auch die Beschleunigungen p, p_t und p_n. O ist dann der Schnittpunkt der in der Krümmungsebene liegenden beiden Normalen PO und QO an die Kurve, der sog. H a u p t n o r m a l e n, deren als gleich zu betrachtende Länge ϱ der e r s t e K r ü m m u n g s h a l b m e s s e r genannt wird.

Die Tangentialbeschleunigung $p_t = dv : dt$ stellt allein die G r ö s s e n änderung der Geschwindigkeit dar, die Normalbeschleunigung dagegen, welche mit $1 : \varrho$, d. h. mit der Krümmung der Bahnlinie verhältnisgleich wächst, vertritt die Richtungsänderung. Die Normalbeschleunigung heisst auch C e n t r i p e t a l b e s c h l e u n i g u n g, weil ihr Sinn stets nach dem ersten Krümmungsmittelpunkte gerichtet ist. Die wahre Beschleunigung ist die geometrische Summe der beiden berechneten Beschleunigungen. steht somit nach Grösse, Richtung und Sinn fest. Die Gesammtbeschleunigung p kann nur dann mit p_t zusammen, also in die Richtung der Bewegung fallen, wenn $p_n = 0$, d. h. wenn $\varrho = \infty$, die Bahnlinie an der betreffenden Stelle in der Krümmungsebene ohne Krümmung ist. Es fällt p mit p_n zusammen, wenn $p_t = dv : dt = 0$, d. h. wenn die krummlinige Bewegung gleichförmig erfolgt.

Werden die Beschleunigungen mit der Masse m des Punktes multiplicirt, so erhält man die entsprechenden Kräfte. Zur Grössenänderung der Geschwindigkeit ist hiernach eine tangential gerichtete Kraft $K_t = m\,d\,v : d\,t$, zur Richtungsänderung eine nach dem (ersten) Krümmungsmittelpunkte gerichtete Centripetalkraft $K_n = m\,v^2 : \varrho$ erforderlich.

Wirkt auf einen Massenpunkt eine Kraft, die stets normal zur Bahnlinie gerichtet ist, so entsteht nur eine Normalbeschleunigung, also eine gleichförmige krummlinige Bewegung, was übrigens auch schon daraus folgt, dass eine Kraft von solcher Richtung keine Arbeit verrichtet, mithin auch keine Änderung des Arbeitsvermögens hervorbringen kann. Die Wirkung einer solchen Kraft besteht lediglich in einer Richtungsänderung der Geschwindigkeit.

Beispiel: Astronomischen Beobachtungen zufolge ist die Bewegung des Mondes um die Erde nahezu eine gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit $v = 1020$ m/s. in einem Kreise, dessen Halbmesser etwa 60 Erdhalbmessern gleich ist (vgl. S. 58). Die Beschleunigung des Mondes, wenn man denselben als Massenpunkt auffasst, besteht daher in einer stets nach dem Mittelpunkte der Erde gerichteten Beschleunigung $\frac{v^2}{r} = \frac{1020^2}{60 \cdot 6\,370\,000} = 0{,}0027\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s.}^2}$. Der Umstand, dass diese Beschleunigung und die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche sich wie 1 zu $3600 = 1 : 60^2$, mithin umgekehrt wie die Quadrate der Abstände von dem Erdmittelpunkte verhalten (s. S. 58), hat Newton zuerst veranlasst, die Anziehungskraft zwischen zwei Massenpunkten als umgekehrt verhältnisgleich dem Quadrate ihrer Entfernung anzunehmen, welche Annahme dann, nachdem sie sich auch für die Planeten als zutreffend erwiesen hatte, zu dem allgemeinen Gesetze der Massenanziehung (S. 55) führte.

13. Gleichgewicht eines Massenpunktes.

Liefern die auf einen Massenpunkt wirkenden Kräfte eine Mittelkraft $R = 0$, so bewegt sich der Punkt gerade so, als ob gar keine Kraft auf ihn wirkte; seine Geschwinigkeit erfährt dann weder nach Grösse noch nach Richtung eine Änderung, er bewegt sich geradlinig und gleichförmig, und man sagt, die Kräfte halten sich an dem Massenpunkte im Gleichgewichte (vergl. S. 39). Ein besonderer Fall einer solchen Bewegung ist der Ruhezustand, in welchem nicht allein die Beschleunigung Null ist, sondern auch die Geschwindigkeit.