beurtheilen sein. Der Werfende hat nur die Arbeit $\frac{1}{2}\, m\, 10^2$ auf den Massenpunkt übertragen; die durch die Kraft der Lokomotive erzeugte Zuggeschwindigkeit hat aber zur Folge, dass das Arbeitsvermögen (oder die Gewalt, die Wucht) des Wurfes auf das 5fache gewachsen ist. Die aufgewendete Wurfgeschwindigkeit w entsprach nur einer Fallhöhe $w^2 : 2g = 5{,}1$ m, während die Wirkung dieselbe ist, als fiele der Punkt aus der Höhe $5 \cdot 5{,}1 = 25{,}5$ m. Hiernach kann man beurtheilen, wie gefährlich das Hinauswerfen fester Körper aus fahrenden Eisenbahnzügen werden kann.

Bei den bisherigen Untersuchungen über Fall- und Wurfbewegungen wurde vorausgesetzt, dass auf den Massenpunkt allein die Schwere einwirke. Auf S. 37 wurde aber schon bemerkt, dass bei Körpern von verhältnismässig grossem Rauminhalt und bei grossen Geschwindigkeiten der Luftwiderstand eine bedeutende Rolle spielt. Es sei hier nur bemerkt, dass ein Gewehrgeschoss schon bei etwa 50 $\frac{\text{m}}{\text{s.}}$ Geschwindigkeit einen Luftwiderstand erfährt, der gleich dem Gewichte des Geschosses, sodass ein mit dieser Geschwindigkeit abwärts geworfenes Geschoss sich gleichförmig bewegen würde, da der Luftwiderstand die Schwere aufhebt. Weil der Luftwiderstand aber etwa verhältnisgleich dem Quadrate der Geschwindigkeit wächst, so wird er bei einer Schussgeschwindigkeit von 400 $\frac{\text{m}}{\text{s.}}$ das 64fache des Gewichts betragen. Hieraus ergiebt sich klar, dass die Bewegung eines solchen Geschosses mit den hier entwickelten Formeln wenig Ähnlichkeit haben wird. Aus diesem Grunde haben wir auch in dem Beispiele auf S. 52 nicht ein Gewehrgeschoss, sondern ein Geschoss mit geringerer Geschwindigkeit der Rechnung unterzogen.

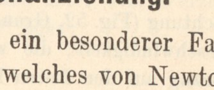
Ferner wurde bisher die Fallbeschleunigung als gleichbleibend nach Grösse und Richtung vorausgesetzt. Im Folgenden soll untersucht werden, wie sich die Fallbeschleunigung mit der Veränderung des Ortes ändert, woraus sich dann freilich zeigen wird, dass dieser Einfluss bei den vorkommenden Fällen der Wurfbewegung verschwindend klein ist.

10. Gesetz der allgemeinen Massenanziehung.

Das Gesetz der Schwere (S. 33) ist nur ein besonderer Fall des Gesetzes der allgemeinen Massenanziehung, welches von Newton 1685 aufgestellt wurde. Dasselbe lautet:

Je 2 Massenpunkte m und m_1, die sich in der Entfernung l von einander befinden, üben auf einander eine gegenseitige Anziehungskraft aus, die proportional dem Produkte der Massen und umgekehrt proportional dem Quadrate ihrer Entfernung ist.

Fig. 51.



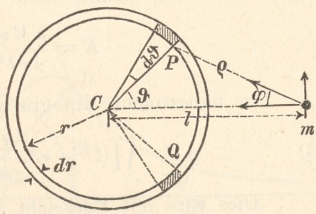
Es ist hiernach (Fig. 53)

1) $$K = k\frac{m\,m_1}{l^2},$$

worin k offenbar die Anziehungskraft zwischen 2 Masseneinheiten in dem Abstande $l = 1$ bedeutet. Für Kilogramme als Kräfte, für Meter und Sekunden ist $k = 0{,}000\,000\,000\,64 = \frac{64}{10^{11}}$.

Diese Formel 1 gilt einstweilen nur für Massenpunkte ohne räumliche Ausdehnung; wir wollen darnach feststellen, wie eine dünne gleichartige Kugelschale auf einen Massenpunkt einwirkt.

Fig. 54.



Die Kugelschale (Fig. 54) habe den Halbmesser r, die Wandstärke dr; der Massenpunkt m sei vom Mittelpunkte der Kugel um l entfernt. Man ziehe einen Halbmesser CP, der mit Cm den Winkel ϑ einschliesst und ziehe in dem Abstande $d\vartheta$ einen zweiten Halbmesser. Beide lasse man sich um Cm als Achse drehen, dann schneiden sie aus der Hohlkugel eine kleine Zone heraus. Von der Umfangslänge der Zone denkt man sich bei P ein Bogentheilchen ds rechtwinklig zur Bildebene herausgenommen, dann hat man bei P ein Massentheilchen, welches nach allen drei Richtungen unendlich klein ist. Der Stoff der Hohlkugel habe für 1 cbm das Gewicht γ (unter 45° geographischer Breite gewogen). Das Gewicht eines Kubikmeters in Kilogrammen (unter 45° geogr. Br.) nennen wir die **Dichte** des Körpers. Das Körpertheilchen hat dann die Masse $\frac{\gamma}{g}\cdot dr\cdot r d\vartheta\cdot ds$ und übt auf m die Anziehungskraft aus $k\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot dr\cdot r d\vartheta\cdot ds\cdot\frac{m}{\rho^2}$. Diese Kraft kann zerlegt werden in eine mit der Richtung mC und eine, welche im Punkte m rechtwinklig zu mC nach oben gerichtet ist. Die erstere beträgt

$$k\,\frac{\gamma}{g}\cdot dr\cdot r d\vartheta\cdot ds\cdot\frac{m}{\rho^2}\cos\varphi,$$

während die zweite durch die Einwirkung eines gleichen bei Q befindlichen Massentheilchens aufgehoben wird. Sämmtliche Massentheilchen der Zone wirken in übereinstimmender Weise auf m ein, da für sie alle $d\vartheta$, ρ und φ dieselben sind. Wir können daher die Gesammtanziehung der ganzen Kugelzone erhalten, wenn wir statt ds den Umfang $2\pi r\sin\vartheta$ einsetzen. Dann entsteht die Anziehung

$$dK = k\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot dr\cdot r d\vartheta\cdot 2\pi r\cdot\sin\vartheta\cdot\frac{m}{\rho^2}\cdot\cos\varphi.$$

Nun ist aber die Masse der ganzen Hohlkugel $M = \frac{\gamma}{g}\,4r^2\pi\,dr$; wird dies in dK eingeführt, so entsteht

1) $$dK = \frac{kMm}{2}\,\frac{\sin\vartheta\,d\vartheta\cos\varphi}{\rho^2}.$$

Die Veränderlichen ϑ und φ sollen auf ρ zurückgeführt werden. Es ist nämlich in dem Dreiecke CPm: $r^2 = l^2 + \rho^2 - 2\,l\rho\cos\varphi$ mithin $\cos\varphi = \frac{l^2 - r^2 + \rho^2}{2\,l\rho}$; ebenso $\cos\vartheta = \frac{l^2 + r^2 - \rho^2}{2lr}$ und durch Differentiation $-\sin\vartheta\, d\vartheta = -\frac{\rho\, d\rho}{lr}$. Hiernach wird

$$2)\qquad dK = \frac{kMm}{2}\,\frac{l^2 - r^2 + \rho^2}{2\,l^2 r\rho^2}\,d\rho = \frac{kMm}{4rl^2}\,\frac{l^2 - r^2 + \rho^2}{\rho^2}\,d\rho.$$

Um nun die Anziehungskraft K der ganzen Hohlkugel zu erhalten, muss man vorstehenden Ausdruck integriren. Liegt der Punkt m ausserhalb der Hohlkugel, so sind ihre nächsten Theile im Abstande $l - r$, die fernsten im Abstande $l + r$ vom Massenpunkte, sodass diese Werthe als Grenzen für ρ einzusetzen sind. Daher wird

$$K = \frac{kMm}{4rl^2}\int_{l-r}^{l+r}\left[(l^2 - r^2)\frac{d\rho}{\rho^2} + d\rho\right].$$

Das unbestimmte Integral aber ist

$$3)\qquad \int\left[(l^2 - r^2)\frac{d\rho}{\rho^2} + d\rho = -\frac{l^2 - r^2}{\rho} + \rho\right].$$

Dies wird mit Rücksicht auf obige Grenzen

$$-\frac{l^2 - r^2}{l + r} + l + r + \frac{l^2 - r^2}{l - r} - (l - r) = -(l - r) + l + r + l + r - (l - r) = 4\,r,$$

mithin wird

$$4)\qquad K = k\,\frac{Mm}{l^2}.$$

Diese Anziehungskraft ist (nach Gl. 1) dieselbe, als ob die Masse M der Kugelschale in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Hieraus folgt weiter, dass eine Hohlkugel von endlicher Wandstärke oder auch eine Vollkugel, die aus lauter gleichartigen Kugelschalen besteht, bezüglich der Anziehungskraft gegen einen ausserhalb befindlichen Massenpunkt ebenso wirkt, als ob die ganze Masse der Hohlkugel oder Kugel in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Dabei ist nicht erforderlich, dass die verschiedenen Kugelschalen dieselbe Dichte haben, wenn nur jede Schale für sich gleichartig an Dichte ist. Auch für die gegenseitige Anziehungskraft zweier Kugeln ergiebt sich leicht, dass man die Masse einer jeden in ihrem Mittelpunkte vereinigt ansehen kann.

Fig. 55.

Liegt der Massenpunkt im Innern der Kugelschale (Fig. 55), so ergiebt sich für die Anziehung einer Zone bei P dieselbe Gleichung 1, daher auch dieselbe Gleichung 2; nur sind jetzt die Grenzen $r + l$ und $r - l$ als grösste und kleinste Entfernung des Massenpunktes von der Schale. Die Einsetzung dieser Grenzen in Gl. 3 giebt: $-\frac{l^2 - r^2}{r + l} + r + l + \frac{l^2 - r^2}{r - l} - (r - l)$ $= r - l + r + l - r - l - r + l = 0$, so dass auch $K = 0$ wird. Die Anziehungskraft einer dünnen, gleichartigen

Kugelschale gegen einen in ihrem Inneren befindlichen Punkt ist also Null.

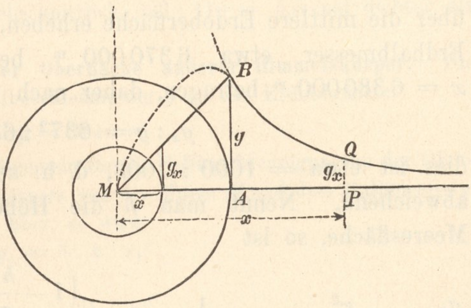
Die Anziehung einer aus gleichartigen dünnen Kugelschalen bestehenden Hohlkugel von endlicher Wandstärke auf einen in ihrem Innern gelegenen Punkt ist demnach ebenfalls Null.

Betrachten wir nun die Erde als Kugel aus unendlich vielen Schalen bestehend, von denen jede für sich gleichartig ist, so ist ihre Anziehungskraft für einen ausserhalb gelegenen Massenpunkt m ebenso zu berechnen, als ob ihre ganze Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre. Für einen Massenpunkt an der Erdoberfläche, d. h. in dem Abstande r (Erdhalbmesser) vom Mittelpunkt M ist nun die Anziehungskraft gleich mg, mithin

$$\frac{k\,M\,m}{r^2} = m\,g \quad \text{oder}$$

4) $$k\,M = g\,r^2.$$

Fig. 56.



Nennen wir aber die Anziehungsbeschleunigung (Fallbeschleunigung) eines in grösserem Abstande x vom Erdmittelpunkte befindlichen Punktes g_x (Fig. 56), so wird auch

$$k\,M = g_x\,x^2, \quad \text{mithin}$$

5) $$g_x : g = r^2 : x^2.$$

Die Darstellung dieser Gleichung ist eine Kurve BQ, welche, nach beiden Seiten verlängert gedacht, sich ähnlich wie eine gleichseitige Hyperbel beiden Achsen asymptotisch nähert, jedoch keine Symmetrieachse hat. (Kämen auf der rechten Seite der Gl. 5 die ersten Potenzen statt der Quadrate vor, so würde eine Hyperbel die Darstellung sein.) Für $x = 2\,r$ und $3\,r$ ist g_x nur noch $^1/_4\,g$ bezw. $^1/_9\,g$.

Für die Veränderlichkeit der Fallbeschleunigung im Inneren der Erde wäre das Gesetz einfach, wenn man annehmen dürfte, dass die Dichte der Erde überall gleich sei. Unter dieser Voraussetzung würde man für ein Massentheilchen im Abstande x von dem Mittelpunkte die Erde zerlegen in eine Vollkugel vom Halbmesser x und eine äussere Hohlkugel von der Wandstärke $r - x$. Letztere würde keine Einwirkung ausüben, erstere aber ebenso wirken, als ob ihre Masse in der Mitte vereinigt wäre. Darnach wird nach Gl. 4:

$$k\,M_x = g_x\,x^2,$$

wenn M_x die Masse der Kugel vom Halbmesser x. Da nun für $x = r$ wiederum

$$k\,M = g\,r^2, \quad \text{so wird}$$

6) $$g_x = g\,\frac{r^2}{x^2}\,\frac{M_x}{M} \quad \text{oder, weil}$$

$M_x : M = x^3 : r^3$:

7) $$g_x = g\frac{x}{r},$$

dargestellt durch eine in Fig. 56 gezogene Gerade MB. Die Erde ist aber durchaus nicht von überall gleicher Dichte, vielmehr sind die tieferen Schichten bedeutend dichter als die uns bekannten, in der Nähe der Oberfläche gelegenen. Daher ist $M_x : M > x^3 : r^3$ und es wird $g_x > g\, {}^x/_r$. Statt der Geraden MB ist daher eine oberhalb derselben liegende Kurve MB der wahre Ausdruck des Gesetzes, welches wir aber nicht entwickeln können, da wir das Gesetz der Veränderlichkeit der Dichte nicht kennen.

Nehmen wir nun an, dass die dem Menschen zugänglichen oder auch durch Wurf zu erreichenden Höhen sich um höchstens 10000 m über die mittlere Erdoberfläche erheben, so würde, weil der mittlere Erdhalbmesser etwa 6370000 m beträgt, für diese Grenze $x = 6380000$ m betragen, daher nach Gl. 5:

$$g_x : g = 637^2 : 638^2,$$

dies ist etwa $= 1000 : 1003$, d. h. sehr wenig von der Einheit abweichend. Nennt man h die Höhe eines Punktes über der Meeresfläche, so ist

$$\frac{g_x}{g} = \frac{r^2}{(r+h)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{h}{r}\right)^2} = \frac{\left(1-\frac{h}{r}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{h}{r}\right)^2\right]^2} = \frac{1-2\frac{h}{r}+\left(\frac{h}{r}\right)^2}{1-2\left(\frac{h}{r}\right)^2+\left(\frac{h}{r}\right)^4}.$$

Wenn man dann $\left(\frac{h}{r}\right)^2$ und $\left(\frac{h}{r}\right)^4$ gegen 1 vernachlässigt, so entsteht annähernd

8) $$g_x = g\left(1-2\frac{h}{r}\right).$$

Für die weitaus meisten technischen Anwendungen kann diese Veränderlichkeit von g_x mit der Höhe vernachlässigt werden.

Die Erde übt nun aber auch auf den Mond eine Anziehungskraft aus, und die dieser Kraft entsprechende Beschleunigung g_x ergiebt sich, da die Entfernung des Mondes von dem Erdmittelpunkte etwa 60 Erdhalbmesser ausmacht, zu

$$g_x = g\left(\frac{r}{60 \cdot r}\right)^2 = {}^1/_{3600}\, g = 9{,}81 : 3600 = 0{,}0027.$$

Hörte die Umlaufbewegung des Mondes um die Erde für einen Augenblick auf, so würde der Mond eine beschleunigte Fallbewegung nach der Erde hin ausführen; die Beschleunigung würde anfänglich nur 0,0027 $^{m}/_{s^2}$ betragen, würde aber mit der Annäherung an die Erde wachsen und sich allmählich dem Werthe 9,81 nähern. Dass diese Fallbewegung nicht zu Stande kommt, rührt von der Geschwindigkeit des Mondes rechtwinklig zur Richtung der Anziehungskraft her, wie weiter unten noch besprochen werden wird.

Die Gl. 4 (S. 57) kann auch dazu dienen, die **Massenzahl M der Erde** zu bestimmen. Es ist $M = gr^2 : k$ also $M = 9{,}81 \cdot 6\,370\,000^2 \cdot 10^{11} : 64 = 622 \cdot 10^{21}$ Masseneinheiten. Die Erde hat etwa $1083 \cdot 10^{18}$ Kubikmeter Inhalt; bestände sie aus Wasser (von 4° C.), so würde ihr Massengehalt $1083 \cdot 10^{18} \cdot 1000 : 9{,}81 = 110 \cdot 10^{21}$ Masseneinheiten.

Mithin ist die Erde durchschnittlich $622 : 110 = 5{,}65$ mal dichter als Wasser.

Fallbeschleunigung an der Oberfläche anderer Himmelskörper. Die Gleichung 4, S. 57, für die Fallbeschleunigung g an der Erdoberfläche

$$g = Mk : r^2$$

gilt, ihrer Entwickelung nach, allgemein für die Fallbeschleunigung an der Oberfläche eines beliebigen Himmelskörpers von der Masse M und dem Halbmesser r. Gehen M und r in M_1 und r_1 über, so wird

$$g_1 = M_1 k : r_1^2,$$

mithin ist das Verhältnis

$$\frac{g_1}{g} = \frac{M_1}{M} \frac{r^2}{r_1^2}.$$

Ist die Masse der Sonne 355 000 mal so gross wie die der Erde, während die Halbmesser in dem Verhältnisse 109 : 1 stehen, so wird das Verhältnis der Fallbeschleunigungen

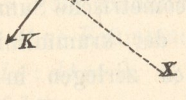
$$g_1 : g = 355\,000 : 109^2 = \text{rund } 30.$$

An der Oberfläche der Sonne beträgt also die Fallbeschleunigung ungefähr $294{,}3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; an der Oberfläche des Mondes etwa nur $\frac{1}{6} \cdot 9{,}81 = 1{,}64 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

11. Parabolische Bewegung im Allgemeinen.

Die alleinige Einwirkung der als gleichbleibend betrachteten Schwere bewirkte eine Bewegung des Massenpunktes in einer Parabel, deren Achse lothrecht abwärts, d. h. übereinstimmend mit der Kraft, gerichtet, deren Parameter $c^2 \cos^2 \alpha : g$ betrug.

Fig. 57.



Wirken nun auf den Massenpunkt beliebig viele nach Grösse und Richtung gleichbleibende Kräfte, so können diese zu einer ebenfalls gleichbleibenden Mittelkraft K zusammengesetzt werden. Wählt man die Kraftrichtung dann zur negativen y-Richtung, die x-Achse rechtwinklig dazu in der durch K und die Anfangsgeschwindigkeit c bestimmten Ebene, so ist wiederum (Fig. 57) $c \cos \alpha$