3) Wird nun der soeben betrachtete Fall noch verallgemeinert, indem man K als veränderlich annimmt, so kann man auf Grund der auf S. 42 gepflogenen Erörterungen behaupten, dass während eines Bewegungstheilchens die Zunahme an Arbeitsvermögen gleich dem Arbeitstheilchen, also $d\,(\frac{1}{2}\,m v^2) = d\mathfrak{A}$ sein muss. Eine Summirung auf beiden Seiten ergiebt dann auch für die endliche Bewegung $\frac{1}{2}\,m v^2 - \frac{1}{2}\,m c^2 = \mathfrak{A}$.

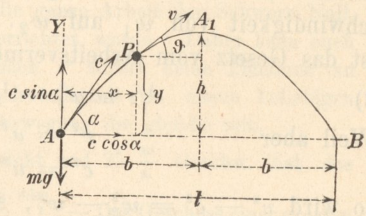
Steht der Massenpunkt unter Einwirkung beliebig vieler Kräfte, so kann man diese für jeden Augenblick durch ihre Mittelkraft R ersetzen, deren Arbeit dann gleich der Zunahme an Arbeitsvermögen sein muss. Da aber nach S. 43 die Arbeit der Mittelkraft gleich der Arbeitssumme der Einzelkräfte, so hat man nun den Satz vom Arbeitsvermögen in der allgemeinen Form:

Die Zunahme an Arbeitsvermögen, welche ein Massenpunkt während einer Bewegung erfährt, ist gleich der algebraischen Summe der mechanischen Arbeiten, welche von allen auf den Punkt wirkenden Kräften während dieser Bewegung verrichtet werden.

9. Parabolische Wurfbewegung.

Wird ein Massenpunkt mit der Geschwindigkeit c schräg aufwärts geworfen unter dem Neigungswinkel α gegen die Wagerechte und der alleinigen Einwirkung der Schwere überlassen, so entsteht, wie bei Fig. 47 erläutert, eine krummlinige Bewegung in einer durch c und die lothrechte Richtung der Schwere bestimmten Ebene.

Fig. 48.



Zerlegt man (Fig. 48) die krummlinige Bewegung in zwei Seitenbewegungen nach der Richtung der Lothrechten AY und rechtwinklig dazu nach AB, so muss die letztere offenbar gleichförmig sein, weil in ihr keine Kraft auftritt. Sie erfolgt demnach mit der Geschwindigkeit $c \cos \alpha$, welche sich durch Zerlegung von c ergiebt. Es ist mithin

1) $$v_x = c \cos \alpha \quad \text{und} \quad v_y = c \sin \alpha - g t\,,$$

da die lothrechte Seitenbewegung wegen der Fallbeschleunigung gleichförmig verzögert wird. Die Neigung von v gegen die Wagerechte ist

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{v_y}{v_x} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{g\,t}{c\cos\alpha}.$$

Die Wegeslängen in beiden Seitenbewegungen sind

$$x = c\cos\alpha\, t \quad \text{und} \quad y = c\sin\alpha\, t - {}^1\!/_2\, g t^2.$$

Entfernt man t aus diesen beiden Gleichungen, indem man $t = \dfrac{x}{c\cos\alpha}$ aus der ersten in die zweite einführt, so entsteht als Gleichung der Bahnlinie

2) $$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2}\,\frac{x^2}{c^2\cos^2\alpha},$$

welche nach den bekannten Regeln der analytischen Geometrie als Parabel erkannt wird.

Da die lothrechte Seitenbewegung aufwärts und abwärts ganz symmetrisch, die wagerechte aber gleichförmig erfolgt, so schliesst man leicht, dass der ansteigende Theil der Bahnlinie dem abfallenden Theile symmetrisch sein muss, dass also eine Lothrechte durch den höchsten Punkt A_1 der Bahnlinie die Hauptachse der Parabel sein muss. Bestimmter überzeugt man sich davon noch, indem man die Kurve auf ein durch A_1 gelegtes Achsenkreuz (wagerecht und lothrecht) bezieht. Die Höhe des höchsten Punktes A_1 ist offenbar

3) $$h = \frac{c^2\sin^2\alpha}{2g},$$

da in der lothrechten Seitenbewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit $c\sin\alpha$ nur diese Höhe erstiegen werden kann. Die dazu gehörige Zeit, nach welcher $c\sin\alpha - g t = 0$ wird, ist $t_1 = \dfrac{c\sin\alpha}{g}$, und während dieser erfolgt eine wagerechte Seitenbewegung

4) $$b = c\cos\alpha \cdot \frac{c\sin\alpha}{g} = \frac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

Hierdurch liegt der höchste Punkt A_1 fest. Setzt man nun

$$x = b - x_1 = \frac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} - x_1 \quad \text{und}$$

$$y = h - y_1 = \frac{c^2\sin^2\alpha}{2g} - y_1 \quad \text{in Gl. 2 ein,}$$

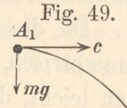
so ergiebt sich nach einfacher Zusammenziehung

$$5)\qquad x_1^2 = 2\,\frac{(c\cos\alpha)^2}{g}\,y_1 .$$

Diese Gleichung stellt eine Parabel mit lothrechter Achse und dem Scheitel A_1 dar, und zwar ist der Parameter $\frac{c^2\cos^2\alpha}{g}$; es ist demnach diese Grösse, welche die Form der Bahnlinie allein bedingt, nur von der wagerechten Seitengeschwindigkeit $c\cos\alpha$, nicht aber von der lothrechten anfänglichen Seitengeschwindigkeit $c\sin\alpha$ abhängig. Letztere bestimmt aber, weil sie in den Gleichungen 3 und 4 vorkommt, die Lage des Scheitelpunktes A_1 der Wurflinie gegen den Anfangspunkt A.

Besondere Fälle: 1) Ist $\alpha = 0$, wird der Punkt also wagerecht fortgeworfen (Fig. 49), so ist $c\cos\alpha = c$, $c\sin\alpha = 0$, daher werden h und b beide zu Null, und der Anfangspunkt A ist gleichzeitig der höchste Punkt A_1. Der Parameter der Parabel wird $c^2 : g$.

Fig. 49.

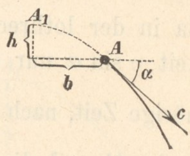


Erfolgt aber der Wurf schräg abwärts (Fig. 50), so wird $c\sin\alpha$, den früheren Betrachtungen gegenüber, negativ; es ist dann

$$b = -\frac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{g};\quad h = \frac{c^2\sin^2\alpha}{2g};$$

mithin liegt dann der Scheitel A_1 in der nach rückwärts verlängerten Bahnlinie, wird also von dem Massenpunkte, der seine Bewegung in A beginnt, nicht mehr durchlaufen.

Fig. 50.



Der zuerst betrachtete Fall (Fig. 48) ist offenbar der vollständigere, da in ihm die abwärts gerichtete Bewegung mit vorkommt.

Die Geschwindigkeit v in einem beliebigen Punkte P der Bahnlinie ergiebt sich am einfachsten nach dem Satze vom Arbeitsvermögen. Während der Bewegung von A nach P verrichtet nämlich die Schwerkraft die Arbeit $-mgy$, daher wird nach Gl. 3, S. 47

$$v = \sqrt{c^2 - 2gy}.$$

Solange der Punkt steigt, solange also y wächst, vermindert sich die Geschwindigkeit, und im Scheitel ist sie am kleinsten, indem sie dort lediglich aus der wagerechten Seitenbewegung $c \cos \alpha$ besteht. Ist der Scheitel überschritten, sinkt der Massenpunkt, so nimmt v fortgesetzt wieder zu, ist im Punkte B für $y = 0$ wieder gleich der Anfangsgeschwindigkeit c und wird dann immer grösser. Die Entfernung $AB = l$, in welcher der Massenpunkt wieder dieselbe wagerechte Ebene erreicht, von der er ausging, heisst die Wurfweite und ist offenbar $= 2\,b = \dfrac{c^2\, 2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$ oder

6) $$l = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Die Dauer t_2 dieses Wurfes beträgt, da $l = c \cos \alpha\, t_2$ ist,

7) $$t_2 = 2\,t_1 = \frac{2\,c \sin \alpha}{g}.$$

2) Bei einer Wurf-, Schiess- oder Schleudervorrichtung ist die Geschwindigkeit c meist gegeben, der Winkel α aber beliebig wählbar. Will man eine bestimmte Wurfweite l erreichen, so zeigt Gleichung 6, dass diese mit $\sin 2\alpha$ verhältnissgleich ist. Es haben aber zwei Winkel, die sich zu 180^0 ergänzen, die man etwa $90 + \varphi$ und $90 - \varphi$ nennen kann, gleichen Sinus; jede von beiden liefert daher, gleich 2α gesetzt, den gleichen Werth von $\sin 2\alpha$. Sonach geben 2 Steigungswinkel α, welche sich zu 90^0 ergänzen und welche man $45^0 + \frac{1}{2}\varphi$ und $45^0 - \frac{1}{2}\varphi$ nennen kann, dieselbe Wurfweite. Bei gleichen Anfangsgeschwindigkeiten c lässt sich also ein gegebenes Ziel sowohl durch einen hohen, wie durch einen flachen Wurf erreichen. Beide fallen aber zu einem einzigen zusammen für $\alpha = 45^0$, und dieser Steigungswinkel liefert den Grösstwerth der Wurfweite, nämlich

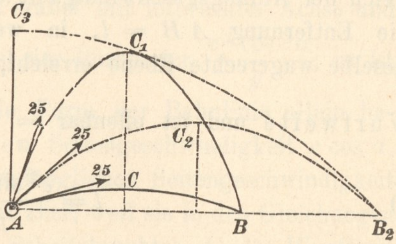
8) $$l_{max} = \frac{c^2}{g}.$$

Die grösste erreichbare Höhe entsteht bei $\alpha = 90^0$ und wird $h_{max} = \dfrac{c^2}{2g}$; die grösste Wurfweite ist mithin doppelt so gross wie die grösste Wurfhöhe.

Bei $\alpha = 45^0$ wird (nach Gl. 3) $h = \dfrac{c^2}{4g}$, d. h. die Pfeilhöhe dieser Wurflinie ist $\frac{1}{4}$ der Wurfweite (der Sehne).

Beispiel 1: Eine gespannte Armbrust (eine geladene Windbüchse, ein Blasrohr oder dergl.) ertheile dem Geschoss eine Geschwindigkeit $c = 25 \frac{m}{s}$. Mit welchem Steigungswinkel ist eine Wurfweite von $l = 40$ m zu erreichen? (Fig. 51.) Nach Gl. 6 ist $40 = \frac{25^2 \sin 2\alpha}{9{,}81}$, mithin $\sin 2\alpha = 0{,}628$; dies entspricht einem Winkel $2\alpha = 39^0$, zugleich aber auch $2\alpha = 141^0$. Also sind die beiden Steigungswinkel $\alpha = 19{,}5^0$ und $70{,}5^0$ verwendbar. Dann ist $\sin \alpha = 0{,}334$ bezw. $0{,}943$, sonach beträgt $c \sin \alpha = 8{,}4$ bezw. $23{,}6$ und die Wurfhöhe nach Gl. 3: $h = 3{,}5$ bezw. $28{,}3$ m, die Wurfdauer aber (Gl. 7): $t_2 = 1{,}7$ bezw. $4{,}81$ Sekunden. Die grösste erreichbare Höhe bei $\alpha = 90^0$ beträgt $c^2 : (2g) = 31{,}9$ m, die grösste mögliche Wurfweite bei $\alpha = 45^0$: doppelt so viel, nämlich $63{,}8$ m $= AB_2$.

Fig. 51.



Soll ein Ziel getroffen werden, welches nicht in gleicher Höhe mit A liegt, sondern die Koordinaten x und y hat, so findet man den erforderlichen Steigungswinkel, indem man Gl. 2 nach α auflöst. Führt man zur Abkürzung die Geschwindigkeitshöhe $k = \frac{c^2}{2g}$ ein, so wird Gl. 2: $y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{x^2}{4k \cos^2 \alpha}$; bedenkt man, dass $1 : \cos^2\alpha = \sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$, so ergiebt sich leicht

10) $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2k}{x} \pm \sqrt{\frac{4k(k-y)}{x^2} - 1}.$$

Bei gegebenem k, d. h. gegebener Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses giebt es bezüglich der Punkte, die für das Geschoss erreichbar sind, eine bestimmte Grenze. Für gewisse Werthpaare von x und y wird nämlich die Wurzel in Gl. 10 reell, für andere aber imaginär. Letztere Werthpaare entsprechen den unerreichbaren Punkten. Die Grenzlinie zwischen den erreichbaren und unerreichbaren Punkten erhält man, wenn die Grösse unter dem Wurzelzeichen gleich Null gesetzt wird, d. h. $4k^2 - 4ky = x^2$ oder

11) $$y = k - \frac{x^2}{4k} = \frac{c^2}{2g} - \frac{g}{2c^2}x^2.$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel, deren Scheitel in der Höhe $k = c^2 : (2g)$ lothrecht über dem Anfangspunkte A liegt, deren halbe Sehne gleich der Wurfweite $l = 2k = c^2 : g$ ist. Sie ist in Fig. 51 durch die Strichpunktirte $C_3 B_2$ dargestellt. Giebt man α alle möglichen Werthe, so bezeichnet Gl. 2 (S. 49) eine Schar von unendlich vielen verschiedenen Wurfparabeln, die sämmtlich von A ausgehen. Umschliesst man diese unendlich vielen für eine gespannte oder geladene Wurf- oder Schiessvorrichtung möglichen Parabeln durch eine sie sämmtlich berührende Kurve, so nennt man diese die Umhüllungslinie, und die Parabel $C_3 B_2$ der Gl. 11 ist diese Umhüllungslinie.

Ihre Gleichung kann auch noch auf andere Weise, als eben geschehen, gefunden werden, indem man nach der Lehre von den Umhüllungslinien die Abgeleitete der Gleichung 2 (S. 49) der Kurvenschar nach dem für die Kurvenschar veränderlichen $\operatorname{tg}\alpha$ gleich Null setzt, diese Gleichung mit Gleichung 2 verbindet und aus beiden $\operatorname{tg}\alpha$ entfernt. Es wird Gleichung 2, wenn man darin $1 : \cos^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$ setzt:

12) $$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2c^2} - \frac{gx^2}{2c^2}\operatorname{tg}^2\alpha.$$

Daraus

13) $$\frac{dy}{d(\operatorname{tg}\alpha)} = 0 = x - \frac{gx^2}{c^2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Hieraus $\operatorname{tg}\alpha = \frac{c^2}{gx}$ giebt in Gleichung 12 eingesetzt:

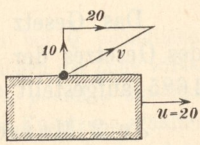
$$y = \frac{c^2}{g} - \frac{g}{2c^2}x^2 - \frac{c^2}{2g} \text{ oder}$$

$$y = \frac{c^2}{2g} - \frac{g}{2c^2}x^2, \text{ wie in Gleichung 11.}$$

Beispiel 2: Hat ein Eisenbahnwagen eine Geschwindigkeit u in gerader Bahnlinie, so nehmen alle Körper, die in demselben in scheinbarer Ruhe sich befinden, an der Geschwindigkeit u Theil. Lässt man also in einem solchen Wagen einen Massenpunkt aus der ruhenden Hand fallen, so ist seine scheinbare Bewegung freilich eine lothrechte Fallbewegung, die wahre Bewegung aber eine parabolische Wurfbewegung, die mit der wagerechten Geschwindigkeit u beginnt. Dasselbe gilt natürlich auch, wenn man einen Massenpunkt aus dem Fenster eines Eisenbahnwagens fallen lässt. Ein ausserhalb des Zuges auf dem Erdboden befindlicher Beobachter erblickt in solchem Falle eine parabolische Bahnlinie nach Fig. 49, wenn darin c mit u vertauscht wird. Für $u = 20 \frac{\text{m}}{\text{s.}}$ wird der Parameter der Parabel $20^2 : 9{,}81 = 400 \cdot 0{,}102 = 40{,}8^{\text{m}}$.

Ertheilt man aber dem Massenpunkte, statt ihn aus der ruhenden Hand vom Eisenbahnwagen aus fallen zu lassen, mittels Wurfes eine wagerechte Geschwindigkeit $w = 10 \frac{\text{m}}{\text{s.}}$ rechtwinklig zur Fahrrichtung (Fig. 52, Grundriss), so ist diese nur eine Seitengeschwindigkeit; die wahre Geschwindigkeit v aber in Bezug auf den festen Erdboden ist die Mittelgeschwindigkeit aus $w = 10$ und $u = 20$, mithin

Fig. 52.



$$v = \sqrt{w^2 + u^2} = 10\sqrt{5} = 22{,}361.$$

Für den aussen stehenden Beobachter entsteht eine Wurfbewegung, die mit der wagerechten Geschwindigkeit $c = 10\sqrt{5}$ beginnt und in der lothrechten Ebene durch v erfolgt. Würde der Beobachter von diesem Wurfe etwa getroffen, so würde, wenn man nur die wagerechte Seitenbewegung berücksichtigt und die Vergrösserung der wahren Geschwindigkeit in schräger Richtung durch die Wirkung der Schwere ausser Acht lässt, die Wirkung des Wurfes nach dem Arbeitsvermögen $\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m \cdot 10^2 \cdot 5$ zu beurtheilen sein. Der Werfende hat nur die Arbeit $\frac{1}{2} m\, 10^2$ auf den Massenpunkt übertragen; die durch die Kraft der Lokomotive erzeugte Zuggeschwindigkeit hat aber zur Folge, dass das Arbeitsvermögen (oder die Gewalt, die Wucht) des Wurfes auf das 5fache gewachsen ist. Die aufgewendete Wurfgeschwindigkeit w entsprach nur einer Fallhöhe $w^2 : 2g = 5{,}1\,^{\text{m}}$, während die Wirkung dieselbe ist, als fiele der Punkt aus der Höhe $5 \cdot 5{,}1 = 25{,}5\,^{\text{m}}$. Hiernach kann man beurtheilen, wie gefährlich das Hinauswerfen fester Körper aus fahrenden Eisenbahnzügen werden kann.

Bei den bisherigen Untersuchungen über Fall- und Wurfbewegungen wurde vorausgesetzt, dass auf den Massenpunkt allein die Schwere einwirke. Auf S. 37 wurde aber schon bemerkt, dass bei Körpern von verhältnismässig grossem Rauminhalt und bei grossen Geschwindigkeiten der Luftwiderstand eine bedeutende Rolle spielt. Es sei hier nur bemerkt, dass ein Gewehrgeschoss schon bei etwa 50 $\frac{\text{m}}{\text{s.}}$ Geschwindigkeit einen Luftwiderstand erfährt, der gleich dem Gewichte des Geschosses, sodass ein mit dieser Geschwindigkeit abwärts geworfenes Geschoss sich gleichförmig bewegen würde, da der Luftwiderstand die Schwere aufhebt. Weil der Luftwiderstand aber etwa verhältnisgleich dem Quadrate der Geschwindigkeit wächst, so wird er bei einer Schussgeschwindigkeit von 400 $\frac{\text{m}}{\text{s.}}$ das 64fache des Gewichts betragen. Hieraus ergiebt sich klar, dass die Bewegung eines solchen Geschosses mit den hier entwickelten Formeln wenig Ähnlichkeit haben wird. Aus diesem Grunde haben wir auch in dem Beispiele auf S. 52 nicht ein Gewehrgeschoss, sondern ein Geschoss mit geringerer Geschwindigkeit der Rechnung unterzogen.

Ferner wurde bisher die Fallbeschleunigung als gleichbleibend nach Grösse und Richtung vorausgesetzt. Im Folgenden soll untersucht werden, wie sich die Fallbeschleunigung mit der Veränderung des Ortes ändert, woraus sich dann freilich zeigen wird, dass dieser Einfluss bei den vorkommenden Fällen der Wurfbewegung verschwindend klein ist.

10. Gesetz der allgemeinen Massenanziehung.

Das Gesetz der Schwere (S. 33) ist nur ein besonderer Fall des Gesetzes der allgemeinen Massenanziehung, welches von Newton 1685 aufgestellt wurde. Dasselbe lautet:

Je 2 Massenpunkte m und m_1, die sich in der Entfernung l von einander befinden, üben auf einander eine gegenseitige Anziehungskraft aus, die proportional dem Produkte der Massen und umgekehrt proportional dem Quadrate ihrer Entfernung ist.

Fig. 51.