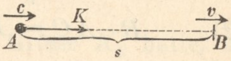
Erstere liefert die Arbeit $K \cos \vartheta \, ds$, während die andere nach S. 42 die Arbeit Null verrichtet. Die Arbeit von K ergiebt sich daher wiederum zu $d\mathfrak{A} = K \cos \vartheta \, ds$.

Wird die Kraft $K = 1^{\text{kg}}$, die Wegeslänge in ihrer Richtung $= 1^{\text{m}}$, so wird die Arbeit $\mathfrak{A} = K \cdot s = 1 \cdot 1 = 1$, also gleich der Arbeitseinheit. Diese Arbeit, welche von 1^{kg} längs eines Weges $= 1^{\text{m}}$ verrichtet wird, heisst Meterkilogramm (mkg); n^{kg} längs eines Weges $= 1/_n$ Meter verrichten aber ebenfalls die Arbeit $n \cdot \frac{1}{n} = 1^{\text{mkg}}$.

8. Arbeitsvermögen (kinetische Energie oder lebendige Kraft) eines Massenpunktes.

1) Wirkt auf einen Punkt von der Masse m eine mit der Bewegungsrichtung übereinstimmende, nach Richtung und Grösse gleichbleibende Kraft K, so entsteht eine geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung von der Beschleunigung $p = K : m$. Ist c die Anfangsgeschwindigkeit, v die Geschwindigkeit nach der Zeit t (Fig. 45), so ist die Wegeslänge (nach Gl. 5, S. 12)

Fig. 45.



$$s = \frac{v^2 - c^2}{2\,p} = \frac{v^2 - c^2}{2\,(K : m)}$$

oder

1) $$\tfrac{1}{2}\, m v^2 - \tfrac{1}{2}\, m c^2 = K s\,.$$

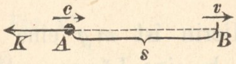
Hat ein Punkt von der Masse m in irgend einem Zeitpunkte eine Geschwindigkeit v, so nennt man das Produkt aus seiner Masse mal dem halben Quadrate der Geschwindigkeit, also die Grösse $\tfrac{1}{2}\, m\, v^2$ das (in dem Massenpunkte aufgehäufte) **Arbeitsvermögen.** Älter und noch vielfach gebräuchlich ist dafür die Bezeichnung „lebendige Kraft“ (als vis viva von Leibniz [! 1646 zu Leipzig, † 1716 zu Hannover] in die Mechanik eingeführt); da aber der Werth $\tfrac{1}{2}\, m v^2$ mit dem, was wir sonst Kraft nennen, nichts gemein hat, da auch bei dem Fehlen jeder Kraftwirkung, also bei gleichbleibender Geschwindigkeit, der Werth $\tfrac{1}{2}\, m v^2$ bestehen bleibt, so erscheint die Benennung lebendige Kraft wenig zweckmässig. Die Bezeichnung „kinetische Energie“ ist als angemessen zu bezeichnen; auch der Name „Wucht“ ist dafür empfohlen; wir wollen die Grösse mit Grashof Arbeitsvermögen nennen. Es war

$^1/_2\, m c^2$ das anfängliche, es ist $^1/_2\, m v^2$ das nachherige grössere Arbeitsvermögen. Die linke Seite der Gl. 1 ist also die „Zunahme an Arbeitsvermögen“, welche der Massenpunkt durch die Kraft K erfahren hat. Die rechte Seite ist aber die mechanische Arbeit der Kraft K. Gl. 1 bedeutet hiernach:

Die Zunahme des Arbeitsvermögens eines Massenpunktes ist gleich der während der Bewegung an dem Massenpunkte verrichteten mechanischen Arbeit.

Ist der Sinn der Kraft K der Bewegungsrichtung entgegengesetzt (Fig. 46), so entsteht eine verzögerte Bewegung; es ist dann (nach S. 12)

Fig. 46.



$$s = \frac{c^2 - v^2}{2p} = -\frac{v^2 - c^2}{2\,(K/_m)}, \text{ oder}$$

$$^1/_2\, m v^2 - {}^1/_2\, m c^2 = -Ks.$$

In diesem Falle bewirkt die Kraft K eine Abnahme des Arbeitsvermögens, und zwar wird diese wiederum gemessen durch die von der Kraft geleistete Arbeit (im absoluten Sinne). Da aber die geleistete Arbeit jetzt als negativ aufzufassen ist, so empfiehlt es sich, für die allgemeine Anwendung dieses Satzes auch eine etwaige Abnahme des Arbeitsvermögens $^1/_2\, m c^2 - {}^1/_2\, m v^2$ stets in der Form einer algebraischen Zunahme (deren Werth hier negativ ist) zu schreiben, d. h. stets von dem Endwerthe des Arbeitsvermögens den Anfangswerth abzuziehen und den Unterschied gleich der verrichteten Arbeit zu setzen; dann entspricht eine positive Arbeit einer positiven Zunahme des Arbeitsvermögens, und umgekehrt.

Hatte ein Massenpunkt die Anfangsgeschwindigkeit Null, die Endgeschwindigkeit v, so ist $^1/_2\, m v^2 = Ks$, oder es drückt das Arbeitsvermögen einer Masse m die Arbeit aus, welche verrichtet werden musste, um den Punkt aus der Ruhe in die Geschwindigkeit v zu versetzen. Soll aber die Geschwindigkeit v in Null verwandelt werden, so muss stattfinden

$$0 - {}^1/_2\, m v^2 = -Ks.$$

$^1/_2\, m v^2$ ist also zugleich die absolute Grösse der Verzögerungsarbeit, welche nöthig ist, um eine Masse m von der Geschwindigkeit v zur Ruhe zu bringen. Will man einen Massenpunkt mit der Geschwindigkeit c fortwerfen, so muss man mit der Muskelkraft eine Arbeit von der Grösse $\frac{1}{2}\,mc^2$ auf ihn übertragen. Und dieses Arbeitsvermögen, welches der Massenpunkt in sich trägt, kann, wie wir später sehen werden, wieder zur Arbeitsverrichtung benutzt werden. Das Arbeitsvermögen $\frac{1}{2}\,mc^2$ ist daher wirklich nur eine besondere Form von mechanischer Arbeit. Dass $\frac{1}{2}\,mc^2$ auch nach Meterkilogrammen zu messen ist, erkennt man, wenn man mit der Fallbeschleunigung multiplicirt und dividirt; dann wird

$$\tfrac{1}{2}\,mc^2 = mg \cdot \frac{c^2}{2g}.$$

Hierin ist mg eine Kraft, $c^2/2g$ aber eine Geschwindigkeitshöhe, d. h. eine Länge, sodass das Produkt in $^{\mathrm{mkg}}$ zu verstehen ist.

Der Satz vom Arbeitsvermögen ist besonders für solche Aufgaben geeignet, wo es wesentlich auf die Grösse der Endgeschwindigkeit, nicht aber auf Beschleunigung und Zeit der Bewegung ankommt.

Beispiel: Der Fall der abwärts gerichteten Wurfbewegung (Fig. 34, S. 35) ist für die Anwendung des vorstehenden Satzes sehr geeignet. Ist die Strecke s durchfallen, so hat die Schwere die Arbeit $+\,mgs$ verrichtet. Die Zunahme am Arbeitsvermögen ist daher

$$\tfrac{1}{2}\,mv^2 - \tfrac{1}{2}\,mc^2 = mgs, \text{ mithin}$$

$$v^2 - c^2 = 2gs \text{ oder } v = \sqrt{c^2 + 2gs}.$$

Für die Aufwärtsbewegung (Fig. 35) ist die Arbeit negativ, nämlich $-\,mgs$, mithin

$$\tfrac{1}{2}\,mv^2 - \tfrac{1}{2}\,mc^2 = -\,mgs$$

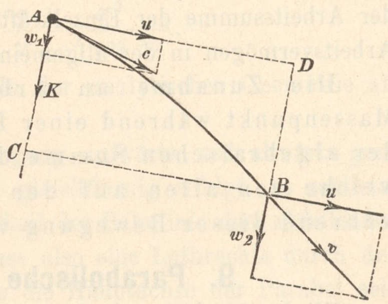
$$\text{oder } v^2 - c^2 = -\,2gs, \text{ mithin } v = \sqrt{c^2 - 2gs}.$$

Fasst man die Bewegung vom Punkte P aus zur höchsten Stelle B und wieder zurück nach P zusammen, so ist die ganze Arbeit der Schwere Null, weil aufwärts $-\,mgs$, abwärts $+\,mgs$ verrichtet wurde. Daher kann auch bei der Bewegung von P über B und nach P zurück keine Zunahme an Arbeitsvermögen entstehen, oder die Geschwindigkeit an einem beliebigen Punkte P muss für Abwärts- und Aufwärtsbewegung die gleiche sein.

Ein Eisenbahnzug von 200 000 $^{\mathrm{kg}}$ Gewicht und 25 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s.}}$ Geschw. hat das Arbeitsvermögen $\dfrac{200\,000 \cdot 25^2}{2\,g} = \dfrac{62\,500\,000}{g}{}^{\mathrm{mkg}}$. — Das Geschoss einer grossen Kanone hat bei 450 $^{\mathrm{kg}}$ Gewicht und 527 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s.}}$ Geschw. ungefähr dasselbe Arbeitsvermögen, nämlich $\dfrac{450 \cdot 527^2}{2\,g} = \dfrac{6\,248\,900}{g}{}^{\mathrm{mkg}}$. — Die Zugkraft der Lokomotive hat in 180 Sek. längs eines Weges von 2250 $^{\mathrm{m}}$ (nach S. 13) dieselbe Arbeit geleistet, die von der Ausdehnungskraft der Pulverladung in einem kleinen Bruchtheil einer Sekunde längs des Kanonenrohres verrichtet worden ist (wenn man in beiden Fällen nur diejenigen Theile der Kräfte beachtet, welche zur Beschleunigung dienen, d. h. wenn man die Reibungs- und Luftwiderstände nicht berücksichtigt.)

Es soll nun der Satz vom Arbeitsvermögen auch für krummlinige Bewegung bewiesen werden. Ein Massenpunkt bewege sich unter Einwirkung einer gleichbleibenden Kraft K, die aber nicht mit der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit c zusammenfallen möge (Fig. 47); dann ertheilt die Kraft dem Punkte eine Elementarbeschleunigung $p\,dt$ in der Richtung der Kraft. Anfangsgeschwindigkeit und Elementarbeschleunigung liegen in der durch die Richtungen von c und K bestimmten Ebene, daher müssen auch die ferneren Geschwindigkeiten in dieser Ebene verbleiben. Die unter Einwirkung einer gleichbleibenden Kraft entstehende Bahnlinie ist demnach eine ebene Kurve. Daher kann man die Bewegung AB in zwei Seitenbewegungen AC (in der Richtung der Kraft K) und AD (rechtwinklig zur Kraft) zerlegen. Zerlegt man Geschwindigkeiten und Kraft nach denselben Richtungen, so sind diese die Seitengeschwindigkeiten und Seitenkräfte. In der Richtung AD wirkt keine Kraft; in dieser ist daher die Geschwindigkeit dauernd gleich u; in der Richtung AC aber vergrössert sich die Geschwindigkeit von w_1 auf w_2. Für die Seitenbewegung $AC = s$ ist das Gesetz vom Arbeitsvermögen bereits bewiesen, daher

Fig. 47.



2) $$\tfrac{1}{2}\, m\, w_2^2 - \tfrac{1}{2}\, m\, w_1^2 = K s.$$

Weil aber $$v^2 = u^2 + w_2^2 \text{ und}$$
$$c^2 = u^2 + w_1^2,$$

so wird $v^2 - c^2 = w_2^2 - w_1^2$, so dass man aus Gl. 1 erhält

3) $$\tfrac{1}{2}\, m\, v^2 - \tfrac{1}{2}\, m\, c^2 = K s.$$

Ks ist auch für die krummlinige Bewegung AB die Arbeit von K, so dass hiermit das Gesetz vom Arbeitsvermögen auch für krummlinige Bewegungen unter Einwirkung einer gleichbleibenden Kraft nachgewiesen ist.

3) Wird nun der soeben betrachtete Fall noch verallgemeinert, indem man K als veränderlich annimmt, so kann man auf Grund der auf S. 42 gepflogenen Erörterungen behaupten, dass während eines Bewegungstheilchens die Zunahme an Arbeitsvermögen gleich dem Arbeitstheilchen, also $d\,(^1/_2\,m v^2) = d\mathfrak{A}$ sein muss. Eine Summirung auf beiden Seiten ergiebt dann auch für die endliche Bewegung $^1/_2\,m v^2 - {}^1/_2\,m c^2 = \mathfrak{A}$.

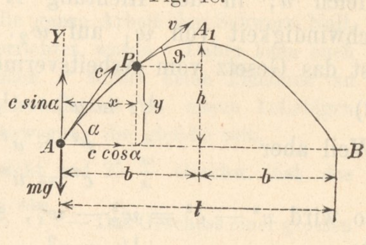
Steht der Massenpunkt unter Einwirkung beliebig vieler Kräfte, so kann man diese für jeden Augenblick durch ihre Mittelkraft R ersetzen, deren Arbeit dann gleich der Zunahme an Arbeitsvermögen sein muss. Da aber nach S. 43 die Arbeit der Mittelkraft gleich der Arbeitssumme der Einzelkräfte, so hat man nun den Satz vom Arbeitsvermögen in der allgemeinen Form:

Die Zunahme an Arbeitsvermögen, welche ein Massenpunkt während einer Bewegung erfährt, ist gleich der algebraischen Summe der mechanischen Arbeiten, welche von allen auf den Punkt wirkenden Kräften während dieser Bewegung verrichtet werden.

9. Parabolische Wurfbewegung.

Wird ein Massenpunkt mit der Geschwindigkeit c schräg aufwärts geworfen unter dem Neigungswinkel α gegen die Wagerechte und der alleinigen Einwirkung der Schwere überlassen, so entsteht, wie bei Fig. 47 erläutert, eine krummlinige Bewegung in einer durch c und die lothrechte Richtung der Schwere bestimmten Ebene.

Fig. 48.



Zerlegt man (Fig. 48) die krummlinige Bewegung in zwei Seitenbewegungen nach der Richtung der Lothrechten AY und rechtwinklig dazu nach AB, so muss die letztere offenbar gleichförmig sein, weil in ihr keine Kraft auftritt. Sie erfolgt demnach mit der Geschwindigkeit $c \cos \alpha$, welche sich durch Zerlegung von c ergiebt. Es ist mithin

1) $$v_x = c \cos \alpha \quad \text{und} \quad v_y = c \sin \alpha - g t\,,$$

da die lothrechte Seitenbewegung wegen der Fallbeschleunigung