$\cos \gamma = \frac{Z}{R}$. Damit ist die Mittelkraft R nach Grösse und Richtung bestimmt. Da in den algebraischen Summen auf die Reihenfolge der Summanden nichts ankommt, so ist die Reihenfolge in der Zusammensetzung der Kräfte gleichgültig.

Auch durch Zeichnung kann man beliebig viele, beispielsweise vier Kräfte K_1 bis K_4 zusammensetzen. Von einem beliebigen Punkte A aus setze man in einer Hülfsfigur 40a zuerst K_1 und K_2 zu einem Streckenzuge zusammen; dann ist die Schlusslinie $AC = R_2$ die Mittelkraft beider. Mit dieser fügt man

Fig. 40.

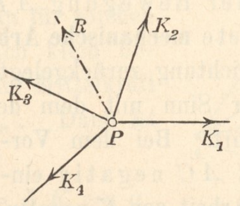
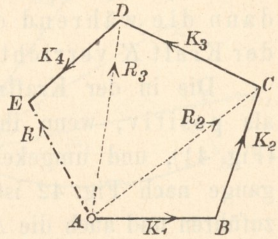


Fig. 40a.



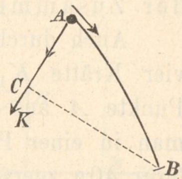
in gleicher Weise K_3 zusammen, indem man den Streckenzug R_2, K_3 mit der Mittelkraft $R_3 = AD$ bildet. Daran schliesst sich in gleicher Weise K_4. Die Strecke AE, welche dann den gesammten Streckenzug der Kräfte K_1 bis K_4 schliesst, ist offenbar die Mittelkraft R der gegebenen Seitenkräfte und ergiebt sich wiederum als die geometrische Summe der Kräfte. Verlegt man diese nach Grösse, Richtung und Sinn bestimmte Mittelkraft an den Massenpunkt m bei P (Fig. 40), so ist die Aufgabe gelöst. Die Hülfsfigur 40a heisst (nach G. Lang) das Krafteck. Diese Figur ist leicht zu zeichnen, wenn die gegebenen Kräfte in derselben Ebene, der Zeichenebene, liegen. Man erkennt aber leicht, dass, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, das Krafteck grundsätzlich seine Bedeutung beibehält; nur bildet der Streckenzug der Kräfte dann ein räumliches Krafteck; aber immerhin stellt die Schlusslinie, die geometrische Summe der Kräfte, auch in solchen Fällen ihre Mittelkraft dar, deren zeichnerische Bestimmung dann freilich die Auftragung in Grundriss und Aufriss nach den Lehren der darstellenden Geometrie erfordert. Ist die Schlusslinie = Null, so halten sich die Kräfte im Gleichgewichte. Weiteres s. S. 65.

7. Mechanische Arbeit einer Kraft.

Ein Massenpunkt m führe unter Einwirkung beliebiger Kräfte eine Bewegung von A nach B aus (Fig. 41). Eine der wirkenden

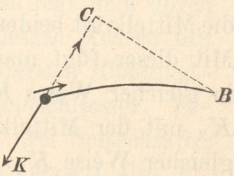
Kräfte K sei gleichbleibend nach Grösse und Richtung, so dass sie während der Bewegung stets ihrer Anfangsrichtung parallel bleibt. Ist dann AC die rechtwinklige Projektion der Bahnlinie AB auf die Richtung der Kraft K, so nennt man AC die in der Kraftrichtung zurückgelegte Wegeslänge. Das Produkt aus der Kraft K und der in ihrer Richtung zurückgelegten Wegeslänge AC heisst dann die während der Bewegung AB von der Kraft K verrichtete **mechanische Arbeit** $\mathfrak{A}$.

Fig. 41.



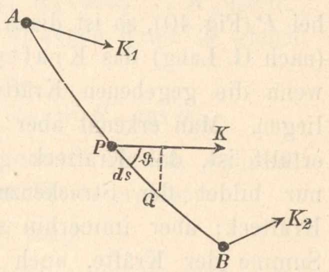
Die in der Kraftrichtung zurückgelegte Wegeslänge AC gilt als positiv, wenn ihr Sinn mit dem der Kraft übereinstimmt (Fig. 41), und umgekehrt. Bei dem Vorgange nach Fig. 42 ist AC negativ einzuführen und auch die Arbeit von K negativ, nämlich $\mathfrak{A} = -K \cdot AC$.

Fig. 42.



Ist die Kraft K nach Grösse und Richtung nicht gleichbleibend, so ist die Bildung des Produktes $K \cdot AC$ nicht möglich. Wenn die Kraft bei A die Grösse K_1, bei B die Grösse K_2 hatte, an einem beliebigen Zwischenpunkte P aber K war, so stellt man sich vor, die Kraft behielte für ein Bewegungstheilchen $PQ = ds$ Grösse und Richtung bei und nähme erst bei Q plötzlich neue Grösse und Richtung an. Diese Vorstellung der sprungweisen Änderung wird mit der wirklichen stetigen Änderung um so mehr übereinstimmend, je mehr das Bahntheilchen ds sich der Null nähert. Für das Bewegungstheilchen ist dann die Arbeit der Kraft K: $d\mathfrak{A} = K ds \cos\vartheta$. Als die Arbeit der veränderlichen Kraft K längs der endlichen Bewegung bezeichnet man nun $\mathfrak{A} = \int K ds \cos\vartheta$. Die Integration ist nur ausführbar, wenn man die Änderungsgesetze von K und $\cos\vartheta$ kennt.

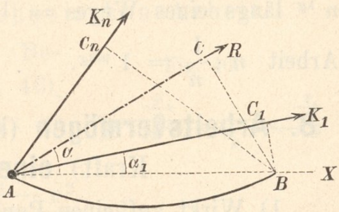
Fig. 43.



Steht die Kraft während eines beliebigen Theils der Bewegung rechtwinklig zur Bahnlinie, so ist $\cos\vartheta = 0$, also auch $d\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}$ während dieses Bewegungsstückes Null; oder: Eine Kraft verrichtet keine mechanische Arbeit, solange sie rechtwinklig zur Bewegungsrichtung steht.

Ein Massenpunkt möge sich nun unter Einwirkung beliebig vieler Kräfte K_1, K_2 . . . K_n bewegen, von denen in Fig. 44 nur 2 gezeichnet sind; während der Bewegung von A nach B seien die Kräfte gleichbleibend nach Grösse und Richtung (welche Annahme auch für veränderliche Kräfte zulässig ist, sobald man für solchen Fall AB als unendlich klein betrachtet). Es sei R die Mittelkraft von K_1, K_2 . . . K_n. Dann ist für diese (nach S. 40)

Fig. 44.



1) $R \cos \alpha = X = \Sigma K \cos \alpha$.

Fällt man aber von B Rechtwinklige auf die Kraftrichtungen, so ist $\cos \alpha = AC : \overline{AB}$; $\cos \alpha_1 = AC_1 : \overline{AB}$; . . . $\cos \alpha_n = AC_n : \overline{AB}$, also nach Gl. 1 (nach Multiplikation mit $\overline{AB}$)

2) $$R \cdot AC = K_1 AC_1 + K_2 AC_2 + \ldots K_n AC_n.$$

Da aber AC, AC_1 . . . AC_n die rechtwinkligen Projektionen der Bahnlinie AB auf die Kraftrichtungen sind, so ist die Bedeutung der Gl. 2:

Die mechanische Arbeit, welche sich bei der Bewegung eines Massenpunktes für die Mittelkraft mehrerer auf ihn wirkenden Kräfte ergiebt, ist gleich der algebraischen Summe der Arbeiten dieser Einzelkräfte bei derselben Bewegung.

(Bei veränderlichen Kräften gilt dieser Satz zunächst für ein unendlich kleines Bewegungstheilchen; weil aber als Arbeit einer veränderlichen Kraft die Summe ihrer Arbeitstheilchen bezeichnet ist, so gilt der obige Satz der mechanischen Arbeit ganz allgemein für Kräfte, die an demselben Massenpunkte angreifen.)

Der Ausdruck für das Arbeitstheilchen $d\mathfrak{A} = K\,ds \cos \vartheta$ (S. 42) lässt sich jetzt auch noch anders deuten, als oben geschehen. Man kann nämlich (Fig. 43) K zerlegen in die Seitenkräfte $K \cos \vartheta$ (in die Bewegungsrichtung) und $K \sin \vartheta$ (rechtwinklig dazu).

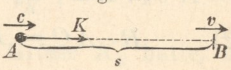
Erstere liefert die Arbeit $K \cos \vartheta \, ds$, während die andere nach S. 42 die Arbeit Null verrichtet. Die Arbeit von K ergiebt sich daher wiederum zu $d\mathfrak{A} = K \cos \vartheta \, ds$.

Wird die Kraft $K = 1$ kg, die Wegeslänge in ihrer Richtung $= 1$ m, so wird die Arbeit $\mathfrak{A} = K \cdot s = 1 \cdot 1 = 1$, also gleich der Arbeitseinheit. Diese Arbeit, welche von 1 kg längs eines Weges $= 1$ m verrichtet wird, heisst Meterkilogramm (mkg); n kg längs eines Weges $= 1/_n$ Meter verrichten aber ebenfalls die Arbeit $n \cdot \frac{1}{n} = 1$ mkg.

8. Arbeitsvermögen (kinetische Energie oder lebendige Kraft) eines Massenpunktes.

1) Wirkt auf einen Punkt von der Masse m eine mit der Bewegungsrichtung übereinstimmende, nach Richtung und Grösse gleichbleibende Kraft K, so entsteht eine geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung von der Beschleunigung $p = K : m$. Ist c die Anfangsgeschwindigkeit, v die Geschwindigkeit nach der Zeit t (Fig. 45), so ist die Wegeslänge (nach Gl. 5, S. 12)

Fig. 45.



$$s = \frac{v^2 - c^2}{2\,p} = \frac{v^2 - c^2}{2\,(K : m)}$$

oder

$$1) \qquad 1/2\, m\, v^2 - 1/2\, m\, c^2 = K s\,.$$

Hat ein Punkt von der Masse m in irgend einem Zeitpunkte eine Geschwindigkeit v, so nennt man das Produkt aus seiner Masse mal dem halben Quadrate der Geschwindigkeit, also die Grösse $1/2\, m\, v^2$ das (in dem Massenpunkte aufgehäufte) **Arbeitsvermögen.** Älter und noch vielfach gebräuchlich ist dafür die Bezeichnung „lebendige Kraft“ (als vis viva von Leibniz [! 1646 zu Leipzig, † 1716 zu Hannover] in die Mechanik eingeführt); da aber der Werth $1/2\, m v^2$ mit dem, was wir sonst Kraft nennen, nichts gemein hat, da auch bei dem Fehlen jeder Kraftwirkung, also bei gleichbleibender Geschwindigkeit, der Werth $1/2\, m v^2$ bestehen bleibt, so erscheint die Benennung lebendige Kraft wenig zweckmässig. Die Bezeichnung „kinetische Energie“ ist als angemessen zu bezeichnen; auch der Name „Wucht“ ist dafür empfohlen; wir wollen die Grösse mit Grashof Arbeitsvermögen nennen. Es war