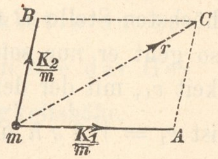
6. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.

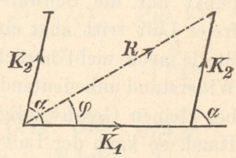
Auf einen Massenpunkt m (Fig 36) mögen gleichzeitig 2 Kräfte K_1 und K_2 wirken; dann bringt nach dem Satze auf S. 32 jede von ihnen eine entsprechende Beschleunigung $p_1 = K_1/m$; $p_2 = K_2/m$ hervor. Denken wir uns diese Beschleunigungen, denen der Punkt m gleichzeitig unterworfen ist, durch mA und mB dargestellt, so lassen sich beide nach dem Satze auf S. 23 durch eine Mittelbeschleunigung r ersetzen, die man erhält, indem man die Seitenbeschleunigungen zu einem Streckenzuge mAC zusammensetzt; die Schlusslinie mC ist dann die wahre oder Mittelbeschleunigung des Punktes m unter der Einwirkung der Kräfte K_1 und K_2. Dieselbe Beschleunigung r würde aber auch entstehen, wenn in der Richtung mC auf den Punkt m eine Kraft $R = mr$ wirkte. Zeichnet man daher einen Streckenzug aus den Kräften K_1 und K_2 (statt aus den Beschleunigungen), so wird die Schlusslinie die Grösse $R = mr$ bekommen und nach Richtung und Sinn mit r übereinstimmen. Die so erhaltene Kraft R ist dann den gegebenen Kräften K_1 und K_2 völlig gleichwerthig und heisst ihre Mittelkraft oder Resultirende. Es folgt also der Satz vom Dreieck (oder vom Parallelogramm) der Kräfte: Die Mittelkraft zweier gegebenen Kräfte wird nach Grösse, Richtung und Sinne durch die Schlussseite des aus den gegebenen Kräften gebildeten Streckenzuges, also die geometrische Summe der Seitenkräfte, (oder durch die Diagonale des aus ihnen gezeichneten Parallelogramms) dargestellt.

Fig. 36.



Für die Berechnung ergeben sich (Fig. 37), wie bei der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten (S. 21) gezeigt wurde, die Formeln:

Fig. 37.



$$R = \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + 2\,K_1\,K_2 \cos\alpha}$$

$$\sin\varphi = \sin\alpha\,\frac{K_2}{R}.$$

Wird $\alpha = 0$, d. h haben die beiden Kräfte übereinstimmende Richtung und gleichen Sinn, so wird die Mittelkraft die wirkliche

Summe; haben sie aber (für $\alpha = \pi$) entgegengesetzten Sinn, so wird die Mittelkraft gleich dem Unterschiede der gegebenen Kräfte und bekommt den Sinn der grösseren von beiden. In diesen beiden Fällen stimmt die geometrische Summe mit der algebraischen Summe überein. Werden in letzterem Falle noch die beiden entgegengesetzten Kräfte K einander gleich, so ergiebt sich die Mittelkraft zu Null; es bewegt sich dann der Massenpunkt ebenso, als ob gar keine Kraft auf ihn einwirkte, man sagt daher:

Zwei gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte heben sich an einem Massenpunkte vollständig auf oder halten einander das Gleichgewicht.

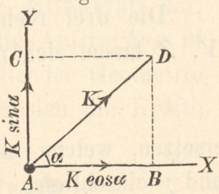
Stehen die beiden Kräfte rechtwinklig zu einander, so wird $R = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$; $\operatorname{tg} \varphi = K_2 : K_1$.

Kommt zu den Kräften K_1 und K_2 noch eine dritte K_3 hinzu, die mit K_1 und K_2 nicht in derselben Ebene liegt, so hat man diese mit der Mittelkraft der beiden ersteren zusammenzusetzen, um die Mittelkraft R aller dreier Kräfte zu erhalten Wie bei der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten (S. 22) ausführlich erläutert, ergiebt sich dann die Mittelkraft als Diagonale eines Parallelepipeds aus den drei Seitenkräften, oder als die Schlussseite eines räumlichen Streckenzuges der Seitenkräfte oder wiederum als deren geometrische Summe.

Wie Geschwindigkeiten und Beschleunigungen lassen sich selbstverständlich auch Kräfte in zwei bezw. drei Seitenkräfte zerlegen und durch diese völlig ersetzen.

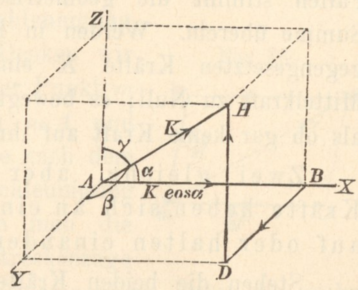
Soll eine Kraft K nach zwei rechtwinklig auf einander stehenden, mit ihr in derselben Ebene liegenden Achsenrichtungen zerlegt werden (Fig. 38), so zieht man durch den Endpunkt D der Kraftstrecke AD eine Parallele DB zu AY; dann ist ABD der Streckenzug der Seitenkräfte. Schliesst K mit der X-Achse den Winkel α ein, so erhält man $K \cos \alpha$ und $K \sin \alpha$ als die Seitenkräfte. Soll die Zerlegung aber nach drei rechtwinklig zu einander stehenden Richtungen erfolgen (Fig. 39), welche mit der Kraft K bezw. die Winkel α, β und γ

Fig. 38.



einschliessen, so fällt man von H ein Loth HD auf die xy-Ebene und hat damit die in die z-Achse fallende Seitenkraft $K \cos \gamma$ mit dem Sinne von D nach H. Eine Parallele durch D zur y-Achse liefert die Seitenkraft $BD = K \cos \beta$ für die y-Richtung, und endlich ist $AB = K \cos \alpha$ die Seitenkraft in der x-Richtung (vergl. S. 23, Fig. 25).

Fig. 39.



Greifen nun an einem Massenpunkte beliebig viele Kräfte K_1, $K_2 \ldots K_n$ mit beliebigen Richtungen an und will man deren Mittelkraft R nach Grösse und Richtung finden, so legt man durch den Massenpunkt ein dreiachsiges Achsenkreuz, dessen Achsen mit den gegebenen Kräften die als bekannt zu betrachtenden Richtungswinkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \ldots \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ einschliessen. Sodann zerlegt man jede der gegebenen Kräfte in drei Seitenkräfte, welche mit den Achsenrichtungen zusammenfallen, ersetzt also K_1 durch $K_1 \cos \alpha_1$, $K_1 \cos \beta_1$, $K_1 \cos \gamma_1$ u. s. f. Dadurch erhält man freilich die dreifache Anzahl der Kräfte, die aber nun in drei ganz bestimmten Richtungen liegen. Dann können die in die x-Richtung fallenden Seitenkräfte $K_1 \cos \alpha_1$, $K_2 \cos \alpha_2 \ldots K_n \cos \alpha_n$ durch eine einzige in derselben Richtung wirkende Kraft X gleich der algebraischen Summe der Seitenkräfte

$$X = K_1 \cos \alpha_1 + K_2 \cos \alpha_2 + \ldots . + K_n \cos \alpha_n,$$

was man kürzer schreibt $X = \Sigma K \cos \alpha$, ersetzt werden, während sich in den anderen Richtungen in gleicher Weise ergiebt:

$$Y = \Sigma K \cos \beta; \; Z = \Sigma K \cos \gamma.$$

Die drei rechtwinklig zu einander stehenden Seitenkräfte X, Y, Z lassen sich nun durch ihre geometrische Summe

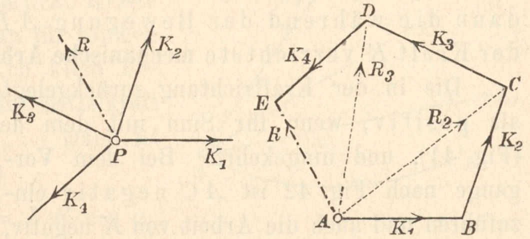
$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

ersetzen, welche mit den drei Achsenrichtungen die Winkel α, β und γ einschliesst. Da nun X die Seitenkraft von R in der x-Richtung, also $X = R \cos \alpha$, so wird $\cos \alpha = \frac{X}{R}$, ebenso $\cos \beta = \frac{Y}{R}$,

$\cos \gamma = \frac{Z}{R}$. Damit ist die Mittelkraft R nach Grösse und Richtung bestimmt. Da in den algebraischen Summen auf die Reihenfolge der Summanden nichts ankommt, so ist die Reihenfolge in der Zusammensetzung der Kräfte gleichgültig.

Auch durch Zeichnung kann man beliebig viele, beispielsweise vier Kräfte K_1 bis K_4 zusammensetzen. Von einem beliebigen Punkte A aus setze man in einer Hülfsfigur 40a zuerst K_1 und K_2 zu einem Streckenzuge zusammen; dann ist die Schlusslinie $AC = R_2$ die Mittelkraft beider. Mit dieser fügt man

Fig. 40. Fig. 40a.



in gleicher Weise K_3 zusammen, indem man den Streckenzug R_2, K_3 mit der Mittelkraft $R_3 = AD$ bildet. Daran schliesst sich in gleicher Weise K_4. Die Strecke AE, welche dann den gesammten Streckenzug der Kräfte K_1 bis K_4 schliesst, ist offenbar die Mittelkraft R der gegebenen Seitenkräfte und ergiebt sich wiederum als die geometrische Summe der Kräfte. Verlegt man diese nach Grösse, Richtung und Sinn bestimmte Mittelkraft an den Massenpunkt m bei P (Fig. 40), so ist die Aufgabe gelöst. Die Hülfsfigur 40a heisst (nach G. Lang) das Krafteck. Diese Figur ist leicht zu zeichnen, wenn die gegebenen Kräfte in derselben Ebene, der Zeichenebene, liegen. Man erkennt aber leicht, dass, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, das Krafteck grundsätzlich seine Bedeutung beibehält; nur bildet der Streckenzug der Kräfte dann ein räumliches Krafteck; aber immerhin stellt die Schlusslinie, die geometrische Summe der Kräfte, auch in solchen Fällen ihre Mittelkraft dar, deren zeichnerische Bestimmung dann freilich die Auftragung in Grundriss und Aufriss nach den Lehren der darstellenden Geometrie erfordert. Ist die Schlusslinie = Null, so halten sich die Kräfte im Gleichgewichte. Weiteres s. S. 65.

7. Mechanische Arbeit einer Kraft.

Ein Massenpunkt m führe unter Einwirkung beliebiger Kräfte eine Bewegung von A nach B aus (Fig. 41). Eine der wirkenden