Die Seitengeschwindigkeiten sind:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = a \sin t = \frac{a}{b} y$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = b \cos t = b\left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Für $t = 0$ ist $x = y = 0$; $v_x = 0$; $v_y = b$ (entsprechend dem Punkte A);
für $t = {}^1/_2\,\pi = 1{,}57$ Sek. ist $\sin t = 1$, $\cos t = 0$,

$x = a$; $y = b$; $v_x = a$; $v_y = 0$, entsprechend dem Punkte B;

für $t = \pi = 3{,}14$ Sek. ist $\sin t = 0$, $\cos t = -1$,

$x = 2\,a$; $y = 0$; $v_x = 0$; $v_y = -b$, entsprechend dem Punkte C;

für $t = {}^3/_2\,\pi$ ist $\sin t = -1$, $\cos t = 0$,

$x = a$; $y = -b$; $v_x = -a$; $v_y = 0$, entsprechend dem Punkte D.

Für fortlaufende Zeit nehmen x und y immer wieder dieselben Werthe an, wenn sich t jedes Mal um $2\,\pi$ geändert hat. Die Ellipse wird hiernach fortwährend in derselben Richtung durchlaufen, und ein Umlauf erfordert $2\,\pi$ Sekunden. Für die Beschleunigungen gilt

$$p_x = \frac{dv_x}{dt} = a \cos t = a - x = x_1$$

$$p_y = \frac{dv_y}{dt} = -b \sin t = -y.$$

Die Seitenbeschleunigungen werden also der Grösse nach gemessen durch die Mittelpunkts-Koordinaten des Punktes P, u. zw. ist $p_x = a - x = x_1$ nach rechts, $p_y = -y$ aber, wegen des negativen Zeichens, nach unten gerichtet. Es wird

$$p = \sqrt{(a-x)^2 + y^2} = r = \text{dem Mittelpunkts-Fahrstrahle } PM,$$

u. zw. ist der Sinn von p stets nach dem Mittelpunkte M gerichtet.

4. Physikalische Grundgesetze der Mechanik.

In dem Vorstehenden haben wir die Bewegungen als gegeben angesehen und gewisse kennzeichnende Merkmale und Eigenschaften derselben aufgeführt. Die Betrachtungen waren rein mathematische; wenn auch das Bewegliche als Massenpunkt bezeichnet wurde, so geschah dies nur zur Erleichterung der Vorstellung.

Wollen wir nun aber die Bewegung eines Massenpunktes aus ihren Ursachen, den Kräften, herleiten, so bedürfen wir gewisser physikalischer Grundgesetze, die sich nicht mathematisch beweisen lassen, die auch nicht ohne Weiteres selbstverständlich sind, deren Richtigkeit aber dadurch genügend sichergestellt ist, dass alle Ergebnisse, welche daraus gezogen werden, mit der Beobachtung übereinstimmen (Erfahrungsgesetze).

Der erste Grundsatz ist das von Galilei im Jahre 1638 ausgesprochene Gesetz der Trägheit: Jeder Massenpunkt bleibt im Zustande der Ruhe oder der geradlinigen, gleichförmigen Bewegung, solange er nicht durch äussere Einwirkungen zu einer Aenderung dieses Zustandes veranlasst wird.

Hiernach bedarf ein Massenpunkt zur Fortsetzung einer Bewegung mit gleichbleibender Richtung und Geschwindigkeit keiner äusseren Einwirkung. Zu einer Abweichung aber von der geradlinig-gleichförmigen Bewegung ist eine Ursache, eine Kraft erforderlich. Eine solche Kraftwirkung, der ein Massenpunkt ausgesetzt ist, geht aber, so lehrt die Erfahrung, stets wieder von einem anderen Massenpunkte aus; man kann daher sagen: Unter „Kraft" versteht man die Einwirkung eines Massenpunktes auf die Bewegung eines anderen. — Die Wirkung einer Kraft besteht in einer Grössen- oder Richtungs-Aenderung der Geschwindigkeit eines Massenpunktes.

Eine nach Grösse und Richtung gleichbleibende Beschleunigung, wie sie bei der geradlinigen, gleichförmig beschleunigten Bewegung eines Massenpunktes vorkommt, wird als die Wirkung einer ebenfalls nach Grösse und Richtung gleichbleibenden Kraft angesehen. Richtung und Sinn der Kraft werden als übereinstimmend mit denen der entsprechenden Beschleunigung bezeichnet. Derjenige Massenpunkt aber, von dem die Kraftwirkung ausgeht, ist auf der Richtungslinie der Kraft zu suchen.

Wenn auf denselben Massenpunkt zu verschiedenen Zeiten zwei Kräfte K und K_1 wirken und die Beschleunigungen p bezw. p_1 hervorbringen, so bezeichnet man die Grössen der Kräfte als verhältnisgleich mit den Beschleunigungen, setzt also $\frac{K}{K_1} = \frac{p}{p_1}$ oder $\frac{p}{p_1} = \frac{K}{K_1}$. Wenn aber dieselbe Kraftwirkung, auf verschiedene Massenpunkte ausgeübt, die verschiedenen Beschleunigungen p und p_1 hervorbringt, so erklärt man diese abweichende Wirkung aus der verschiedenen Massengrösse der beiden Punkte, und zwar bezeichnet man diejenige Masse als die grössere, welche durch die gegebene Kraft die kleinere Beschleunigung erfährt, und setzt die Massen m und m_1 in umgekehrtes Verhältnis zu den entstehenden Beschleunigungen p und p_1, also $\frac{m}{m_1} = \frac{p_1}{p}$ oder $\frac{p}{p_1} = \frac{m_1}{m}$. Die Masse eines Körpers ist völlig unveränderlich, wird sogar durch chemische Umwandelung in keiner Weise beeinflusst. Die Beschleunigung aber, die ein Massenpunkt erfährt, ist, wie die Erfahrung lehrt, nur von ihrer Ursache, der Kraftgrösse, und von der Masse des Punktes abhängig. Da nun nach dem Vorstehenden die Beschleunigung einmal in gleichem Verhältnisse zu der Kraft, ein anderes Mal im umgekehrten Verhältnisse zu der Masse steht, so gelangt man zu dem zweiten Grundgesetze, dem Beschleunigungsgesetze: Jede Kraft K, die auf einen Punkt von der Masse m wirkt, ertheilt diesem eine Beschleunigung p, welche verhältnisgleich der Kraft und umgekehrt verhältnisgleich der Masse ist.

Man kann hiernach setzen $p = a \cdot \frac{K}{m}$. Darin bedeutet a eine Zahl, die sich offenbar nach den für die Beschleunigung, Kraft und Masse gewählten Einheiten richtet. Umgekehrt kann man aber auch den Werth a willkürlich annehmen, wenn man zugleich auf die freie Wahl einer der drei Einheiten, z. B. der Masseneinheit, verzichtet. Man hat es nun zweckmässig gefunden, $a = 1$ zu setzen, so dass einfach

1) $$p = \frac{K}{m},$$

$\text{Beschleunigung} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}$ sich ergiebt. Dies Grundgesetz ist 1687 von Newton ausgesprochen.

Die Beschleunigung messen wir in der Regel nach $\frac{\text{m}}{\text{s.}^2}$; wenn später in einzelnen Fällen es zweckmässig wird, diese Grösse in $\frac{\text{cm}}{\text{s.}^2}$ auszudrücken, so ergiebt sich leicht, welche sonstige Änderung damit verbunden ist.

Wie man die Krafteinheit zweckmässig wählt und wie daraus dann die Masseneinheit sich von selbst ergiebt (in Folge der willkürlichen Setzung $a = 1$), kann erst mit Hülfe des folgenden Grundgesetzes erklärt werden.

Drittes Grundgesetz, Gesetz der Schwere: Die Erde übt auf jeden Massenpunkt an ihrer Oberfläche eine Kraft aus, welche lothrecht abwärts gerichtet ist und jedem Massenpunkte die gleiche Beschleunigung ertheilt. Diese Kraft heisst die Schwerkraft oder das Gewicht des Massenpunktes, und die völlig gleiche Beschleunigung g heisst die Beschleunigung der Schwere oder die Fallbeschleunigung.

Ist also Q das Gewicht einer Masse m, so ergiebt sich hiernach $g = Q : m$, oder — weil g für alle Massen gleich — es ist das Gewicht eines Massenpunktes seiner Masse verhältnisgleich und umgekehrt.

2) $$Q = mg.$$

Die Fallbeschleunigung g ist für verschiedene Punkte der Erdoberfläche allerdings etwas verschieden, aus Gründen, die später erläutert werden sollen; es ändert das aber an dem vorstehenden Gesetze nichts; denn dieses soll zunächst nur ausdrücken, dass an derselben Stelle der Erdoberfläche verschiedene Massenpunkte übereinstimmende Fallbeschleunigung g erfahren, dass die auf die Massen ausgeübten Schwerkräfte verhältnisgleich ihren Massen sind.

Unter 45 ^{0} geographischer Breite und in der Höhe des Meeresspiegels beträgt die Fallbeschleunigung $g_{45} = 9{,}806 \frac{\text{m}}{\text{s.}^2}$. In Berlin ist $g = 9{,}813$, in Hannover $= 9{,}812$ (S. 94).

Das Gewicht eines Liters Wasser im Zustande der grössten Dichte (bei etwa 4 ^{0} C.) heisst das Kilogramm und dient als Gewichtseinheit. Da dieser Wasserkörper eine ganz bestimmte Masse enthält, so ist seine Schwere Q wegen der Veränderlichkeit von g an verschiedenen Stellen der Erdoberfläche etwas verschieden. Das Gewicht eines Liters Wasser (bei 4 ^{0} C.) an denjenigen Stellen der Erde, wo $g = 9{,}806 \frac{\text{m}}{\text{s.}^2}$ beträgt, wählen wir zur Krafteinheit und bezeichnen es als Kilogramm ($^{\text{kg}}$). — An anderen Stellen der Erde wird das Gewicht eines Liters Wasser dann von 1 $^{\text{kg}}$ etwas verschieden ausfallen, sich nämlich verhältnisgleich mit g ändern. Für technische Anwendungen kann diese Veränderlichkeit meist unberücksichtigt bleiben, indem man für die meisten Fälle einfach $g = 9{,}81$ setzt. Nur grundsätzlich muss die

Stelle der Erde bezeichnet werden, wo das Gewicht von 1 ¹ Wasser gleich unserer technischen Krafteinheit, dem Kilogramm, ist.

Um nun die Masseneinheit kennen zu lernen, brauchen wir in der Gleichung $Q = m g_{45}$ nur $m = 1$ zu setzen, dann wird das Gewicht dieser Masseneinheit $Q_1 = g_{45} = 9{,}806^{\text{kg}}$.

Die Masseneinheit ist also ein Körper, der unter 45^0 geographischer Breite $9{,}806^{\text{kg}}$ wiegt, oder die in 9,806 Litern Wasser von 4^0 C. enthaltene Masse.

Mafseinheiten der Physik. Da die Masse eines Körpers völlig unveränderlich ist, so liegt es eigentlich näher, einen Wasserkörper von abgerundeten Mafsen als Masseneinheit zu Grunde zu legen, wonach dann in Folge der Gleichung 1 (S. 32) mit $K = 1$ und $m = 1$ auch $p = 1$ werden, d. h. diejenige Kraft zur Krafteinheit werden würde, welche der Masseneinheit eine Beschleunigung 1 ertheilt. So bezeichnet die neuere Physik die Masse eines Kubikcentimenters Wasser als Masseneinheit und nennt diese Masseneinheit das Gramm. Als Längeneinheit dient das Centimeter, als Zeiteinheit die Sekunde, sodass die Beschleunigung nach $\frac{\text{cm}}{\text{s.}^2}$ gemessen wird. Die Krafteinheit der Physik, die Dyne, ist diejenige Kraft, welche einem Kubikcentimeter Wasser eine Beschleunigung $= 1 \frac{\text{cm}}{\text{s.}^2}$ ertheilt. Das Gewicht eines Kubikcentimeters Wasser, d. h. $\frac{1}{1000}$ unserer Krafteinheit, ertheilt diesem Körper die Beschleunigung $g = 981 \frac{\text{cm}}{\text{s.}^2}$, ist also gleich 981 Dynen; unsere Krafteinheit, das Kilogramm, daher gleich 981 000 Dynen. Für die technische Anwendung der Mechanik ist die Wahl dieser Krafteinheit, wenngleich sie wissenschaftlich grosse Vorzüge besitzt, nicht recht zweckmässig. Bei den Aufgaben des Technikers kommt es meist darauf an, Schwerkräfte zu benutzen, oder ihnen entgegen zu wirken. Diese Schwerkräfte sind dann unmittelbar in Kilogrammen gegeben, und die Endergebnisse müssen für die Ausführung auch meist Gewichte oder sonstige Kräfte in Kilogrammen ausdrücken. Es würden daher bei den Aufgaben häufig Umwandelungen von Kilogrammen in Dyne und umgekehrt erforderlich werden. Aehnliche Umwandelungen müssen, streng genommen, freilich auch bei der Wahl unserer Krafteinheit ausgeführt werden, wenn die fraglichen Körper sich nicht unter 45^0 geographischer Breite befinden, sondern an einem Orte, wo g von 9,806 abweicht. Doch sind diese Abweichungen meist so gering, dass sie für die Anwendung keine Bedeutung haben.

Viertes Grundgesetz; Gesetz der Wechselwirkung. Die Kräfte, mit denen zwei Massenpunkte auf einander wirken, treten stets paarweise in gleicher Grösse aber entgegengesetztem Sinne auf. Es wurde schon erwähnt (S. 31), dass eine Kraft K, die auf einen Massenpunkt m wirkt, von irgend einem anderen, in der Richtungslinie der Kraft befindlichen Massenpunkte m_1 ausgehen müsse. Die Erfahrung lehrt nun aber, dass dann m auf m_1 dieselbe Kraft K, nur in entgegengesetztem Sinne (mit entgegengesetztem Pfeile) ausübt. Dies Gesetz wurde schon von Galilei (! 1564 zu Pisa, † 1642 zu Arcetri) und Huyghens (! 1629 im Haag, † 1695 daselbst) angewandt, ist aber erst von Newton (! 1643 zu Woolstorpe, † 1726 zu Kensington) im Jahre 1687 bestimmt ausgesprochen worden.

Beispiel: Der auf S. 13 behandelte Eisenbahnzug erfuhr bei der sog. Anfahrt eine Beschleunigung $p = 0{,}14 \frac{\text{m}}{\text{s.}^2}$. Wenn nun das Gewicht des ganzen Eisenbahnzuges 200 000 kg beträgt, wie gross ist dann die zur Beschleunigung erforderliche Kraft K? Die Masse des Zuges ist $m = 200\,000 : g$ Masseneinheiten, mithin ist $K = mp = 200\,000\; p : g$. Für solche Stellen der Erde, für welche $g = 9{,}81$ gesetzt werden kann, ist $^1/_g = 0{,}102$ mithin

$$K = 200\,000 \cdot 0{,}14 \cdot 0{,}102 = 2856 \text{ kg}.$$

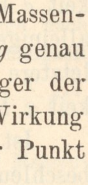
Setzt man annähernd $g = 10$, $^1/_g = 0{,}1$, was für überschlägliche Rechnungen zulässig, so wird $K = 2800$ kg.

Beispiel: Das auf S. 14 behandelte Geschoss erfuhr eine Beschleunigung $p = 100\,000$. Wie gross ist die Ausdehnungskraft der Pulvergase, wenn das Geschoss 20 g $= 0{,}02$ kg wiegt? Es ist $m = 0{,}02 : 9{,}81 = 2 : 981$, mithin $K = 2 \cdot 100\,000 : 981 = 204$ kg; für $g = 10$ wird $K = 200$.

5. Geradlinige Bewegung unter alleiniger Einwirkung der Schwere.

Hält man einen Punkt von der Masse m ruhend zwischen den Fingern, so wird die Schwerkraft durch die Muskelkraft der Finger aufgehoben, indem die Kraftwirkungen der Finger auf den Massenpunkt eine Gesammtkraft ausüben, welche dem Gewichte mg genau gleich und entgegengesetzt ist. Oeffnet man aber die Finger der Hand nach unten, so kommt die Schwere zur alleinigen Wirkung und ertheilt dem Massenpunkte die Beschleunigung g. Der Punkt hatte vorher keine Bewegung, d. h. die Geschwindigkeit $c = o$; es entsteht nun eine gleichförmig beschleunigte Bewegung in der Richtung der Schwere, also lothrecht abwärts. Nach t Sekunden ist die Geschwindigkeit im Punkte P (Fig. 34) nach Gl. 2, S. 11:

Fig. 34.



1) $$v = gt,$$

die zurückgelegte Wegeslänge

2) $$s = {}^1/_2\, g t^2 \text{ (nach Gl. 4, S. 12).}$$