$RT = p\,dt$ und $TS = q\,dt$. Mithin muss auch r die Schlusslinie eines Streckenzuges aus p und q sein. Damit ist der Satz vom Dreieck oder Parallelogramm der Beschleunigungen allgemein bewiesen. Die Erweiterung zum Satze vom Parallelepiped bezw. räumlichen Viereck der Beschleunigungen hat keine Schwierigkeit.

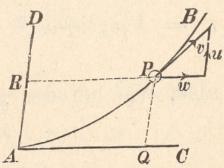
Erfährt aber die Bahnlinie AB nicht eine einfache Parallelverschiebung, sondern eine allgemeinere Bewegung, so werden die Beziehungen der wahren oder Mittelbewegung verwickelter; dieser schwierigere Fall wird erst später in der Allgemeinen Mechanik behandelt.

d) Zerlegung von Bewegungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Wie man aus 2 bezw. 3 gleichzeitigen Seitenbewegungen mit Hülfe der Gesetze vom Dreieck bezw. Viereck der Bewegungen die Mittelbewegung finden konnte, wie ferner die Seitengeschwindigkeiten und Beschleunigungen zu den Mittel-Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sich zusammensetzen liessen, so kann auch umgekehrt jede Bewegung eines Massenpunktes in der Ebene oder im Raume in 2 bezw. 3 geradlinige Seitenbewegungen zerlegt oder durch diese ersetzt werden, und das Gleiche gilt auch bezüglich der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Ist z. B. die Bewegung eines Massenpunktes in einer ebenen Kurve AB gegeben (Fig. 31), kennen wir also für jeden Zeitwerth t den Ort P des Punktes in der Kurve, so kann man durch A zwei mit der Kurve in derselben Ebene liegende Gerade AC und AD legen und nach deren Richtungen die gegebene Bewegung zerlegen. Sind PQ und PR parallel zu AC und AD, so kann die gegebene Bewegung AP vollständig durch die Seitenbewegungen ersetzt werden, sobald nur deren Bewegungsgesetze so geregelt sind, dass für jeden Zeitpunkt t die Orte P, Q und R der fraglichen Bewegungen einem solchen Parallelogramme $AQPR$ angehören. Wird aus der Geschwindigkeit v der gegebenen Bewegung und den Seitenrichtungen AC und AD ein Dreieck gezeichnet, so sind die zu AC und AD parallelen Seiten zugleich die Geschwindigkeiten w und u der Seiten-

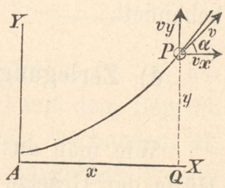
Fig. 31.



bewegungen, oder es ist v in die Seitengeschwindigkeiten w und u zerlegt.

Für die Behandlung krummliniger Bewegungen bietet eine solche Zerlegung ausserordentliche Erleichterung; sie schliesst sich auch unmittelbar dem Verfahren der analytischen Geometrie an, welche ja auch einen Punkt P in eine Ebene durch 2 Koordinaten x und y gegen 2 Achsenrichtungen festlegt. In den meisten Fällen legt man die Achsen rechtwinklig zu einander.

Fig. 32.



Soll die Bewegung des Punkes P (Fig. 32) in der xy-Ebene völlig bekannt sein, so muss man für jeden Zeitpunkt t sowohl x als auch y kennen, oder es müssen x und y als Funktionen von t gegeben sein. Jede der Funktionen $x = f(t)$ und $y = \varphi(t)$ kann aber für sich allein als das Gesetz einer geradlinigen Seitenbewegung aufgefasst werden, und zwar würden für den Zeitpunkt t die Seitenbewegungen $AQ = x$ und $PQ = y$ sein, deren Vereinigung den Massenpunkt richtig nach seinem Orte P führt. Diese beiden Bewegungsgleichungen bestimmen die Bewegung des Massenpunktes vollständig und in einfachster Weise. Bezeichnet man die Seitengeschwindigkeiten in den beiden Achsenrichtungen mit v_x und v_y, ebenso die Seitenbeschleunigungen mit p_x und p_y, so ist nach S. 6

$v_x = \frac{dx}{dt}$; $v_y = \frac{dy}{dt}$. Für die wahre Geschwindigkeit gilt dann

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt},$$

also, wie bei der geradlinigen Bewegung $v = \frac{ds}{dt}$. Ferner ist

$$\operatorname{tg} a = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx},$$

d. h. die Richtung der Geschwindigkeit v stimmt mit der Richtung der Bewegung überein.

Nach S. 15 ist

$$p_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad p_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2};$$

für die wahre Beschleunigung gilt

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt}\right)^2} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p_y}{p_x} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{d^2x}{dt^2}}.$$

Da dieser Werth im Allgemeinen von $\operatorname{tg} a = \frac{dy}{dx}$ verschieden ist, so fallen, wie bereits S. 25 besprochen, die Richtungen der Beschleunigung und der Bewegung im Allgemeinen nicht zusammen.

Erfolgt die Bewegung des Massenpunktes nicht in einer Ebene, sondern in einer räumlichen Kurve, so sind die 3 rechtwinkligen Koordinaten des Ortes P als Funktionen der Zeit auszudrücken, und es können dann wieder die Gleichungen $x = f(t)$; $y = \varphi(t)$; $z = \psi(t)$ als Gesetze dreier Seitenbewegungen aufgefasst werden, deren Zusammenwirken die räumliche Bewegung des Massenpunktes vollständig wiedergiebt. Es entsteht in ähnlicher Weise

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}; \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{ds}{dt};$$

ferner nach S. 23

$$\cos a = \frac{v_x}{v} = \frac{dx}{ds}; \quad \cos \beta = \frac{v_y}{v} = \frac{dy}{ds}; \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{v} = \frac{dz}{ds}.$$

Für die Beschleunigungen ergiebt sich das Entsprechende.

Beispiel: Für eine ebene Bewegung sind gegeben die Gleichungen

$$x = a\,(1 - \cos t); \quad y = b \sin t.$$

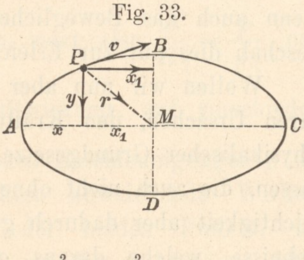
Um hieraus die Gleichung der Bahnlinie zu finden, entferne man t. Es wird

$$\cos t = \frac{a - x}{a}; \quad \sin t = \frac{y}{b},$$

mithin durch Quadriren und Zusammenzählen:

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 = \frac{(a - x)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Fig. 33.



Dies ist die Gleichung einer Ellipse (Fig. 33), aber nicht bezogen auf den Mittelpunkt M, sondern auf den Endpunkt A der Halbachse a. Denn sobald man $a - x = x_1$ setzt, wird aus obiger Gleichung die bekannte Formel $1 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

Die Seitengeschwindigkeiten sind:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = a \sin t = \frac{a}{b} y$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = b \cos t = b\left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Für $t = 0$ ist $x = y = 0$; $v_x = 0$; $v_y = b$ (entsprechend dem Punkte A);
für $t = {}^1/_2\,\pi = 1{,}57$ Sek. ist $\sin t = 1$, $\cos t = 0$,

$x = a$; $y = b$; $v_x = a$; $v_y = 0$, entsprechend dem Punkte B;
für $t = \pi = 3{,}14$ Sek. ist $\sin t = 0$, $\cos t = -1$,

$x = 2a$; $y = 0$; $v_x = 0$; $v_y = -b$, entsprechend dem Punkte C;
für $t = {}^3/_2\,\pi$ ist $\sin t = -1$, $\cos t = 0$,

$x = a$; $y = -b$; $v_x = -a$; $v_y = 0$, entsprechend dem Punkte D.

Für fortlaufende Zeit nehmen x und y immer wieder dieselben Werthe an, wenn sich t jedes Mal um 2π geändert hat. Die Ellipse wird hiernach fortwährend in derselben Richtung durchlaufen, und ein Umlauf erfordert 2π Sekunden. Für die Beschleunigungen gilt

$$p_x = \frac{dv_x}{dt} = a \cos t = a - x = x_1$$

$$p_y = \frac{dv_y}{dt} = -b \sin t = -y.$$

Die Seitenbeschleunigungen werden also der Grösse nach gemessen durch die Mittelpunkts-Koordinaten des Punktes P, u. zw. ist $p_x = a - x = x_1$ nach rechts, $p_y = -y$ aber, wegen des negativen Zeichens, nach unten gerichtet. Es wird

$$p = \sqrt{(a-x)^2 + y^2} = r = \text{dem Mittelpunkts-Fahrstrahle } PM,$$

u. zw. ist der Sinn von p stets nach dem Mittelpunkte M gerichtet.

4. Physikalische Grundgesetze der Mechanik.

In dem Vorstehenden haben wir die Bewegungen als gegeben angesehen und gewisse kennzeichnende Merkmale und Eigenschaften derselben aufgeführt. Die Betrachtungen waren rein mathematische; wenn auch das Bewegliche als Massenpunkt bezeichnet wurde, so geschah dies nur zur Erleichterung der Vorstellung.

Wollen wir nun aber die Bewegung eines Massenpunktes aus ihren Ursachen, den Kräften, herleiten, so bedürfen wir gewisser physikalischer Grundgesetze, die sich nicht mathematisch beweisen lassen, die auch nicht ohne Weiteres selbstverständlich sind, deren Richtigkeit aber dadurch genügend sichergestellt ist, dass alle Ergebnisse, welche daraus gezogen werden, mit der Beobachtung übereinstimmen (Erfahrungsgesetze).