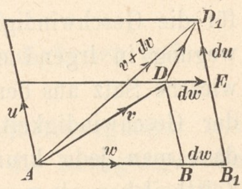
Die Beschleunigung p der krummlinigen Bewegung $A\,D\,D_1$ im Zeitpunkte t bezeichnet man nun als $p = du : dt$, d. h. als die geometrische Abgeleitete von v nach t und als mit der Richtung von du übereinstimmend. Die Beschleunigung weicht hiernach bei krummliniger Bewegung stets von der Bewegungsrichtung (v) ab.

Bei der Zusammensetzung zweier beliebigen geradlinigen Seitenbewegungen ist nun die Geschwindigkeit $v = A\,D$ im Zeitpunkte t (Fig. 28) die Mittelgeschwindigkeit aus w und u, die Geschwindigkeit $v + dv = A\,D_1$ im Zeitpunkte $t + dt$ die Mittelgeschwindigkeit aus $w + dw$ und $u + du$. Legt man beide Streckenzüge so aufeinander, dass v und $v + dv$ gemeinsamen Anfangspunkt A haben, so ist $D\,D_1$ die geometrische Differenz von $v + dv$ und v, oder die Elementarbeschleunigung $= r dt$, wenn r die Beschleunigung. $D\,D_1$ ist aber die Schlussseite eines aus $dw = p\,dt$ und $du = q\,dt$ gebildeten Streckenzuges $D\,E\,D_1$. Dasselbe Verhältnis muss also auch zwischen v, p und q bestehen; mithin gilt auch für zwei beliebige geradlinige Seitenbewegungen das auf S. 23 unter 1 ausgesprochene Gesetz für die Beschleunigung.

Fig. 28.



Für die Berechnung der Grösse und Richtung der Mittelbeschleunigung r gelten dieselben Formeln wie für die Geschwindigkeit (S. 21); man braucht in denselben nur w, u und v mit p, q und r zu vertauschen.

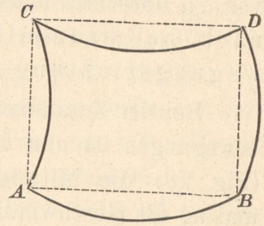
Ähnliche Betrachtungen, wie solche bezüglich der Geschwindigkeiten (S. 22 und 23) angestellt wurden, führen auch leicht zum Satze vom Parallelepiped oder Viereck der Beschleunigungen.

c) Zusammensetzung krummliniger Seitenbewegungen.

Die im Vorstehenden ausführlich entwickelten Gesetze für die Zusammensetzung von zwei oder drei Bewegungen, deren Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bleiben auch noch gültig, wenn die Seitenbewegungen nicht geradlinig, sondern krummlinig erfolgen. Unerlässliche Bedingung hierfür ist aber, dass die bewegliche Bahnlinie eine reine Parallelverschiebung erfahre.

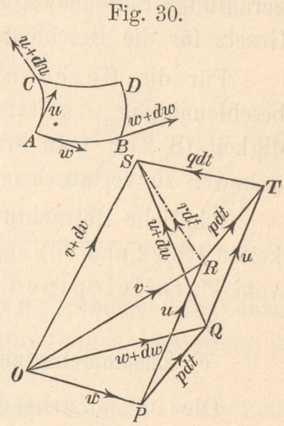
Bewegt sich der Massenpunkt in der Bahnlinie AB (Fig. 29), während diese eine Verschiebung in die Lage CD erfährt, so erkennt man leicht, dass D der Ort des Massenpunktes nach der Bewegung sein muss, und dass es gleichgültig ist, ob man den Punkt D mittels der wahren Bewegungslinien AB, AC und BD festlegt, oder ob man die Sehnen AB, AC und BD benutzt und aus ihnen ein Parallelogramm oder einen Streckenzug ABD bildet. Auch für die Geschwindigkeit v der wahren Bewegung in irgend einem Zeitpunkte t muss der früher (S. 21) bewiesene Satz aus dem Grunde gültig bleiben, weil mit dem Begriffe der Geschwindigkeit grundsächlich die Vorstellung verbunden ist, dass man jede krummlinige Bewegung für ein unendlich kleines Zeittheilchen als geradlinig und gleichförmig betrachten darf, sodass man es in jedem Zeitpunkte nur mit der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten solcher einfachen Bewegungen zu thun hat.

Fig. 29.



Dass auch bezüglich der Beschleunigungen das Entsprechende gilt, ergiebt sich durch folgende Betrachtung: AB und AC (Fig. 30) seien die Seitenbewegungen während eines Zeittheilchens; w und $w + dw$ bezw. u und $u + du$ die Seitengeschwindigkeiten zu Anfang und zu Ende desselben. Man trage w und $w + dw$ von einem Punkte O aus auf. Setze daran die Strecken $PR = u$ bezw. $QS = u + du$. Dann ist $OR = v$ die wahre Geschwindigkeit im Zeitpunkte t, $OS = v + dv$ diejenige im Zeitpunkte $t + dt$. Darnach wird dann $RS = r\,dt$ die Elementarbeschleunigung und $r = RS : dt$ die Beschleunigung der Mittelbewegung; $PQ = p\,dt$ ist die Elementarbeschleunigung der ersten Seitenbewegung. Macht man nun $QT =$ und $\parallel PR = u$, so wird $TS = q\,dt$ die zweite Elementarbeschleunigung, und weil

Fig. 30.



$$RT \# PQ = p\,dt,$$

so erscheint $RS = r\,dt$ als Schlusslinie eines Streckenzuges aus

$RT = p\,dt$ und $TS = q\,dt$. Mithin muss auch r die Schlusslinie eines Streckenzuges aus p und q sein. Damit ist der Satz vom Dreieck oder Parallelogramm der Beschleunigungen allgemein bewiesen. Die Erweiterung zum Satze vom Parallelepiped bezw. räumlichen Viereck der Beschleunigungen hat keine Schwierigkeit.

Erfährt aber die Bahnlinie AB nicht eine einfache Parallelverschiebung, sondern eine allgemeinere Bewegung, so werden die Beziehungen der wahren oder Mittelbewegung verwickelter; dieser schwierigere Fall wird erst später in der Allgemeinen Mechanik behandelt.

d) Zerlegung von Bewegungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Wie man aus 2 bezw. 3 gleichzeitigen Seitenbewegungen mit Hülfe der Gesetze vom Dreieck bezw. Viereck der Bewegungen die Mittelbewegung finden konnte, wie ferner die Seitengeschwindigkeiten und Beschleunigungen zu den Mittel-Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sich zusammensetzen liessen, so kann auch umgekehrt jede Bewegung eines Massenpunktes in der Ebene oder im Raume in 2 bezw. 3 geradlinige Seitenbewegungen zerlegt oder durch diese ersetzt werden, und das Gleiche gilt auch bezüglich der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Ist z. B. die Bewegung eines Massenpunktes in einer ebenen Kurve AB gegeben (Fig. 31), kennen wir also für jeden Zeitwerth t den Ort P des Punktes in der Kurve, so kann man durch A zwei mit der Kurve in derselben Ebene liegende Gerade AC und AD legen und nach deren Richtungen die gegebene Bewegung zerlegen. Sind PQ und PR parallel zu AC und AD, so kann die gegebene Bewegung AP vollständig durch die Seitenbewegungen ersetzt werden, sobald nur deren Bewegungsgesetze so geregelt sind, dass für jeden Zeitpunkt t die Orte P, Q und R der fraglichen Bewegungen einem solchen Parallelogramme $AQPR$ angehören. Wird aus der Geschwindigkeit v der gegebenen Bewegung und den Seitenrichtungen AC und AD ein Dreieck gezeichnet, so sind die zu AC und AD parallelen Seiten zugleich die Geschwindigkeiten w und u der Seiten-

Fig. 31.