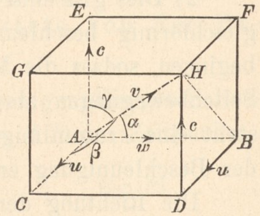
Stehen die 3 Seitengeschwindigkeiten rechtwinklig zu einander (Fig. 25), so wird die wahre (resultirende) oder Mittelgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{w^2 + u^2 + c^2},$$

Fig. 25.

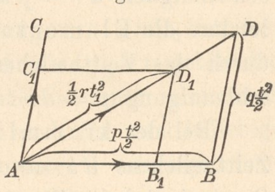


und für die Neigungswinkel α, β und γ der Geschwindigkeit v gegen die Richtungen w, u und c ergiebt sich, weil die Seitenfläche $BDHF$ rechtwinklig zu w steht, also auch $\measuredangle\ ABH$ ein Rechter, $\cos\alpha = w : v$; ebenso $\cos\beta = u : v$ und $\cos\gamma = c : v$.

b) Zusammensetzung der Beschleunigungen.

1) Ein Massenpunkt habe zwei gleichförmig beschleunigte Seitenbewegungen AB und AC, welche beide mit den Geschwindigkeiten Null beginnen. Die Beschleunigungen seien p und q (Fig. 26); dann ist in t Zeiteinheiten (nach Gl. 5, S. 12):

Fig. 26.



$$AB = {}^1\!/_2\, p\, t^2;\quad BD = {}^1\!/_2\, q\, t^2,$$

in t_1 Zeiteinheiten:

$$AB_1 = {}^1\!/_2\, p\, t_1{}^2;\quad B_1D_1 = {}^1\!/_2\, q\, t_1{}^2.$$

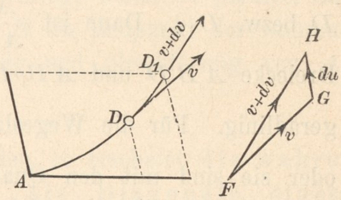
Die wahren Orte des Massenpunktes sind D bezw. D_1. Dann ist $\dfrac{AB}{AB_1} = \dfrac{t^2}{t_1{}^2} = \dfrac{BD}{B_1D_1}$; es sind also die Dreiecke ABD und AB_1D_1 ähnlich, daher die wahre Bewegung geradlinig. Für die Wegeslängen gilt aber $\dfrac{AD}{AD_1} = \dfrac{AB}{AB_1} = \dfrac{t^2}{t_1{}^2}$, oder sie sind mit den Quadraten der entsprechenden Zeiten verhältnisgleich. Für ein solches Bewegungsgesetz $s = a\,t^2$ gilt aber $v = 2\,a\,t$, d. h. die Mittelbewegung ist wiederum eine gleichförmig beschleunigte mit der Anfangsgeschwindigkeit Null. Nennt man sodann die Beschleunigung dieser Bewegung r, so kann $AD = {}^1\!/_2\, r\, t^2$, $AD_1 = {}^1\!/_2\, r\, t_1{}^2$ gesetzt werden. Wählt man endlich den beliebigen Zeitraum t_1 so, dass ${}^1\!/_2\, t_1{}^2 = 1$ wird, so werden AB_1, B_1D_1 und AD_1 bezw. zu p, q und r, und es erscheint die Beschleunigung der wahren oder Mittelbewegung, welche kürzer die Mittelbeschleunigung genannt wird, ebenso wie die Geschwindigkeit, als Schlusslinie eines aus den Seitenbeschleunigungen gebildeten Streckenzuges, als geometrische Summe der Seitenbeschleunigungen, oder als Diagonale eines Parallelogramms aus den Seitenbeschleunigungen.

2) Dies gilt einstweilen nur, wenn die beiden Seitenbewegungen gleichförmig beschleunigt sind und mit der Geschwindigkeit Null beginnen, sodass die Mittelbewegung geradlinig wird. Erfolgen die Seitenbewegungen aber nach beliebigen Bewegungsgesetzen, so entsteht eine krummlinige Bewegung, und für diese muss der Begriff der Beschleunigung erst eine Verallgemeineruug erfahren.

Die Richtung der Geschwindigkeit fällt nach Seite 20 mit der Bewegungsrichtung zusammen. Bei einer geradlinigen Bewegung bleibt also die Richtung der Geschwindigkeit dieselbe, es ändert sich nur deren Grösse, und zwar während des Zeittheilchens dt um $dv = p\,dt$. Diese Vergrösserung von v kann man nun auch so auffassen, als ob zu der früheren Geschwindigkeit v eine neue Geschwindigkeit $dv = p\,dt$ hinzugetreten wäre, und man nennt diese letztere die Elementarbescheunigung, welche mittels Theilung durch das Zeittheilchen dt die (auf die Zeiteinheit bezogene) Beschleunigung $p = dv : dt$ liefert.

Bei der krummlinigen Bewegung ändert sich während eines Zeittheilchens dt sowohl die Grösse, wie auch die Richtung der Geschwindigkeit (Fig. 27); diejenige Geschwindigkeit nun, welche mit der im Zeitpunkte t vorhandenen Geschwindigkeit v zusammengesetzt werden muss, um mit ihr die für den Zeitpunkt $t + dt$ geltende Geschwindigkeit $v + dv$ nach Grösse und Richtung zu ergeben, heisst wiederum die Elementarbeschleunigung, welche dann, durch dt getheilt, die Beschleunigung p der krummlinigen Bewegung im Zeitpunkte t nach Grösse und Richtung liefert.

Fig. 27.

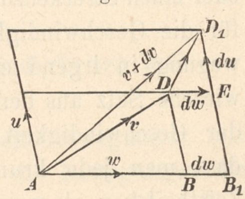


Stellt also in Fig. 27 FG die Geschwindigkeit v im Zeitpunkte t, FH die Gesehwindigkeit $v + dv$ im Zeitpunkte $t + dt$ dar, so ist GH die Elementarbeschleunigung $= du$. Letztere kann offenbar als die geometrische Differenz zwischen $v + dv$ und v, oder weil sie unendlich klein, als das geometrische Differential von v bezeichnet werden.

Die Beschleunigung p der krummlinigen Bewegung $A D D_1$ im Zeitpunkte t bezeichnet man nun als $p = du : dt$, d. h. als die geometrische Abgeleitete von v nach t und als mit der Richtung von du übereinstimmend. Die Beschleunigung weicht hiernach bei krummliniger Bewegung stets von der Bewegungsrichtung (v) ab.

Bei der Zusammensetzung zweier beliebigen geradlinigen Seitenbewegungen ist nun die Geschwindigkeit $v = A D$ im Zeitpunkte t (Fig. 28) die Mittelgeschwindigkeit aus w und u, die Geschwindigkeit $v + dv = A D_1$ im Zeitpunkte $t + dt$ die Mittelgeschwindigkeit aus $w + dw$ und $u + du$. Legt man beide Streckenzüge so aufeinander, dass v und $v + dv$ gemeinsamen Anfangspunkt A haben, so ist $D D_1$ die geometrische Differenz von $v + dv$ und v, oder die Elementarbeschleunigung $= rdt$, wenn r die Beschleunigung. $D D_1$ ist aber die Schlussseite eines aus $dw = p\,dt$ und $du = q\,dt$ gebildeten Streckenzuges $D E D_1$. Dasselbe Verhältnis muss also auch zwischen v, p und q bestehen; mithin gilt auch für zwei beliebige geradlinige Seitenbewegungen das auf S. 23 unter 1 ausgesprochene Gesetz für die Beschleunigung.

Fig. 28.



Für die Berechnung der Grösse und Richtung der Mittelbeschleunigung r gelten dieselben Formeln wie für die Geschwindigkeit (S. 21); man braucht in denselben nur w, u und v mit p, q und r zu vertauschen.

Ähnliche Betrachtungen, wie solche bezüglich der Geschwindigkeiten (S. 22 und 23) angestellt wurden, führen auch leicht zum Satze vom Parallelepiped oder Viereck der Beschleunigungen.

c) Zusammensetzung krummliniger Seitenbewegungen.

Die im Vorstehenden ausführlich entwickelten Gesetze für die Zusammensetzung von zwei oder drei Bewegungen, deren Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bleiben auch noch gültig, wenn die Seitenbewegungen nicht geradlinig, sondern krummlinig erfolgen. Unerlässliche Bedingung hierfür ist aber, dass die bewegliche Bahnlinie eine reine Parallelverschiebung erfahre.