liegende Endpunkt H des aus den drei Seitenbewegungen bestimmten Parallelepipeds oder der Endpunkt des aus den Seitenbewegungen x, y und z gebildeten Streckenzuges $ABDH$ der wahre Ort des Punktes.

Als Beispiel könnten die Bewegungsgesetze: $x = t$; $y = {}^1/_2 t + {}^1/_{10} t^2$; $z = 3t$ benutzt werden.

Im Allgemeinen ist die wahre Bahnlinie eine räumliche Kurve.

a) Zusammensetzung der Geschwindigkeiten.

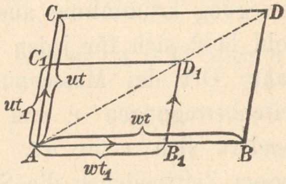
1) Ein Massenpunkt habe zwei gleichförmige, geradlinige Seitenbewegungen mit den Geschwindigkeiten w bezw. u; dann sind die Wegeslängen nach t Zeiteinheiten (Fig. 19)

$$AB = x = wt \text{ und } AC = y = ut;$$

innerhalb eines anderen, etwa kleineren Zeitraumes t_1:

$$AB_1 = x_1 = wt_1 \text{ und}$$
$$AC_1 = y_1 = ut_1.$$

Fig. 19.



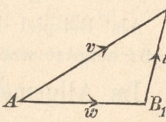
Der wahre Ort nach t bezw. t_1 Zeiteinheiten ergiebt sich durch den Streckenzug ABD bezw. AB_1D_1 zu D bezw. D_1. Es findet aber statt:

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{t}{t_1}; \quad \frac{BD}{B_1D_1} = \frac{t}{t_1}, \text{ also } \frac{AB}{AB_1} = \frac{BD}{B_1D_1},$$

mithin sind die Dreiecke ABD und AB_1D_1 ähnlich, sodass A, D_1 und D auf derselben Geraden liegen müssen. Da dies für alle Werthe von t und t_1 gilt, so muss die wahre oder Mittelbewegung geradlinig erfolgen. Zugleich ist aber auch wegen der Ähnlichkeit $\frac{AD}{AD_1} = \frac{AB}{AB_1} = \frac{t}{t_1}$, oder die Wegeslängen AD und AD_1 sind den entsprechenden Zeiten t und t_1 verhältnisgleich. Die Mittelbewegung aus zwei geradlinigen und gleichförmigen Seitenbewegungen ist hiernach ebenfalls geradlinig und gleichförmig. Ihre Geschwindigkeit v erhält man, indem man den willkürlichen Zeitraum t_1 zur Zeiteinheit werden lässt. Dann wird $AB_1 = w$; $B_1D_1 = u$ und $AD_1 = v$, oder die Geschwindigkeit v der wahren oder Mittelbewegung erscheint als die Schlussseite eines aus den

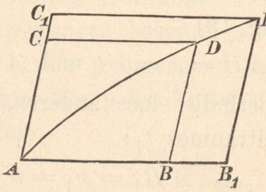
Geschwindigkeiten der Seitenbewegungen gebildeten Streckenzuges (Fig. 20). Der Pfeil der Schlussseite eines Streckenzuges wird stets von dem Anfange nach dem Ende des Streckenzuges verstanden, wie es sich hier bezüglich der Geschwindigkeit v als nothwendig ergiebt. Die in dieser Weise verstandene Schlussstrecke eines Streckenzuges heisst auch die geometrische Summe der Einzelstrecken.

Fig. 20.



2) Sind die beiden Seitenbewegungen nicht gleichförmig, erfolgen sie vielmehr nach beliebigen Bewegungsgesetzen $AB = x = f(t)$ und $AC = y = \varphi(t)$ (Fig. 21), so ändern sich AB und AC im Allgemeinen nicht verhältnisgleich; es wird daher die Mittelbewegung krummlinig ausfallen. Gleichwohl lässt sich für jeden Zeitpunkt t der wahre Ort des Massenpunktes aus den Seitenbewegungen x und y konstruiren. Aendert sich t in dt, so werden in diesem Zeittheilchen die Seitenbewegungen $BB_1 = dx$, $CC_1 = dy$ zurückgelegt, und der Massenpunkt gelangt von D nach D_1. Nun sind aber die Geschwindigkeiten der beiden Seitenbewegungen im Zeitpunkte t: $w = \frac{dx}{dt}$ bezw. $u = \frac{dy}{dt}$. Setzt man hiernach $dx = w\,dt$ und $dy = u\,dt$, so betrachtet man für die Dauer eines Zeittheilchens dt die Seitenbewegungen als gleichförmig, sodass für die augenblickliche Geschwindigkeit v der wahren oder Mittelbewegung die für gleichförmige Bewegungen abgeleitete Fig. 20 gültig bleibt. Die Richtung der Geschwindigkeit v fällt hiernach mit der Sehne DD_1, also, da diese unendlich klein, mit der Richtung der Bahnlinie, d. h. mit der Bewegungsrichtung zusammen. Auch ist, wie bei der geradlinigen Bewegung $v = \frac{DD_1}{dt} = \frac{ds}{dt}$. Die Geschwindigkeiten w und u der Seitenbewegungen nennt man kürzer die Seitengeschwindigkeiten des Massenpunktes, v die wahre oder Mittelgeschwindigkeit. Es gilt also für zwei beliebige geradlinige Seitenbewegungen der Satz vom Parallelogramm oder vom Dreieck der Geschwindigkeiten: Die Mittelgeschwindigkeit ist die

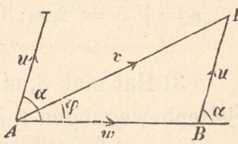
Fig. 21.



Diagonale eines Parallelogrammes aus den Seitengeschwindigkeiten, oder die geometrische Summe der Seitengeschwindigkeiten.

Hiernach kann die Mittelgeschwindigkeit, die wahre oder resultirende Geschwindigkeit durch Zeichnung gefunden werden; will man aber ihre Grösse und Richtung durch Rechnung bestimmen, so bedenke man, dass in dem Dreiecke ABD (Fig. 22)

Fig. 22.



$v^2 = w^2 + u^2 - 2wu \cos ABD$, oder,

weil $\cos ABD = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$,

1) $$v = \sqrt{w^2 + u^2 + 2wu\cos\alpha};$$

ebenso gilt $\sin\varphi : \sin ABD = u : v$, also, weil $\sin ABD = \sin\alpha$,

2) $$\sin\varphi = \sin\alpha\,\frac{u}{v}.$$

Gl. 1 liefert die Grösse, Gl. 2 sodann die Richtung von v. Dabei ist zu bemerken, dass die Strecken w und v stets in der Weise an einander zu setzen sind, dass die Pfeile in dem Zuge ABD übereinstimmenden Umfahrungssinn haben, und dass dann der Pfeil von v stets vom Anfange A nach dem Endpunkte D des Streckenzuges gerichtet ist.

Je kleiner der Winkel α wird, desto mehr nähert sich u der Richtung von AB, desto näher fällt also auch v der Richtung von w. Fallen schliesslich w und u in dieselbe Richtung, so wird $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = 0$ und man erhält $v = w + u$; $\varphi = 0$. In diesem Falle wird die Mittelgeschwindigkeit v, welche allgemein die geometrische Summe von w und u, auch arithmetisch gleich der Summe von w und u.

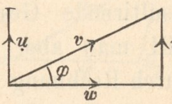
Je mehr sich der Winkel α dem Winkel π nähert, desto niedriger wird wiederum das Geschwindigkeits-Dreieck, desto kleiner wird die Schlussseite v. Ist $\alpha = \pi$, so wird $\cos\alpha = -1$, $\sin\alpha = 0$, mithin, wenn $w > u$ gedacht ist, $v = w - u$; $\varphi = 0$.

In beiden Fällen $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$ wird v die algebraische Summe von w und u, nämlich $w + u$ bezw. $w - u$.

Von besonderer Wichtigkeit ist noch der Fall, wo die beiden Seitengeschwindigkeiten zu einander rechtwinklig stehen (Fig. 23). Es ist dann

$$v = \sqrt{w^2 + u^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = u : w.$$

Fig. 23.

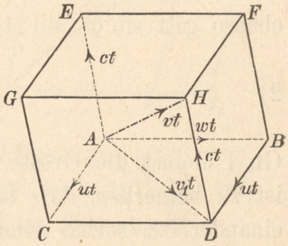


Ist z. B., bezogen auf Sekunden und Meter, $w = 2$, $u = 1$, so wird

$$v = \sqrt{5} = 2{,}236; \quad \operatorname{tg} \varphi = 1/2, \quad \varphi = 26^0\, 34'.$$

3) Hat man 3, nicht in derselben Ebene liegende, **gleichförmige** Seitenbewegungen mit den Geschwindigkeiten w, u und c zusammenzusetzen (Fig. 24), so liefern zunächst zwei derselben, AB und AC, als Mittelbewegung wiederum eine geradlinige gleichförmige Bewegung AD mit der Geschwindigkeit v_1, welche aus dem Streckenzuge AB und BD als AD gefunden wird Fügt man nun zu der Bewegung AD noch die dritte Seitenbewegung AE hinzu, so hat man wiederum 2 geradlinige, gleichförmige Bewegungen zusammenzusetzen; man verlegt daher ct parallel an den Endpunkt D von AD und erhält H als Endpunkt der wahren oder Mittelbewegung, welche geradlinig und gleichförmig von A nach H erfolgen muss.

Fig. 24.



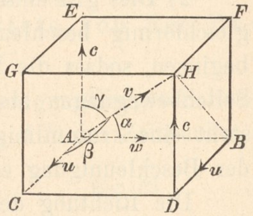
Lässt man in Fig. 24 $t = 1$ werden, so erscheint **die wahre oder Mittelgeschwindigkeit** v **als Diagonale eines Parallelepipeds aus den 3 Seitengeschwindigkeiten, oder als die Schlussseite eines räumlichen, aus den 3 Seitengeschwindigkeiten gebildeten Streckenzuges, welche man auch wiederum die geometrische Summe der Seitengeschwindigkeiten nennen kann.**

Dieser Satz vom Parallelepiped oder (räumlichen) Viereck der Geschwindigkeiten erhält auch Gültigkeit für ungleichförmige Seitenbewegungen, wenn man dieselben Betrachtungen anstellt, wie auf S. 20 bezüglich zweier Seitenbewegungen geschah.

Stehen die 3 Seitengeschwindigkeiten rechtwinklig zu einander (Fig. 25), so wird die wahre (resultirende) oder Mittelgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{w^2 + u^2 + c^2},$$

Fig. 25.

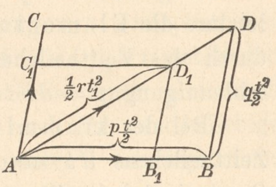


und für die Neigungswinkel α, β und γ der Geschwindigkeit v gegen die Richtungen w, u und c ergiebt sich, weil die Seitenfläche $BDHF$ rechtwinklig zu w steht, also auch $\measuredangle\ ABH$ ein Rechter, $\cos\alpha = w : v$; ebenso $\cos\beta = u : v$ und $\cos\gamma = c : v$.

b) Zusammensetzung der Beschleunigungen.

1) Ein Massenpunkt habe zwei gleichförmig beschleunigte Seitenbewegungen AB und AC, welche beide mit den Geschwindigkeiten Null beginnen. Die Beschleunigungen seien p und q (Fig. 26); dann ist in t Zeiteinheiten (nach Gl. 5, S. 12):

Fig. 26.



$$AB = {}^1\!/_2\, p\, t^2;\quad BD = {}^1\!/_2\, q\, t^2,$$

in t_1 Zeiteinheiten:

$$AB_1 = {}^1\!/_2\, p\, t_1{}^2;\quad B_1 D_1 = {}^1\!/_2\, q\, t_1{}^2.$$

Die wahren Orte des Massenpunktes sind D bezw. D_1. Dann ist $\dfrac{AB}{AB_1} = \dfrac{t^2}{t_1{}^2} = \dfrac{BD}{B_1 D_1}$; es sind also die Dreiecke ABD und AB_1D_1 ähnlich, daher die wahre Bewegung geradlinig. Für die Wegeslängen gilt aber $\dfrac{AD}{AD_1} = \dfrac{AB}{AB_1} = \dfrac{t^2}{t_1{}^2}$, oder sie sind mit den Quadraten der entsprechenden Zeiten verhältnisgleich. Für ein solches Bewegungsgesetz $s = a t^2$ gilt aber $v = 2 a t$, d. h. die Mittelbewegung ist wiederum eine gleichförmig beschleunigte mit der Anfangsgeschwindigkeit Null. Nennt man sodann die Beschleunigung dieser Bewegung r, so kann $AD = {}^1\!/_2 r t^2$, $AD_1 = {}^1\!/_2\, r\, t_1{}^2$ gesetzt werden. Wählt man endlich den beliebigen Zeitraum t_1 so, dass ${}^1\!/_2\, t_1{}^2 = 1$ wird, so werden AB_1, $B_1 D_1$ und AD_1 bezw. zu p, q und r, und es erscheint die Beschleunigung der wahren oder Mittelbewegung, welche kürzer die Mittelbeschleunigung genannt wird, ebenso wie die Geschwindigkeit, als Schlusslinie eines aus den Seitenbeschleunigungen