**Beispiel 2:** Eine geradlinige Bewegung erfolge mit der Beschleunigung $p = 2 + 3t^2$, und es sei für $t = 0$: $v = c = 1\,\frac{\text{m}}{\text{s.}}$, $s_0 = 0$. Dann wird aus

$$dv = (2 + 3t^2)\,dt$$

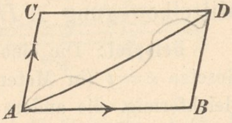
$$v - 1 = \int_0^t (2 + 3t^2)\,dt = 2t + t^3 \quad \text{oder} \quad v = 1 + 2t + t^3 \quad \text{und}$$

$$s = \int_0^t (1 + 2t + t^3)\,dt = t + t^2 + {}^1\!/_4\,t^4.$$

## 3. Zusammensetzung mehrerer gleichzeitigen Bewegungen eines Punktes.

Ein Massenpunkt durchlaufe während der Zeit $t$ die Bahnlinie $AB$ (Fig. 15), und zwar in der Richtung von $A$ nach $B$; diese Bahnlinie gehöre aber einem Körper an, welcher sich derartig parallel verschiebt, dass der Punkt $A$ der Linie $AB$ während der Zeit $t$ die Bewegung $AC$ ausführt und die ganze Bahnlinie $AB$ in die parallele Lage $CD$ kommt. Dann wird der Massenpunkt in Folge der beiden gleichzeitigen Bewegungen aus der Anfangslage $A$ in irgend einer Bahnlinie nach $D$ gelangen, und man nennt diese wahre Bewegung $AD$ die Mittelbewegung oder Resultirende aus den beiden Seitenbewegungen $AB$ und $AC$.

Fig. 15.



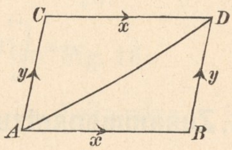

Anstatt diese wahre Bewegung $AD$ als das Ergebnis der Bewegungen $AB$ und $AC$ zu bezeichnen, sagt man auch wohl kürzer, der Massenpunkt führe zwei gleichzeitige Seitenbewegungen aus, womit aber stets nur der beschriebene Vorgang gemeint sein soll. Da die Figur $ABDC$ ein Parallelogramm ist, so ergiebt sich ohne Weiteres der **Satz vom Parallelogramm der Bewegungen:**

Führt ein Massenpunkt gleichzeitig zwei Seitenbewegungen aus, so ist der dem Anfangspunkt $A$ gegenüberliegende Endpunkt des aus den beiden Seitenbewegungen gezeichneten Parallelogramms der wahre Ort des Punktes.

Man denke sich, auf dem Stabe $AB$ ein Sonnenkäferchen entlang laufend, während man den Stab parallel nach $CD$ verschiebt; dann gelangt das Sonnenkäferchen in Wirklichkeit von $A$ nach $D$.

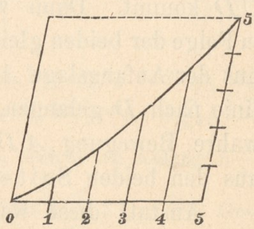
Eine Gerade $AB$ von bestimmter Richtung, bestimmter Grösse und einem Pfeile, der einen bestimmten Bewegungssinn angiebt, nennt man eine Strecke. $AB$ sei die Strecke $x$, $AC$ die Strecke $y$. Zur Bestimmung des Punktes $D$ ist offenbar nicht die Zeichnung des ganzen Parallelogrammes erforderlich; vielmehr genügt es, an den Endpunkt $B$ der Strecke $x$ die parallel verschobene Strecke $BD = y$ anzutragen (Fig. 16). Beide bilden dann einen sog. „Streckenzug“, und man kann sagen: Der wahre Ort $D$ des Punktes ist der Endpunkt des aus den beiden Seitenbewegungen gebildeten Streckenzuges. Die Reihenfolge der Zusammensetzung ist offenbar gleichgültig. Der Streckenzug $AC = y$ und $CD = x$ führt zu demselben Endpunkte $D$.

Fig. 16.




Sind die Gesetze der beiden Seitenbewegungen bekannt, sodass man für jeden Zeitpunkt $t$ die Strecken $x$ und $y$ berechnen kann, so ist auch der Ort des beweglichen Punktes für jeden Zeitwerth $t$ bekannt und damit auch die Bahnlinie der Mittelbewegung $AD$ völlig bestimmt.

Fig. 17.




**Beispiel:** Die eine Seitenbewegung folge dem Gesetze $x = t$ (in Metern und Sekunden), sei also gleichförmig, die andere dem Gesetze

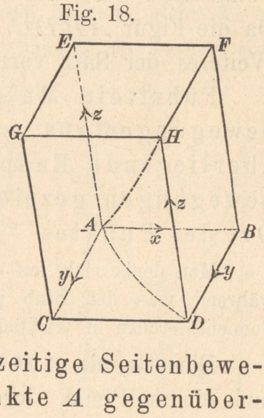
$$y = \frac{1}{2} t + \frac{1}{10} t^2$$

(also gleichförmig beschleunigt). Dann ist für

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $t = 0$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $x = 0$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y = 0$ | 0,6 | 1,4 | 2,4 | 3,6 | 5 |

Die Gleichung der Bahnlinie findet man, indem man $t = x$ in die Gleichung für $y$ einsetzt, $y = \frac{1}{2} x + \frac{1}{10} x^2$. Dies bedeutet eine Parabel als Bahnlinie des Punktes.

Fig. 18.




Erleidet, während die Seitenbewegungen $AB$ und $AC$ erfolgen, die ganze Ebene derselben eine Parallelverschiebung $z$ in der Richtung von $A$ nach $E$ (Fig. 18), so wird der Massenpunkt, der in Folge der beiden Bewegungen $x$ und $y$ nach $D$ gelangen würde, sich nunmehr nach $H$ bewegen, und es folgt der Satz vom Parallelepiped der Bewegungen:

Hat ein Massenpunkt drei gleichzeitige Seitenbewegungen, so ist der dem Anfangspunkte $A$ gegenüberliegende Endpunkt $H$ des aus den drei Seitenbewegungen bestimmten Parallelepipeds oder der Endpunkt des aus den Seitenbewegungen $x$, $y$ und $z$ gebildeten Streckenzuges $ABDH$ der wahre Ort des Punktes.

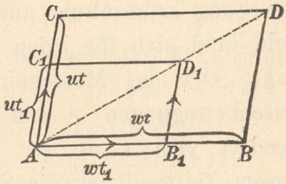
Als Beispiel könnten die Bewegungsgesetze: $x = t$; $y = \frac{1}{2}t + \frac{1}{10}t^2$; $z = 3t$ benutzt werden.

Im Allgemeinen ist die wahre Bahnlinie eine räumliche Kurve.

## a) Zusammensetzung der Geschwindigkeiten.

1) Ein Massenpunkt habe zwei gleichförmige, geradlinige Seitenbewegungen mit den Geschwindigkeiten $w$ bezw. $u$; dann sind die Wegeslängen nach $t$ Zeiteinheiten (Fig. 19)

Fig. 19.




$$AB = x = wt \text{ und } AC = y = ut;$$

innerhalb eines anderen, etwa kleineren Zeitraumes $t_1$:

$$AB_1 = x_1 = wt_1 \text{ und}$$
$$AC_1 = y_1 = ut_1.$$

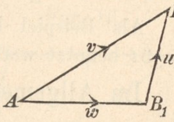
Der wahre Ort nach $t$ bezw. $t_1$ Zeiteinheiten ergiebt sich durch den Streckenzug $ABD$ bezw. $AB_1D_1$ zu $D$ bezw. $D_1$. Es findet aber statt:

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{t}{t_1}; \quad \frac{BD}{B_1D_1} = \frac{t}{t_1}, \text{ also } \frac{AB}{AB_1} = \frac{BD}{B_1D_1},$$

mithin sind die Dreiecke $ABD$ und $AB_1D_1$ ähnlich, sodass $A$, $D_1$ und $D$ auf derselben Geraden liegen müssen. Da dies für alle Werthe von $t$ und $t_1$ gilt, so muss die wahre oder Mittelbewegung geradlinig erfolgen. Zugleich ist aber auch wegen der Ähnlichkeit $\frac{AD}{AD_1} = \frac{AB}{AB_1} = \frac{t}{t_1}$, oder die Wegeslängen $AD$ und $AD_1$ sind den entsprechenden Zeiten $t$ und $t_1$ verhältnisgleich. Die Mittelbewegung aus zwei geradlinigen und gleichförmigen Seitenbewegungen ist hiernach ebenfalls geradlinig und gleichförmig. Ihre Geschwindigkeit $v$ erhält man, indem man den willkürlichen Zeitraum $t_1$ zur Zeiteinheit werden lässt. Dann wird $AB_1 = w$; $B_1D_1 = u$ und $AD_1 = v$, oder die Geschwindigkeit $v$ der wahren oder Mittelbewegung erscheint als die Schlussseite eines aus den

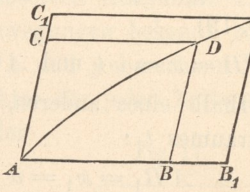
Geschwindigkeiten der Seitenbewegungen gebildeten Streckenzuges (Fig. 20). Der Pfeil der Schlussseite eines Streckenzuges wird stets von dem Anfange nach dem Ende des Streckenzuges verstanden, wie es sich hier bezüglich der Geschwindigkeit $v$ als nothwendig ergiebt. Die in dieser Weise verstandene Schlussstrecke eines Streckenzuges heisst auch die geometrische Summe der Einzelstrecken.

Fig. 20.




2) Sind die beiden Seitenbewegungen nicht gleichförmig, erfolgen sie vielmehr nach beliebigen Bewegungsgesetzen $AB = x = f(t)$ und $AC = y = \varphi(t)$ (Fig. 21), so ändern sich $AB$ und $AC$ im Allgemeinen nicht verhältnisgleich; es wird daher die Mittelbewegung krummlinig ausfallen. Gleichwohl lässt sich für jeden Zeitpunkt $t$ der wahre Ort des Massenpunktes aus den Seitenbewegungen $x$ und $y$ konstruiren. Aendert sich $t$ in $dt$, so werden in diesem Zeittheilchen die Seitenbewegungen $BB_1 = dx$, $CC_1 = dy$ zurückgelegt, und der Massenpunkt gelangt von $D$ nach $D_1$. Nun sind aber die Geschwindigkeiten der beiden Seitenbewegungen im Zeitpunkte $t$: $w = \frac{dx}{dt}$ bezw. $u = \frac{dy}{dt}$. Setzt man hiernach $dx = w\,dt$ und $dy = u\,dt$, so betrachtet man für die Dauer eines Zeittheilchens $dt$ die Seitenbewegungen als gleichförmig, sodass für die augenblickliche Geschwindigkeit $v$ der wahren oder Mittelbewegung die für gleichförmige Bewegungen abgeleitete Fig. 20 gültig bleibt. Die Richtung der Geschwindigkeit $v$ fällt hiernach mit der Sehne $DD_1$, also, da diese unendlich klein, mit der Richtung der Bahnlinie, d. h. mit der Bewegungsrichtung zusammen. Auch ist, wie bei der geradlinigen Bewegung $v = \frac{DD_1}{dt} = \frac{ds}{dt}$. Die Geschwindigkeiten $w$ und $u$ der Seitenbewegungen nennt man kürzer die Seitengeschwindigkeiten des Massenpunktes, $v$ die wahre oder Mittelgeschwindigkeit. Es gilt also für zwei beliebige geradlinige Seitenbewegungen der Satz vom Parallelogramm oder vom Dreieck der Geschwindigkeiten: Die Mittelgeschwindigkeit ist die

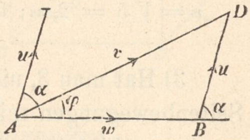
Fig. 21.



Diagonale eines Parallelogrammes aus den Seitengeschwindigkeiten, oder die geometrische Summe der Seitengeschwindigkeiten.

Hiernach kann die Mittelgeschwindigkeit, die wahre oder resultirende Geschwindigkeit durch Zeichnung gefunden werden; will man aber ihre Grösse und Richtung durch Rechnung bestimmen, so bedenke man, dass in dem Dreiecke $ABD$ (Fig. 22)

Fig. 22.




$$v^2 = w^2 + u^2 - 2wu \cos ABD, \text{ oder,}$$

weil $\cos ABD = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$,

$$1) \qquad v = \sqrt{w^2 + u^2 + 2wu\cos\alpha};$$

ebenso gilt $\sin\varphi : \sin ABD = u : v$, also, weil $\sin ABD = \sin\alpha$,

$$2) \qquad \sin\varphi = \sin\alpha\,\frac{u}{v}.$$

Gl. 1 liefert die Grösse, Gl. 2 sodann die Richtung von $v$. Dabei ist zu bemerken, dass die Strecken $w$ und $v$ stets in der Weise an einander zu setzen sind, dass die Pfeile in dem Zuge $ABD$ übereinstimmenden Umfahrungssinn haben, und dass dann der Pfeil von $v$ stets vom Anfange $A$ nach dem Endpunkte $D$ des Streckenzuges gerichtet ist.

Je kleiner der Winkel $\alpha$ wird, desto mehr nähert sich $u$ der Richtung von $AB$, desto näher fällt also auch $v$ der Richtung von $w$. Fallen schliesslich $w$ und $u$ in dieselbe Richtung, so wird $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = 0$ und man erhält $v = w + u$; $\varphi = 0$. In diesem Falle wird die Mittelgeschwindigkeit $v$, welche allgemein die geometrische Summe von $w$ und $u$, auch arithmetisch gleich der Summe von $w$ und $u$.

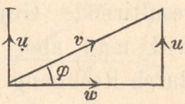
Je mehr sich der Winkel $\alpha$ dem Winkel $\pi$ nähert, desto niedriger wird wiederum das Geschwindigkeits-Dreieck, desto kleiner wird die Schlussseite $v$. Ist $\alpha = \pi$, so wird $\cos\alpha = -1$, $\sin\alpha = 0$, mithin, wenn $w > u$ gedacht ist, $v = w - u$; $\varphi = 0$.

In beiden Fällen $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$ wird $v$ die algebraische Summe von $w$ und $u$, nämlich $w + u$ bezw. $w - u$.

Von besonderer Wichtigkeit ist noch der Fall, wo die beiden Seitengeschwindigkeiten zu einander rechtwinklig stehen (Fig. 23). Es ist dann

$$v = \sqrt{w^2 + u^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = u : w.$$

Fig. 23.

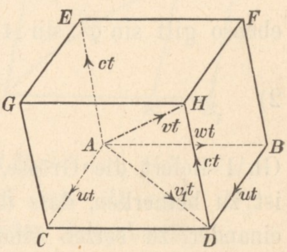



Ist z. B., bezogen auf Sekunden und Meter, $w = 2$, $u = 1$, so wird

$$v = \sqrt{5} = 2{,}236; \quad \operatorname{tg} \varphi = \tfrac{1}{2}, \quad \varphi = 26^0\, 34'.$$

3) Hat man 3, nicht in derselben Ebene liegende, gleichförmige Seitenbewegungen mit den Geschwindigkeiten $w$, $u$ und $c$ zusammenzusetzen (Fig. 24), so liefern zunächst zwei derselben, $AB$ und $AC$, als Mittelbewegung wiederum eine geradlinige gleichförmige Bewegung $AD$ mit der Geschwindigkeit $v_1$, welche aus dem Streckenzuge $AB$ und $BD$ als $AD$ gefunden wird Fügt man nun zu der Bewegung $AD$ noch die dritte Seitenbewegung $AE$ hinzu, so hat man wiederum 2 geradlinige, gleichförmige Bewegungen zusammenzusetzen; man verlegt daher $ct$ parallel an den Endpunkt $D$ von $AD$ und erhält $H$ als Endpunkt der wahren oder Mittelbewegung, welche geradlinig und gleichförmig von $A$ nach $H$ erfolgen muss.

Fig. 24.



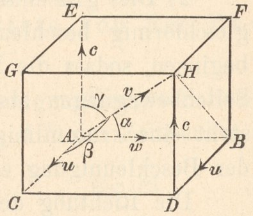

Lässt man in Fig. 24 $t = 1$ werden, so erscheint die wahre oder Mittelgeschwindigkeit $v$ als Diagonale eines Parallelepipeds aus den 3 Seitengeschwindigkeiten, oder als die Schlussseite eines räumlichen, aus den 3 Seitengeschwindigkeiten gebildeten Streckenzuges, welche man auch wiederum die geometrische Summe der Seitengeschwindigkeiten nennen kann.

Dieser Satz vom Parallelepiped oder (räumlichen) Viereck der Geschwindigkeiten erhält auch Gültigkeit für ungleichförmige Seitenbewegungen, wenn man dieselben Betrachtungen anstellt, wie auf S. 20 bezüglich zweier Seitenbewegungen geschah.

Stehen die 3 Seitengeschwindigkeiten rechtwinklig zu einander (Fig. 25), so wird die wahre (resultirende) oder Mittelgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{w^2 + u^2 + c^2},$$

Fig. 25.

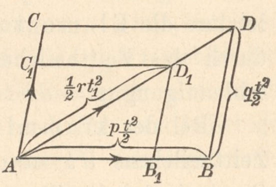



und für die Neigungswinkel $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ der Geschwindigkeit $v$ gegen die Richtungen $w$, $u$ und $c$ ergiebt sich, weil die Seitenfläche $BDHF$ rechtwinklig zu $w$ steht, also auch $\measuredangle\ ABH$ ein Rechter, $\cos\alpha = w : v$; ebenso $\cos\beta = u : v$ und $\cos\gamma = c : v$.

## b) Zusammensetzung der Beschleunigungen.

1) Ein Massenpunkt habe zwei gleichförmig beschleunigte Seitenbewegungen $AB$ und $AC$, welche beide mit den Geschwindigkeiten Null beginnen. Die Beschleunigungen seien $p$ und $q$ (Fig. 26); dann ist in $t$ Zeiteinheiten (nach Gl. 5, S. 12):

Fig. 26.




$$AB = {}^1/_2\, p\, t^2;\quad BD = {}^1/_2\, q\, t^2,$$

in $t_1$ Zeiteinheiten:

$$AB_1 = {}^1/_2\, p\, t_1^{\,2};\quad B_1D_1 = {}^1/_2\, q\, t_1^{\,2}.$$

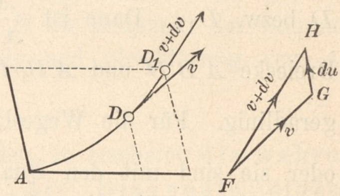
Die wahren Orte des Massenpunktes sind $D$ bezw. $D_1$. Dann ist $\frac{AB}{AB_1} = \frac{t^2}{t_1^{\,2}} = \frac{BD}{B_1D_1}$; es sind also die Dreiecke $ABD$ und $AB_1D_1$ ähnlich, daher die wahre Bewegung geradlinig. Für die Wegeslängen gilt aber $\frac{AD}{AD_1} = \frac{AB}{AB_1} = \frac{t^2}{t_1^{\,2}}$, oder sie sind mit den Quadraten der entsprechenden Zeiten verhältnisgleich. Für ein solches Bewegungsgesetz $s = a\,t^2$ gilt aber $v = 2\,a\,t$, d. h. die Mittelbewegung ist wiederum eine gleichförmig beschleunigte mit der Anfangsgeschwindigkeit Null. Nennt man sodann die Beschleunigung dieser Bewegung $r$, so kann $AD = {}^1/_2\, r\, t^2$, $AD_1 = {}^1/_2\, r\, t_1^{\,2}$ gesetzt werden. Wählt man endlich den beliebigen Zeitraum $t_1$ so, dass ${}^1/_2\, t_1^{\,2} = 1$ wird, so werden $AB_1$, $B_1D_1$ und $AD_1$ bezw. zu $p$, $q$ und $r$, und es erscheint die Beschleunigung der wahren oder Mittelbewegung, welche kürzer die Mittelbeschleunigung genannt wird, ebenso wie die Geschwindigkeit, als Schlusslinie eines aus den Seitenbeschleunigungen gebildeten Streckenzuges, als geometrische Summe der Seitenbeschleunigungen, oder als Diagonale eines Parallelogramms aus den Seitenbeschleunigungen.

2) Dies gilt einstweilen nur, wenn die beiden Seitenbewegungen gleichförmig beschleunigt sind und mit der Geschwindigkeit Null beginnen, sodass die Mittelbewegung geradlinig wird. Erfolgen die Seitenbewegungen aber nach beliebigen Bewegungsgesetzen, so entsteht eine krummlinige Bewegung, und für diese muss der Begriff der Beschleunigung erst eine Verallgemeineruug erfahren.

Die Richtung der Geschwindigkeit fällt nach Seite 20 mit der Bewegungsrichtung zusammen. Bei einer geradlinigen Bewegung bleibt also die Richtung der Geschwindigkeit dieselbe, es ändert sich nur deren Grösse, und zwar während des Zeittheilchens $dt$ um $dv = p\,dt$. Diese Vergrösserung von $v$ kann man nun auch so auffassen, als ob zu der früheren Geschwindigkeit $v$ eine neue Geschwindigkeit $dv = p\,dt$ hinzugetreten wäre, und man nennt diese letztere die Elementarbescheunigung, welche mittels Theilung durch das Zeittheilchen $dt$ die (auf die Zeiteinheit bezogene) Beschleunigung $p = dv : dt$ liefert.

Bei der krummlinigen Bewegung ändert sich während eines Zeittheilchens $dt$ sowohl die Grösse, wie auch die Richtung der Geschwindigkeit (Fig. 27); diejenige Geschwindigkeit nun, welche mit der im Zeitpunkte $t$ vorhandenen Geschwindigkeit $v$ zusammengesetzt werden muss, um mit ihr die für den Zeitpunkt $t + dt$ geltende Geschwindigkeit $v + dv$ nach Grösse und Richtung zu ergeben, heisst wiederum die Elementarbeschleunigung, welche dann, durch $dt$ getheilt, die Beschleunigung $p$ der krummlinigen Bewegung im Zeitpunkte $t$ nach Grösse und Richtung liefert.

Fig. 27.

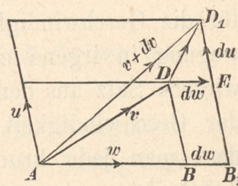



Stellt also in Fig. 27 $FG$ die Geschwindigkeit $v$ im Zeitpunkte $t$, $FH$ die Gesehwindigkeit $v + dv$ im Zeitpunkte $t + dt$ dar, so ist $GH$ die Elementarbeschleunigung $= du$. Letztere kann offenbar als die geometrische Differenz zwischen $v + dv$ und $v$, oder weil sie unendlich klein, als das geometrische Differential von $v$ bezeichnet werden.

Die Beschleunigung $p$ der krummlinigen Bewegung $A\,D\,D_1$ im Zeitpunkte $t$ bezeichnet man nun als $p = du : dt$, d. h. als die geometrische Abgeleitete von $v$ nach $t$ und als mit der Richtung von $du$ übereinstimmend. Die Beschleunigung weicht hiernach bei krummliniger Bewegung stets von der Bewegungsrichtung ($v$) ab.

Bei der Zusammensetzung zweier beliebigen geradlinigen Seitenbewegungen ist nun die Geschwindigkeit $v = A\,D$ im Zeitpunkte $t$ (Fig. 28) die Mittelgeschwindigkeit aus $w$ und $u$, die Geschwindigkeit $v + dv = A\,D_1$ im Zeitpunkte $t + dt$ die Mittelgeschwindigkeit aus $w + dw$ und $u + du$. Legt man beide Streckenzüge so aufeinander, dass $v$ und $v + dv$ gemeinsamen Anfangspunkt $A$ haben, so ist $D\,D_1$ die geometrische Differenz von $v + dv$ und $v$, oder die Elementarbeschleunigung $= r dt$, wenn $r$ die Beschleunigung. $D\,D_1$ ist aber die Schlussseite eines aus $dw = p\,dt$ und $du = q\,dt$ gebildeten Streckenzuges $D\,E\,D_1$. Dasselbe Verhältnis muss also auch zwischen $v$, $p$ und $q$ bestehen; mithin gilt auch für zwei beliebige geradlinige Seitenbewegungen das auf S. 23 unter 1 ausgesprochene Gesetz für die Beschleunigung.

Fig. 28.




Für die Berechnung der Grösse und Richtung der Mittelbeschleunigung $r$ gelten dieselben Formeln wie für die Geschwindigkeit (S. 21); man braucht in denselben nur $w$, $u$ und $v$ mit $p$, $q$ und $r$ zu vertauschen.

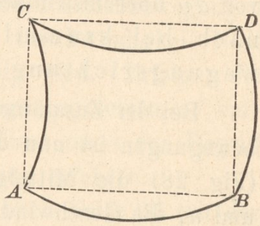
Ähnliche Betrachtungen, wie solche bezüglich der Geschwindigkeiten (S. 22 und 23) angestellt wurden, führen auch leicht zum Satze vom Parallelepiped oder Viereck der Beschleunigungen.

### c) Zusammensetzung krummliniger Seitenbewegungen.

Die im Vorstehenden ausführlich entwickelten Gesetze für die Zusammensetzung von zwei oder drei Bewegungen, deren Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bleiben auch noch gültig, wenn die Seitenbewegungen nicht geradlinig, sondern krummlinig erfolgen. Unerlässliche Bedingung hierfür ist aber, dass die bewegliche Bahnlinie eine reine Parallelverschiebung erfahre.

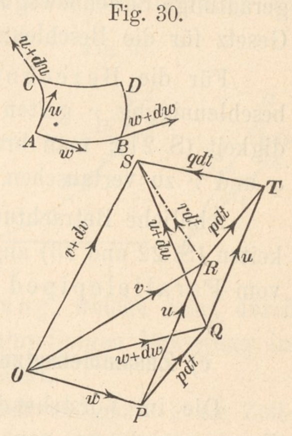
Bewegt sich der Massenpunkt in der Bahnlinie $AB$ (Fig. 29), während diese eine Verschiebung in die Lage $CD$ erfährt, so erkennt man leicht, dass $D$ der Ort des Massenpunktes nach der Bewegung sein muss, und dass es gleichgültig ist, ob man den Punkt $D$ mittels der wahren Bewegungslinien $AB$, $AC$ und $BD$ festlegt, oder ob man die Sehnen $AB$, $AC$ und $BD$ benutzt und aus ihnen ein Parallelogramm oder einen Streckenzug $ABD$ bildet. Auch für die Geschwindigkeit $v$ der wahren Bewegung in irgend einem Zeitpunkte $t$ muss der früher (S. 21) bewiesene Satz aus dem Grunde gültig bleiben, weil mit dem Begriffe der Geschwindigkeit grundsächlich die Vorstellung verbunden ist, dass man jede krummlinige Bewegung für ein unendlich kleines Zeittheilchen als geradlinig und gleichförmig betrachten darf, sodass man es in jedem Zeitpunkte nur mit der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten solcher einfachen Bewegungen zu thun hat.

Fig. 29.




Dass auch bezüglich der Beschleunigungen das Entsprechende gilt, ergiebt sich durch folgende Betrachtung: $AB$ und $AC$ (Fig. 30) seien die Seitenbewegungen während eines Zeittheilchens; $w$ und $w + dw$ bezw. $u$ und $u + du$ die Seitengeschwindigkeiten zu Anfang und zu Ende desselben. Man trage $w$ und $w + dw$ von einem Punkte $O$ aus auf. Setze daran die Strecken $PR = u$ bezw. $QS = u + du$. Dann ist $OR = v$ die wahre Geschwindigkeit im Zeitpunkte $t$, $OS = v + dv$ diejenige im Zeitpunkte $t + dt$. Darnach wird dann $RS = r\,dt$ die Elementarbeschleunigung und $r = RS : dt$ die Beschleunigung der Mittelbewegung; $PQ = p\,dt$ ist die Elementarbeschleunigung der ersten Seitenbewegung. Macht man nun $QT =$ und $\parallel PR = u$, so wird $TS = q\,dt$ die zweite Elementarbeschleunigung, und weil

Fig. 30.




$$RT \# PQ = p\,dt,$$

so erscheint $RS = r\,dt$ als Schlusslinie eines Streckenzuges aus

$RT = p\,dt$ und $TS = q\,dt$. Mithin muss auch $r$ die Schlusslinie eines Streckenzuges aus $p$ und $q$ sein. Damit ist der Satz vom Dreieck oder Parallelogramm der Beschleunigungen allgemein bewiesen. Die Erweiterung zum Satze vom Parallelepiped bezw. räumlichen Viereck der Beschleunigungen hat keine Schwierigkeit.

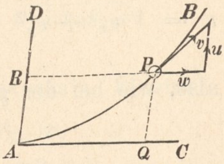
Erfährt aber die Bahnlinie $AB$ nicht eine einfache Parallelverschiebung, sondern eine allgemeinere Bewegung, so werden die Beziehungen der wahren oder Mittelbewegung verwickelter; dieser schwierigere Fall wird erst später in der Allgemeinen Mechanik behandelt.

### d) Zerlegung von Bewegungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Wie man aus 2 bezw. 3 gleichzeitigen Seitenbewegungen mit Hülfe der Gesetze vom Dreieck bezw. Viereck der Bewegungen die Mittelbewegung finden konnte, wie ferner die Seitengeschwindigkeiten und Beschleunigungen zu den Mittel-Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sich zusammensetzen liessen, so kann auch umgekehrt jede Bewegung eines Massenpunktes in der Ebene oder im Raume in 2 bezw. 3 geradlinige Seitenbewegungen zerlegt oder durch diese ersetzt werden, und das Gleiche gilt auch bezüglich der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Ist z. B. die Bewegung eines Massenpunktes in einer ebenen Kurve $AB$ gegeben (Fig. 31), kennen wir also für jeden Zeitwerth $t$ den Ort $P$ des Punktes in der Kurve, so kann man durch $A$ zwei mit der Kurve in derselben Ebene liegende Gerade $AC$ und $AD$ legen und nach deren Richtungen die gegebene Bewegung zerlegen. Sind $PQ$ und $PR$ parallel zu $AC$ und $AD$, so kann die gegebene Bewegung $AP$ vollständig durch die Seitenbewegungen ersetzt werden, sobald nur deren Bewegungsgesetze so geregelt sind, dass für jeden Zeitpunkt $t$ die Orte $P$, $Q$ und $R$ der fraglichen Bewegungen einem solchen Parallelogramme $AQPR$ angehören. Wird aus der Geschwindigkeit $v$ der gegebenen Bewegung und den Seitenrichtungen $AC$ und $AD$ ein Dreieck gezeichnet, so sind die zu $AC$ und $AD$ parallelen Seiten zugleich die Geschwindigkeiten $w$ und $u$ der Seiten-

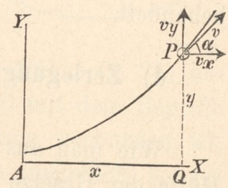
Fig. 31.



bewegungen, oder es ist $v$ in die Seitengeschwindigkeiten $w$ und $u$ zerlegt.

Für die Behandlung krummliniger Bewegungen bietet eine solche Zerlegung ausserordentliche Erleichterung; sie schliesst sich auch unmittelbar dem Verfahren der analytischen Geometrie an, welche ja auch einen Punkt $P$ in eine Ebene durch 2 Koordinaten $x$ und $y$ gegen 2 Achsenrichtungen festlegt. In den meisten Fällen legt man die Achsen rechtwinklig zu einander.

Fig. 32.




Soll die Bewegung des Punkes $P$ (Fig. 32) in der $xy$-Ebene völlig bekannt sein, so muss man für jeden Zeitpunkt $t$ sowohl $x$ als auch $y$ kennen, oder es müssen $x$ und $y$ als Funktionen von $t$ gegeben sein. Jede der Funktionen $x = f(t)$ und $y = \varphi(t)$ kann aber für sich allein als das Gesetz einer geradlinigen Seitenbewegung aufgefasst werden, und zwar würden für den Zeitpunkt $t$ die Seitenbewegungen $AQ = x$ und $PQ = y$ sein, deren Vereinigung den Massenpunkt richtig nach seinem Orte $P$ führt. Diese beiden Bewegungsgleichungen bestimmen die Bewegung des Massenpunktes vollständig und in einfachster Weise. Bezeichnet man die Seitengeschwindigkeiten in den beiden Achsenrichtungen mit $v_x$ und $v_y$, ebenso die Seitenbeschleunigungen mit $p_x$ und $p_y$, so ist nach S. 6

$v_x = \frac{dx}{dt}$; $v_y = \frac{dy}{dt}$. Für die wahre Geschwindigkeit gilt dann

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt},$$

also, wie bei der geradlinigen Bewegung $v = \frac{ds}{dt}$. Ferner ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx},$$

d. h. die Richtung der Geschwindigkeit $v$ stimmt mit der Richtung der Bewegung überein.

Nach S. 15 ist

$$p_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2};\ p_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2};$$

für die wahre Beschleunigung gilt

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2 x}{d t}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{d t}\right)^2} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p_y}{p_x} = \frac{\dfrac{d^2 y}{d t^2}}{\dfrac{d^2 x}{d t^2}}.$$

Da dieser Werth im Allgemeinen von $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{d y}{d x}$ verschieden ist, so fallen, wie bereits S. 25 besprochen, die Richtungen der Beschleunigung und der Bewegung im Allgemeinen nicht zusammen.

Erfolgt die Bewegung des Massenpunktes nicht in einer Ebene, sondern in einer räumlichen Kurve, so sind die 3 rechtwinkligen Koordinaten des Ortes $P$ als Funktionen der Zeit auszudrücken, und es können dann wieder die Gleichungen $x = f(t)$; $y = \varphi(t)$; $z = \psi(t)$ als Gesetze dreier Seitenbewegungen aufgefasst werden, deren Zusammenwirken die räumliche Bewegung des Massenpunktes vollständig wiedergiebt. Es entsteht in ähnlicher Weise

$$v_x = \frac{d x}{d t}; \quad v_y = \frac{d y}{d t}; \quad v_z = \frac{d z}{d t}; \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{d s}{d t};$$

ferner nach S. 23

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{d x}{d s}; \quad \cos \beta = \frac{v_y}{v} = \frac{d y}{d s}; \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{v} = \frac{d z}{d s}.$$

Für die Beschleunigungen ergiebt sich das Entsprechende.

**Beispiel:** Für eine ebene Bewegung sind gegeben die Gleichungen

$$x = a\,(1 - \cos t); \quad y = b \sin t.$$

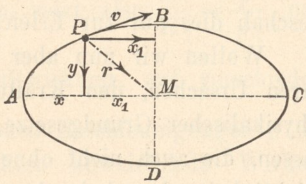
Um hieraus die Gleichung der Bahnlinie zu finden, entferne man $t$. Es wird

$$\cos t = \frac{a - x}{a}; \quad \sin t = \frac{y}{b},$$

mithin durch Quadriren und Zusammenzählen:

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 = \frac{(a - x)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Fig. 33.




Dies ist die Gleichung einer Ellipse (Fig. 33), aber nicht bezogen auf den Mittelpunkt $M$, sondern auf den Endpunkt $A$ der Halbachse $a$. Denn sobald man $a - x = x_1$ setzt, wird aus obiger Gleichung die bekannte Formel $1 = \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$.

Die Seitengeschwindigkeiten sind:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = a \sin t = \frac{a}{b} y$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = b \cos t = b\left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Für $t = 0$ ist $x = y = 0$; $v_x = 0$; $v_y = b$ (entsprechend dem Punkte $A$);

für $t = {}^1/_2\,\pi = 1{,}57$ Sek. ist $\sin t = 1$, $\cos t = 0$,

$x = a$; $y = b$; $v_x = a$; $v_y = 0$, entsprechend dem Punkte $B$;

für $t = \pi = 3{,}14$ Sek. ist $\sin t = 0$, $\cos t = -1$,

$x = 2a$; $y = 0$; $v_x = 0$; $v_y = -b$, entsprechend dem Punkte $C$;

für $t = {}^3/_2\,\pi$ ist $\sin t = -1$, $\cos t = 0$,

$x = a$; $y = -b$; $v_x = -a$; $v_y = 0$, entsprechend dem Punkte $D$.

Für fortlaufende Zeit nehmen $x$ und $y$ immer wieder dieselben Werthe an, wenn sich $t$ jedes Mal um $2\pi$ geändert hat. Die Ellipse wird hiernach fortwährend in derselben Richtung durchlaufen, und ein Umlauf erfordert $2\pi$ Sekunden. Für die Beschleunigungen gilt

$$p_x = \frac{dv_x}{dt} = a \cos t = a - x = x_1$$

$$p_y = \frac{dv_y}{dt} = -b \sin t = -y.$$

Die Seitenbeschleunigungen werden also der Grösse nach gemessen durch die Mittelpunkts-Koordinaten des Punktes $P$, u. zw. ist $p_x = a - x = x_1$ nach rechts, $p_y = -y$ aber, wegen des negativen Zeichens, nach unten gerichtet. Es wird

$$p = \sqrt{(a-x)^2 + y^2} = r = \text{dem Mittelpunkts-Fahrstrahle } PM,$$

u. zw. ist der Sinn von $p$ stets nach dem Mittelpunkte $M$ gerichtet.

## 4. Physikalische Grundgesetze der Mechanik.

In dem Vorstehenden haben wir die Bewegungen als gegeben angesehen und gewisse kennzeichnende Merkmale und Eigenschaften derselben aufgeführt. Die Betrachtungen waren rein mathematische; wenn auch das Bewegliche als Massenpunkt bezeichnet wurde, so geschah dies nur zur Erleichterung der Vorstellung.

Wollen wir nun aber die Bewegung eines Massenpunktes aus ihren Ursachen, den Kräften, herleiten, so bedürfen wir gewisser physikalischer Grundgesetze, die sich nicht mathematisch beweisen lassen, die auch nicht ohne Weiteres selbstverständlich sind, deren Richtigkeit aber dadurch genügend sichergestellt ist, dass alle Ergebnisse, welche daraus gezogen werden, mit der Beobachtung übereinstimmen (Erfahrungsgesetze).