völligen Aufzehrung der Geschwindigkeit erforderlich. Die Wegeslänge in diesen 62,5 s. beträgt nach der Figur $\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 62{,}5 = 781{,}25$ m; d. h. etwa 781 m vor der Haltestelle muss die Verzögerung beginnen.

Die Wegeslängen der gleichförmig beschleunigten und verzögerten Bewegungen würden bei gleichbleibender Geschwindigkeit von 25 m/s. je in der Hälfte der Zeit zurückgelegt sein. Durch Anhalten und Wiederanfahren gehen daher, im Vergleiche zum einfachen Durchfahren, $90 + 31{,}25 = 121{,}25$ s. oder rund 2 Minuten verloren. Mit Einschluss von einer Minute Aufenthalt kostet also jeder Haltepunkt einem Schnellzuge 3 Minuten Mehraufwand an Zeit.

Die Annahme, dass die Anfahrt und das Anhalten g l e i c h f ö r m i g veränderte Bewegungen seien, ist eine vereinfachende Voraussetzung; das wahre Geschwindigkeitsgesetz wird sich nicht durch gerade Linien darstellen, ist vielmehr schwieriger zu ermitteln und hängt von vielen Umständen ab, die hier nicht berücksichtigt werden können.

Beispiel: Ein Gewehrgeschoss verlasse den 0,8 m langen Gewehrlauf mit einer sekundlichen Geschwindigkeit von 400 m. Wenn man nun die im Augenblicke des Abfeuerns mit der Geschwindigkeit Null beginnende, beschleunigte Bewegung des Geschosses im Rohre wieder annähernd als gleichförmig beschleunigt betrachtet, wie lange dauert sodann die Bewegung im Rohre und wie gross ist die Beschleunigung?

Die Geschwindigkeitsfigur ist wiederum ein Dreieck, dessen Inhalt = 0,8 (Wegeslänge) sein muss. Nennt man die Zeit t, so ist $\frac{400}{2} t = 0{,}8$, d. h.

$$t = \frac{0{,}8}{200} = \frac{4}{1000} = \frac{1}{250} \text{ s.}$$

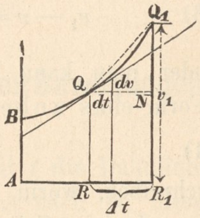
In dieser geringen Zeit wächst die sekundliche Geschwindigkeit von Null auf 400 m, in der Sekunde also um $400 : \frac{1}{250} = 400 \cdot 250 = 100\,000 \frac{\text{m}}{\text{s.}}$; die Beschleunigung beträgt also $100\,000 \frac{\text{m}}{\text{s.}^2}$. Diese überraschend grosse Zahl ist so zu verstehen, dass, wenn die gleichförmig beschleunigte Bewegung unter Einwirkung der Pulvergase 1 Sekunde lang in unveränderter Weise fortdauerte, eine Geschwindigkeit von $100\,000 \frac{\text{m}}{\text{s.}}$ entstehen würde. Die beschleunigte Bewegung in dem Rohre währt aber nur 1/250 s. und bringt daher nur $400 \frac{\text{m}}{\text{s.}}$ Geschwindigkeit hervor.

b) Ungleichförmig veränderte Bewegung.

Aendert sich die Geschwindigkeit einer Bewegung nicht verhältnismässig mit der Zeit, so heisst die Bewegung eine u n g l e i c h f ö r m i g veränderte; das Geschwindigkeitsgesetz ist dann nicht mehr einfach geradlinig, sondern von der allgemeinen Form $v = \varphi(t)$, oder die Geschwindigkeitslinie ist irgend eine Kurve.

In derselben Weise nun, wie auf S. 6 der Begriff der Geschwindigkeit, ausgehend von der gleichförmigen Bewegung, durch Verallgemeinerung auf beliebige Bewegungen ausgedehnt wurde, findet auch hinsichtlich der Beschleunigung der geradlinigen Bewegung eine allgemeinere Fassung des Begriffes statt. Ist BQQ_1 (Fig. 13) die Geschwindigkeitslinie, so erfolgt in dem Zeitraume $RR_1 = \Delta t$ eine Geschwindigkeitszunahme $NQ_1 = \Delta v$. Zieht man nun die Sehne QQ_1, so ist diese die Geschwindigkeitslinie einer gleichförmig beschleunigten Bewegung, vermöge welcher die Geschwindigkeit in dem Zeitraume Δt von v auf $v + \Delta v$, also um die gleiche Grösse, wächst wie bei der gegebenen Bewegung. $p_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ist dann die mittlere Beschleunigung für diesen bestimmten Zeitraum RR_1. Wenn der beliebige Zeitraum Δt zur Grenze Null herabsinkt, nähert sich diese mittlere Beschleunigung p_m einem bestimmten Grenzwerth p, und diesen Grenzwerth $p = lim \frac{\Delta v}{\Delta t}$ oder

Fig. 13.



$$1) \qquad p = \frac{dv}{dt}$$

nennt man die **Beschleunigung** zu Zeit t. Die Beschleunigung p ist die Abgeleitete der Geschwindigkeit v nach der Zeit t, oder die zweite Abgeleitete der Wegeslänge s nach der Zeit t.

$$2) \qquad v = \varphi(t) = \frac{ds}{dt} = f'(t); \; p = \frac{dv}{dt} = \varphi'(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t).$$

Die Beschleunigung erscheint wegen $p = dv : dt$ als das Ansteigungsverhältnis der Geschwindigkeitslinie, ebenso wie die Geschwindigkeit das Ansteigungsverhältnis der Wegeslängenkurve (S. 6) war.

Beispiel: Zu dem Bewegungsgesetze $s = 3 + 2 \sin {}^1/_6 \pi t$ (S. 9) gehörte das Geschwindigkeitsgesetz $v = {}^1/_3 \pi \cos {}^1/_6 \pi t = 1{,}047 \cos {}^1/_6 \pi t$. Hieraus ergiebt sich die veränderliche Beschleunigung

$$p = -\frac{1}{18} \pi^2 \sin \frac{1}{6} \pi t = -0{,}548 \sin \frac{1}{6} \pi t.$$

Indem man $p = dv : dt$ oder $dv = p\,dt$ schreibt, betrachtet man die Geschwindigkeitsänderung dv als verhältnisgleich mit der Zeit dt, betrachtet also ein Theilchen der beliebigen Bewegung als gleichförmig verändert. Für einen endlichen Zeitraum $t_1 - t$ ist dann die Geschwindigkeitszunahme

$$3)\qquad v_1 - v = \int_t^{t_1} p\,dt = \text{Fläche } RQQ_1R_1 \text{ der Fig. 13};$$

oder man kann auch die Geschwindigkeit v im Zeitpunkte t in Form eines unbestimmten Integrals

$$4)\qquad v = \int p\,dt + C$$

schreiben, worin der Werth C bestimmt werden kann, wenn für irgend einen Zeitpunkt die Geschwindigkeit bekannt ist.

Beispiel 1: Das gegebene Bewegungsgesetz sei (auf Meter und Sekunden bezogen)

$$s = 2 + 6t - 2t^2 + {}^1/_3 t^3;$$

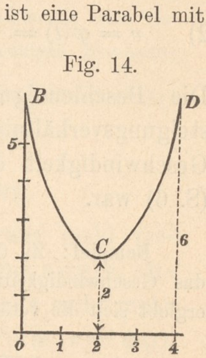
dann ergiebt sich die Geschwindigkeit

$$v = ds : dt = 6 - 4t + t^2,$$

die Beschleunigung $\quad p = dv : dt = -4 + 2t.$

Man erkennt, dass hier eine ungleichförmig veränderte Bewegung vorliegt, da p mit der Zeit t veränderlich. Zu Anfang, d. h. für $t = 0$ ist $p = -4\frac{\text{m}}{\text{s.}^2}$, die Bewegung also eine verzögerte; die Geschwindigkeit, welche zu Anfang $6\frac{\text{m}}{\text{s.}}$ betrug, nimmt also zunächst ab. Es ist aber $p \lesseqgtr 0$ für $t \lesseqgtr 2^{\text{s.}}$. Die Geschwindigkeits-Abnahme hört also auf nach 2 Sekunden, und es beginnt dann eine beschleunigte Bewegung, und zwar wächst nun auch die Beschleunigung verhältnisgleich mit der Zeit. Der Zeitpunkt $t = 2^{\text{s.}}$, wo die Geschwindigkeit aufhört abzunehmen und zu wachsen beginnt, giebt für v einen Kleinstwerth $v_{min} = 2\frac{\text{m}}{\text{s.}}$. Die Geschwindigkeitslinie ist eine Parabel mit lothrecht aufwärts gerichteter Achse; der Scheitel entspricht dem Zeitwerthe $t = 2$ Sekunden. Die während der ersten 4 Sekunden zurückgelegte Wegeslänge $s - s_0$ ist leicht als die unterhalb der Parabel BCD (Fig. 14) befindliche Fläche zu berechnen. Da man weiss, dass die Parabelfläche $BCD = {}^2/_3$ des umschriebenen Rechtecks ist, so wird

Fig. 14.



$$s - s_0 = 6 \cdot 4 - {}^2/_3\,(6 - 2)\,4 = 13\,{}^1/_3{}^{\text{m}}.$$

Zur Prüfung liefert das Bewegungsgesetz

für $t = 4^{\text{s.}}$ $\quad s = 15\,{}^1/_3,$

für $t = 0$ $\quad s_0 = 2\;$, mithin $s - s_0 = 13\,{}^1/_3{}^{\text{m}}.$

Beispiel 2: Eine geradlinige Bewegung erfolge mit der Beschleunigung $p = 2 + 3t^2$, und es sei für $t = 0$: $v = c = 1 \frac{\text{m}}{\text{s.}}$, $s_0 = 0$. Dann wird aus

$$dv = (2 + 3t^2)\,dt$$

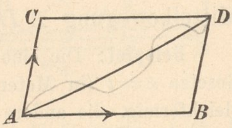
$$v - 1 = \int_0^t (2 + 3t^2)\,dt = 2t + t^3 \quad \text{oder} \quad v = 1 + 2t + t^3 \quad \text{und}$$

$$s = \int_0^t (1 + 2t + t^3)\,dt = t + t^2 + {}^1\!/_4\, t^4.$$

3. Zusammensetzung mehrerer gleichzeitigen Bewegungen eines Punktes.

Ein Massenpunkt durchlaufe während der Zeit t die Bahnlinie AB (Fig. 15), und zwar in der Richtung von A nach B; diese Bahnlinie gehöre aber einem Körper an, welcher sich derartig parallel verschiebt, dass der Punkt A der Linie AB während der Zeit t die Bewegung AC ausführt und die ganze Bahnlinie AB in die parallele Lage CD kommt. Dann wird der Massenpunkt in Folge der beiden gleichzeitigen Bewegungen aus der Anfangslage A in irgend einer Bahnlinie nach D gelangen, und man nennt diese wahre Bewegung AD die Mittelbewegung oder Resultirende aus den beiden Seitenbewegungen AB und AC.

Fig. 15.



Anstatt diese wahre Bewegung AD als das Ergebnis der Bewegungen AB und AC zu bezeichnen, sagt man auch wohl kürzer, der Massenpunkt führe zwei gleichzeitige Seitenbewegungen aus, womit aber stets nur der beschriebene Vorgang gemeint sein soll. Da die Figur $ABDC$ ein Parallelogramm ist, so ergiebt sich ohne Weiteres der **Satz vom Parallelogramm der Bewegungen:**

Führt ein Massenpunkt gleichzeitig zwei Seitenbewegungen aus, so ist der dem Anfangspunkt A gegenüberliegende Endpunkt des aus den beiden Seitenbewegungen gezeichneten Parallelogramms der wahre Ort des Punktes.

Man denke sich, auf dem Stabe AB ein Sonnenkäferchen entlang laufend, während man den Stab parallel nach CD verschiebt; dann gelangt das Sonnenkäferchen in Wirklichkeit von A nach D.

Eine Gerade AB von bestimmter Richtung, bestimmter Grösse und einem Pfeile, der einen bestimmten Bewegungssinn angiebt,