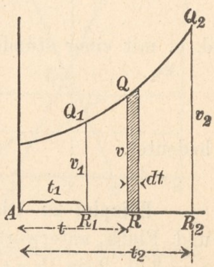
2. Darstellung des Geschwindigkeits-Gesetzes der geradlinigen Bewegung eines Punktes.

Wie s eine $f(t)$ war, so ist die Abgeleitete davon, nämlich v, ebenfalls eine $\varphi(t) = f'(t)$, welche das Geschwindigkeits-Gesetz heissen möge und ebenfalls zeichnerisch dargestellt werden kann.

Während man aus der Darstellung des Bewegungsgesetzes die in einem beliebigen Zeitraume zurückgelegte Wegeslänge unmittelbar abgreifen konnte, ist dies aus dem Geschwindigkeits-Gesetze nicht ohne Weiteres möglich. Da aber die Geschwindigkeit v aus dem Bewegungsgesetze $s = f(t)$ durch Differentiation $v = ds : dt$ zu finden war, so muss man durch das umgekehrte Verfahren, d. h. durch Integration, auch von v zu s gelangen können. Es ist nämlich $ds = v\,dt$, folglich mittels sog. unbestimmter Integration

Fig. 10.



$$s = \int v\,dt + C.$$

Die im Allgemeinen unbestimmte Integrations-Konstante C ist festzustellen, wenn zu einem bestimmten Werthe von t der zugehörige Werth von s bekannt ist, etwa für den Anfang der Beobachtung $t = 0$ der Werth $s = s_0$.

Beispiel: Für die Bewegung eines Massenpunktes sei das Geschwindigkeitsgesetz $v = 3\,t^2$ gegeben; der Massenpunkt habe zu Anfang schon eine Entfernung $s_0 = 3$ m von dem gewählten Festpunkte der Bahnlinie. Dann ist

$$s = \int 3\,t^2\,dt + C = t^3 + C.$$

Die Grösse C ist nun an die Bedingung gebunden, dass die Gleichung für $t = 0$ den Werth $s = 3$ liefern muss. Setzt man demnach diese beiden Grössen in die Gleichung ein, also $3 = 0 + C$, so bestimmt sich $C = 3$, und das Bewegungsgesetz lautet

$$s = 3 + t^3.$$

(Als Probe erhält man hieraus wieder $v = ds : dt = 3\,t^2$.)

Die Gleichung $ds = v\,dt$ hat übrigens auch eine geometrische Bedeutung, indem $v\,dt$ den Inhalt des unmittelbar rechts neben $v = RQ$ (Fig. 10) liegenden lothrechten Flächenstreifens der Geschwindigkeitskurve darstellt (mit Vernachlässigung einer unendlich kleinen Grösse höherer Ordnung). Daher muss die endliche Wegeslänge $s_2 - s_1$, die zwischen den Zeitpunkten $t = t_1$ und $t = t_2$ zurückgelegt wird, durch die Summe aller zwischenliegenden Flächenstreifen, d. h. durch die endliche Fläche $Q_1 Q_2 R_2 R_1$ ausgedrückt sein. Oder: die während einer gewissen Zeit, d. h. zwischen zwei gegebenen Zeitpunkten, zurückgelegte Wegeslänge wird dargestellt durch den Inhalt derjenigen Fläche, welche von der Geschwindigkeitskurve, der Zeitachse und den, jenen beiden Zeitpunkten entsprechenden Geschwindigkeits-Ordinaten eingeschlossen ist.

Analytisch bedeutet dies $s_2 - s_1 = \int_{t=t_1}^{t=t_2} v\,dt$, also das bestimmte Integral der Gleichung $ds = v\,dt$, zwischen den Zeitgrenzen t_1 und t_2 genommen.

Lässt man den auf der Bahnlinie (Fig. 2) zu wählenden Festpunkt mit der Anfangslage des beweglichen Punktes zusammenfallen, d. h. $s_0 = 0$ werden, so ergiebt sich für die Wegeslänge von $t = 0$ bis $t = t$ (indem man $s_1 = s_0 = 0$, $t_1 = 0$ setzt und statt t_2 und s_2 einfach t und s schreibt): $s = \int_{t=0}^{t=t} v\,dt.$ (1

a) Gleichförmig veränderte Bewegung. Beschleunigung.

Der einfachste Fall einer ungleichförmigen (mit veränderlicher Geschwindigkeit erfolgenden) Bewegung ist offenbar ein solcher, wobei die ganze Geschwindigkeitsänderung während eines bestimmten Zeitraumes t sich gleichmässig über letzteren vertheilt. Ist also c die Anfangsgeschwindigkeit, v die Geschwindigkeit nach t Zeiteinheiten, so beträgt die ganze Geschwindigkeitsänderung $v - c$ während des Zeitraums t. Soll diese Aenderung sich gleichmässig über die Zeit t erstrecken, so muss sie für jede Zeiteinheit $(v - c) : t$ betragen. Setzt man diese gleichbleibende Geschwindigkeitsänderung für jede Zeiteinheit $= p$, so wird $v - c = pt$ oder

$$\boldsymbol{v = c + pt.} \tag{2}$$

Eine solche Bewegung, bei welcher die Aenderung der Geschwindigkeit verhältnisgleich mit der entsprechenden Zeit erfolgt, heisst eine gleichförmig veränderte Bewegung, und Gl. 2 ist ihr Geschwindigkeitsgesetz.

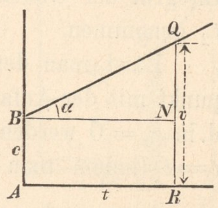
Ist die in jeder Zeiteinheit erfolgende Geschwindigkeits-Aenderung p positiv, d. h. eine Zunahme, so heisst sie **Beschleunigung** und die Bewegung wird eine gleichförmig beschleunigte genannt. Im entgegengesetzten Falle hat der Massenpunkt eine gleichförmig verzögerte Bewegung, und die dann negativ werdende Geschwindigkeits-Aenderung in der Zeiteinheit heisst **Verzögerung**; das entsprechende Geschwindigkeitsgesetz ist

3) $$v = c - p t.$$

Offenbar kann eine Verzögerung einfach wie eine negative Beschleunigung behandelt werden.

Das Geschwindigkeitsgesetz $v = c + p t$, in welchem v und t veränderlich, c und p unveränderlich sind, wird durch eine ansteigende Grade BQ (Fig. 11) dargestellt. Die Beschleunigung

Fig. 11.



$$p = \frac{v - c}{t} = \frac{NQ}{BN} = \operatorname{tg} \alpha$$

erscheint dabei als das Ansteigungsverhältnis der Geschwindigkeitslinie BQ.

Die zufolge einer gleichförmig beschleunigten Bewegung während des Zeitraums $t = AR$ zurückgelegte Wegeslänge s ist (nach dem allgemeinen Satze auf S. 11) gleich der Flächenzahl der Figur $ARQB$, d. h.

4) $$s = {}^1/_2\,(v + c)\,t.$$

Soll s aber durch c, p und t ausgedrückt werden, so zerlege man das Trapez in das Rechteck $ABNR = ct$ und das Dreieck $BNQ = {}^1/_2\,t \cdot NQ = {}^1/_2\,tpt = {}^1/_2\,pt^2$, so dass

5) $$s = ct + {}^1/_2\,pt^2$$

entsteht. Das Rechteck zeigt hierbei den Einfluss der Anfangsgeschwindigkeit, das Dreieck ${}^1/_2\,pt^2$ dagegen den Einfluss der Beschleunigung auf die Wegeslänge. Will man endlich noch s durch c, v und p ausdrücken, so ersetze man in Gl. 3 die Grösse t durch $\frac{v - c}{p}$, um zu erhalten

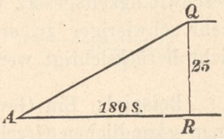
6) $$s = \frac{v + c}{2} \cdot \frac{v - c}{p} = \frac{v^2 - c^2}{2p}.$$

Für die gleichförmig verzögerte Bewegung, bei der $c > v$, gelten die Gleichungen 4, 5 und 6 ebenfalls, sobald darin $+p$ mit $-p$ vertauscht wird.

Legt man Meter und Sekunden zu Grunde, so kann eine Geschwindigkeit geschrieben werden: $v\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s.}}$. Die Beschleunigung ist aber eine Geschwindigkeitszunahme, getheilt durch eine Zeit, oder die auf die Zeiteinheit bezogene Geschwindigkeitszunahme, ist daher zu schreiben $p\ ^{m}/_{s.^2}$ und zu sprechen: p Meter in der Quadratsekunde. (Vorschlag von A. Hasselblatt, Petersburg.)

Beispiel: Ein Eisenbahnzug setzt sich vom Bahnhofe aus in Bewegung und habe, nachdem 180 Sekunden seit der Abfahrt verstrichen sind, seine volle Geschwindigkeit von $25 \frac{m}{s.}$ erreicht; es soll unter der Annahme, dass die Bewegung eine gleichfömig beschleunigte sei, die Grösse der Beschleunigung, sowie die während der Anfahrt (d. h. der 180 Sek.) zurückgelegte Wegeslänge berechnet werden.

Fig. 12.



Die Darstellung des Geschwindigkeitsgesetzes (Fig. 12) ist in diesem Falle, wo die Anfangsgeschwindigkeit $= 0$, ein Dreieck. Die Beschleunigung ist das Ansteigungsverhältnis der Geraden AQ, mithin

$$p = \frac{25}{180} = \frac{1}{7{,}2} = 0{,}14 \frac{m}{s.^2},$$

oder es wächst die Geschwindigkeit in jeder Sekunde um $0{,}14 \frac{m}{s.}$.

In $\frac{km}{h.^2}$, d. h. in Kilometern für die Quadratstunde, ausgedrückt, wird

$$p = \frac{1}{7{,}2} \frac{3600 \cdot 3600\ ^{m}}{(3600\ ^{s.})^2} = 1\,800\,000 \frac{m}{h.^2} = 1800 \frac{km}{h.^2},$$

wovon man sich auch leicht überzeugt, wenn man die Aufgabe mit

$$v = 90 \frac{km}{h.} \text{ und } t = 180\ ^{s.} = \frac{1}{20}\ ^{h.} \text{ durchfährt.}$$

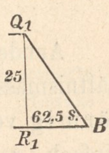
Die Wegeslänge während der Anfahrt wird gemessen durch den Inhalt des Dreiecks $A\,Q\,R$, d. h. es ist

$$s = \frac{180 \cdot 25}{2} = 2250\ ^{m}.$$

Wenn der Zug auf freier Strecke die soeben erlangte Geschwindigkeit unverändert beibehält, so ist die Darstellung des Geschwindigkeitsgesetzes dieser nun gleichförmigen Bewegung eine durch den Punkt Q gezogene Wagerechte.

Soll der Zug nun auf der nächsten Haltestelle zum Stillstande kommen, so muss er durch geeignete Mittel (Widerstände, Bremsen, unter Abstellung des Dampfes der Lokomotive) verzögert werden. Es seien diese Mittel so beschaffen, dass sie dem Zuge eine gleichbleibende Verzögerung von $0{,}4 \frac{m}{s^2}$ ertheilen; wie lange wird diese gleichförmig verzögerte Bewegung bis zum Stillstande währen, und wie gross wird ihre Wegeslänge sein, d. h. in welcher Entfernung vor der Haltestelle muss sie beginnen (müssen die Bremsen angezogen werden)?

Fig. 12a.



Die Darstellung des Geschwindigkeitsgesetzes sei $Q_1\,B$ (Fig. 12a). Da die Geschwindigkeit von $25 \frac{m}{s.}$ während jeder Sekunde um $0{,}4 \frac{m}{s.}$ sich vermindert, so sind $25 : 0{,}4 = 62{,}5\ ^{s.} = R_1\,B$ zur völligen Aufzehrung der Geschwindigkeit erforderlich. Die Wegeslänge in diesen 62,5 s. beträgt nach der Figur $\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 62{,}5 = 781{,}25$ m; d. h. etwa 781 m vor der Haltestelle muss die Verzögerung beginnen.

Die Wegeslängen der gleichförmig beschleunigten und verzögerten Bewegungen würden bei gleichbleibender Geschwindigkeit von 25 m/s. je in der Hälfte der Zeit zurückgelegt sein. Durch Anhalten und Wiederanfahren gehen daher, im Vergleiche zum einfachen Durchfahren, $90 + 31{,}25 = 121{,}25$ s. oder rund 2 Minuten verloren. Mit Einschluss von einer Minute Aufenthalt kostet also jeder Haltepunkt einem Schnellzuge 3 Minuten Mehraufwand an Zeit.

Die Annahme, dass die Anfahrt und das Anhalten gleichförmig veränderte Bewegungen seien, ist eine vereinfachende Voraussetzung; das wahre Geschwindigkeitsgesetz wird sich nicht durch gerade Linien darstellen, ist vielmehr schwieriger zu ermitteln und hängt von vielen Umständen ab, die hier nicht berücksichtigt werden können.

Beispiel: Ein Gewehrgeschoss verlasse den 0,8 m langen Gewehrlauf mit einer sekundlichen Geschwindigkeit von 400 m. Wenn man nun die im Augenblicke des Abfeuerns mit der Geschwindigkeit Null beginnende, beschleunigte Bewegung des Geschosses im Rohre wieder annähernd als gleichförmig beschleunigt betrachtet, wie lange dauert sodann die Bewegung im Rohre und wie gross ist die Beschleunigung?

Die Geschwindigkeitsfigur ist wiederum ein Dreieck, dessen Inhalt = 0,8 (Wegeslänge) sein muss. Nennt man die Zeit t, so ist $\frac{400}{2} t = 0{,}8$, d. h.

$$t = \frac{0{,}8}{200} = \frac{4}{1000} = \frac{1}{250}\text{ s.}$$

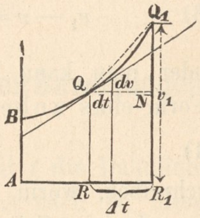
In dieser geringen Zeit wächst die sekundliche Geschwindigkeit von Null auf 400 m, in der Sekunde also um $400 : \frac{1}{250} = 400 \cdot 250 = 100\,000 \frac{\text{m}}{\text{s.}}$; die Beschleunigung beträgt also $100\,000 \frac{\text{m}}{\text{s.}^2}$. Diese überraschend grosse Zahl ist so zu verstehen, dass, wenn die gleichförmig beschleunigte Bewegung unter Einwirkung der Pulvergase 1 Sekunde lang in unveränderter Weise fortdauerte, eine Geschwindigkeit von $100\,000 \frac{\text{m}}{\text{s.}}$ entstehen würde. Die beschleunigte Bewegung in dem Rohre währt aber nur $\frac{1}{250}$ s. und bringt daher nur $400 \frac{\text{m}}{\text{s.}}$ Geschwindigkeit hervor.

b) Ungleichförmig veränderte Bewegung.

Aendert sich die Geschwindigkeit einer Bewegung nicht verhältnismässig mit der Zeit, so heisst die Bewegung eine ungleichförmig veränderte; das Geschwindigkeitsgesetz ist dann nicht mehr einfach geradlinig, sondern von der allgemeinen Form $v = \varphi(t)$, oder die Geschwindigkeitslinie ist irgend eine Kurve.

In derselben Weise nun, wie auf S. 6 der Begriff der Geschwindigkeit, ausgehend von der gleichförmigen Bewegung, durch Verallgemeinerung auf beliebige Bewegungen ausgedehnt wurde, findet auch hinsichtlich der Beschleunigung der geradlinigen Bewegung eine allgemeinere Fassung des Begriffes statt. Ist BQQ_1 (Fig. 13) die Geschwindigkeitslinie, so erfolgt in dem Zeitraume $RR_1 = \Delta t$ eine Geschwindigkeitszunahme $NQ_1 = \Delta v$. Zieht man nun die Sehne QQ_1, so ist diese die Geschwindigkeitslinie einer gleichförmig beschleunigten Bewegung, vermöge welcher die Geschwindigkeit in dem Zeitraume Δt von v auf $v + \Delta v$, also um die gleiche Grösse, wächst wie bei der gegebenen Bewegung. $p_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ist dann die mittlere Beschleunigung für diesen bestimmten Zeitraum RR_1. Wenn der beliebige Zeitraum Δt zur Grenze Null herabsinkt, nähert sich diese mittlere Beschleunigung p_m einem bestimmten Grenzwerth p, und diesen Grenzwerth $p = lim \frac{\Delta v}{\Delta t}$ oder

Fig. 13.



1) $$p = \frac{dv}{dt}$$

nennt man die **Beschleunigung** zu Zeit t. Die Beschleunigung p ist die Abgeleitete der Geschwindigkeit v nach der Zeit t, oder die zweite Abgeleitete der Wegeslänge s nach der Zeit t.

2) $$v = \varphi(t) = \frac{ds}{dt} = f'(t); \; p = \frac{dv}{dt} = \varphi'(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t).$$

Die Beschleunigung erscheint wegen $p = dv : dt$ als das Ansteigungsverhältnis der Geschwindigkeitslinie, ebenso wie die Geschwindigkeit das Ansteigungsverhältnis der Wegeslängenkurve (S. 6) war.

Beispiel: Zu dem Bewegungsgesetze $s = 3 + 2 \sin {}^1/_6\, \pi t$ (S. 9) gehörte das Geschwindigkeitsgesetz $v = {}^1/_3\, \pi \cos {}^1/_6\, \pi t = 1{,}047 \cos {}^1/_6\, \pi t$. Hieraus ergiebt sich die veränderliche Beschleunigung

$$p = -\frac{1}{18} \pi^2 \sin \frac{1}{6} \pi t = -0{,}548 \sin \frac{1}{6} \pi t.$$

Indem man $p = dv : dt$ oder $dv = p\,dt$ schreibt, betrachtet man die Geschwindigkeitsänderung dv als verhältnisgleich mit der Zeit dt, betrachtet also ein Theilchen der beliebigen Bewegung als gleichförmig verändert. Für einen endlichen Zeitraum $t_1 - t$ ist dann die Geschwindigkeitszunahme

2

$$3)\qquad v_1 - v = \int_t^{t_1} p\,dt = \text{Fläche } RQQ_1R_1 \text{ der Fig. 13;}$$

oder man kann auch die Geschwindigkeit v im Zeitpunkte t in Form eines unbestimmten Integrals

$$4)\qquad v = \int p\,dt + C$$

schreiben, worin der Werth C bestimmt werden kann, wenn für irgend einen Zeitpunkt die Geschwindigkeit bekannt ist.

Beispiel 1: Das gegebene Bewegungsgesetz sei (auf Meter und Sekunden bezogen)

$$s = 2 + 6t - 2t^2 + {}^1/_3\,t^3;$$

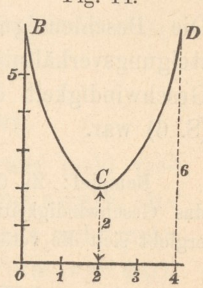
dann ergiebt sich die Geschwindigkeit

$$v = ds : dt = 6 - 4t + t^2,$$

die Beschleunigung $\quad p = dv : dt = -4 + 2t.$

Man erkennt, dass hier eine ungleichförmig veränderte Bewegung vorliegt, da p mit der Zeit t veränderlich. Zu Anfang, d. h. für $t = 0$ ist $p = -4\,\frac{\text{m}}{\text{s.}^2}$, die Bewegung also eine verzögerte; die Geschwindigkeit, welche zu Anfang $6\,\frac{\text{m}}{\text{s.}}$ betrug, nimmt also zunächst ab. Es ist aber $p \lesseqgtr 0$ für $t \lesseqgtr 2^{\text{s.}}$. Die Geschwindigkeits-Abnahme hört also auf nach 2 Sekunden, und es beginnt dann eine beschleunigte Bewegung, und zwar wächst nun auch die Beschleunigung verhältnisgleich mit der Zeit. Der Zeitpunkt $t = 2^{\text{s.}}$, wo die Geschwindigkeit aufhört abzunehmen und zu wachsen beginnt, giebt für v einen Kleinstwerth $v_{min} = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s.}}$. Die Geschwindigkeitslinie ist eine Parabel mit lothrecht aufwärts gerichteter Achse; der Scheitel entspricht dem Zeitwerthe $t = 2$ Sekunden. Die während der ersten 4 Sekunden zurückgelegte Wegeslänge $s - s_0$ ist leicht als die unterhalb der Parabel BCD (Fig. 14) befindliche Fläche zu berechnen. Da man weiss, dass die Parabelfläche $BCD = {}^2/_3$ des umschriebenen Rechtecks ist, so wird

Fig. 14.



$$s - s_0 = 6 \cdot 4 - {}^2/_3\,(6 - 2)\,4 = 13\,{}^1/_3{}^{\text{m}}.$$

Zur Prüfung liefert das Bewegungsgesetz

für $t = 4^{\text{s.}}$ $\quad s = 15\,{}^1/_3$,

für $t = 0$ $\quad s_0 = 2$ $\quad$, mithin $s - s_0 = 13\,{}^1/_3{}^{\text{m}}$.

Beispiel 2: Eine geradlinige Bewegung erfolge mit der Beschleunigung $p = 2 + 3t^2$, und es sei für $t = 0$: $v = c = 1 \frac{\text{m}}{\text{s.}}$, $s_0 = 0$. Dann wird aus

$$dv = (2 + 3t^2)\,dt$$

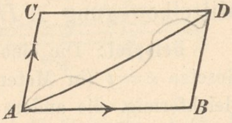
$$v - 1 = \int_0^t (2 + 3t^2)\,dt = 2t + t^3 \quad \text{oder} \quad v = 1 + 2t + t^3 \quad \text{und}$$

$$s = \int_0^t (1 + 2t + t^3)\,dt = t + t^2 + {}^1\!/\!_4\, t^4.$$

3. Zusammensetzung mehrerer gleichzeitigen Bewegungen eines Punktes.

Ein Massenpunkt durchlaufe während der Zeit t die Bahnlinie AB (Fig. 15), und zwar in der Richtung von A nach B; diese Bahnlinie gehöre aber einem Körper an, welcher sich derartig parallel verschiebt, dass der Punkt A der Linie AB während der Zeit t die Bewegung AC ausführt und die ganze Bahnlinie AB in die parallele Lage CD kommt. Dann wird der Massenpunkt in Folge der beiden gleichzeitigen Bewegungen aus der Anfangslage A in irgend einer Bahnlinie nach D gelangen, und man nennt diese wahre Bewegung AD die Mittelbewegung oder Resultirende aus den beiden Seitenbewegungen AB und AC.

Fig. 15.



Anstatt diese wahre Bewegung AD als das Ergebnis der Bewegungen AB und AC zu bezeichnen, sagt man auch wohl kürzer, der Massenpunkt führe zwei gleichzeitige Seitenbewegungen aus, womit aber stets nur der beschriebene Vorgang gemeint sein soll. Da die Figur $ABDC$ ein Parallelogramm ist, so ergiebt sich ohne Weiteres der **Satz vom Parallelogramm der Bewegungen:**

Führt ein Massenpunkt gleichzeitig zwei Seitenbewegungen aus, so ist der dem Anfangspunkt A gegenüberliegende Endpunkt des aus den beiden Seitenbewegungen gezeichneten Parallelogramms der wahre Ort des Punktes.

Man denke sich, auf dem Stabe AB ein Sonnenkäferchen entlang laufend, während man den Stab parallel nach CD verschiebt; dann gelangt das Sonnenkäferchen in Wirklichkeit von A nach D.

Eine Gerade AB von bestimmter Richtung, bestimmter Grösse und einem Pfeile, der einen bestimmten Bewegungssinn angiebt,