

## b) Ungleichförmige Bewegung eines Punktes.

Hat das Bewegungsgesetz  $s = f(t)$  nicht die einfach lineare Form, ist die Wegeslängen-Kurve also eine krumme Linie (Fig. 7), so ist das Verhältnis von  $s_1 - s$  zu  $t_1 - t$  veränderlich; man nennt dann die Bewegung eine ungleichförmige. Während des Zeitraumes  $RR_1 = t_1 - t = \Delta t$  wird eine Wegeslänge  $PP_1 = s_1 - s = \Delta s$  zurückgelegt. Stellt man sich nun vor, dass diese Strecke  $\Delta s$ , statt nach dem gegebenen Bewegungsgesetze, gleichförmig beschrieben würde, so wäre

$$1) \quad \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v_m$$

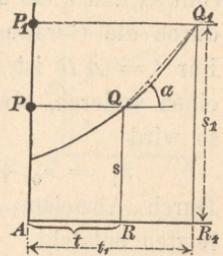
die Geschwindigkeit dieser gedachten gleichförmigen Bewegung; die Sehne  $QQ_1$  gäbe die Darstellung des Gesetzes derselben, und das Ansteigungsverhältnis dieser Sehne das Maß der Geschwindigkeit  $v_m$ . Die Geschwindigkeit  $v_m$  dieser gleichförmigen Bewegung, vermöge deren der sich bewegendende Punkt in dem Zeitraume  $t_1 - t$  dieselbe Wegeslänge  $s_1 - s$  zurücklegen würde wie nach dem wirklichen Bewegungsgesetze, nennt man die **mittlere Geschwindigkeit** für den Zeitraum  $t_1 - t$ .

Die stellvertretende gleichförmige Bewegung, dargestellt durch die Sehne  $QQ_1$ , wird sich nun der gegebenen Bewegung, dargestellt durch die Kurve, in der Nähe des Zeitpunktes  $t$  um so mehr anschmiegen, also von ihr um so weniger abweichen, je kleiner man den Zeitraum  $t_1 - t = \Delta t$  und mithin auch die Sehne  $Q_1 Q$  wählt. Lässt man den Zeitraum  $\Delta t$  im Sinne der Differentialrechnung zu einem unendlich kleinen Zeittheilchen  $dt$  werden, so rückt auch der Kurvenpunkt  $Q_1$  dem Punkte  $Q$  unendlich nahe, und aus der Sehne  $QQ_1$  wird dann eine Berührungsgerade der Kurve im Punkte  $Q$ . Die für das unendlich kleine Zeittheilchen  $dt$  berechnete mittlere Geschwindigkeit

$$2) \quad v = ds : dt$$

bezeichnet man als die Geschwindigkeit der gegebenen Bewegung im Zeitpunkte  $t$ . Sie erscheint als das Ansteigungsverhältnis der entsprechenden Berührungsgeraden der Wegeslängen-Kurve oder (was dasselbe ist) als das Ansteigungsverhältnis der Wegeslängen-Kurve selbst. Man bestimmt

Fig. 7.



die Geschwindigkeit im Zeitpunkte  $t$  als die erste Abgeleitete oder den ersten Differential-Quotienten  $v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$  des gegebenen Bewegungs-Gesetzes  $s = f(t)$ .

Die Form  $v = \frac{ds}{dt}$ , in welcher bei ungleichförmiger Bewegung die Geschwindigkeit ausgedrückt wird, entspricht der Form  $c = \frac{s_1 - s}{t_1 - t}$  bei der gleichförmigen Bewegung; man betrachtet aber nur ein unendlich kleines Theilchen der Bewegung und denkt sich dieses durch eine gleichförmige mit derselben Wegeslänge  $ds$  ersetzt.

**Beispiel:** Dem Bewegungsgesetze  $s = 1 + \frac{1}{4}t^2$  (S. 4) entspricht hiernach das Geschwindigkeits-Gesetz

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}t.$$

Für  $t = 0$  ist  $v = 0$ ; mit fortlaufender Zeit nimmt die Geschwindigkeit  $v$  gleichmässig zu. Man ersieht auch aus Fig. 3, dass das Ansteigungsverhältnis der Kurve  $BQ$  bei  $B$  gleich Null ist und nach rechts fortwährend zunimmt.

Da die Geschwindigkeit die auf eine Zeiteinheit bezogene Wegeslänge bezeichnet, so müssen bei einer Geschwindigkeits-Zahl selbstverständlich auch die Längeneinheit und die Zeiteinheit bekannt sein, auf welche sich die Zahl bezieht. Rechnet man nach Metern und Sekunden, so schreibt man z. B.  $v = 3$  m/s, wenn die sekundliche Geschwindigkeit 3 Meter beträgt, während  $v = 10$  km/h, eine Geschwindigkeit von 10 Kilometern in einer Stunde (hora) bedeutet.

Kilometer, Meter, Centimeter und Millimeter werden durch km, m, cm und mm ohne Punkte bezeichnet, während Stunde, Minute und Sekunde durch h., m. und s. mit Punkten ausgedrückt werden soll.

Zuweilen kennt man von einer Bewegung nur die in einzelnen grösseren Zeiträumen zurückgelegten Wegeslängen, kann daraus dann die mittlere Geschwindigkeit für jeden dieser Zeiträume berechnen und betrachtet diese annäherungsweise als wahre Geschwindigkeiten, indem man jeden Bewegungstheil als einen gleichförmigen ansieht.

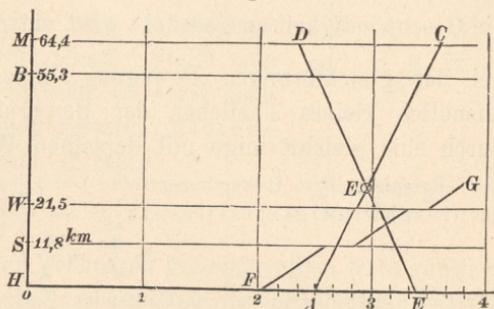
**Beispiel 1:** Letzteres findet Anwendung bei der zeichnerischen Darstellung der Fahrpläne der Eisenbahnzüge. Ein Eisenbahnzug ist freilich eine vielfältig zusammengesetzte Körpergruppe, deren einzelne Theile die verschiedenartigsten Bewegungen ausführen. Für den Zweck der Fahrpläne kommen aber diese verwickelten Verhältnisse nicht in Betracht. Vielmehr denkt man sich den

ganzen Zug zu einem Punkte zusammengedrängt, denkt sich die Mittellinie des Gleises geradlinig gestreckt und längs dieser Mittellinie den Punkt sich verschiebend. Als Wegelängen trägt man die Strecken von Mitte der Stationen auf. Die Bewegungen von Station zu Station, welche in Wirklichkeit zum Theil ungleichförmige sind, betrachtet man annähernd als gleichförmig, indem man die Bewegungsgesetze nach mittleren Geschwindigkeiten durch gerade Linien darstellt. Auf der

wagerechten Grundlinie (Fig. 8) sind die Zeiten, von Mitternacht beginnend, aufgetragen, und zwar bedeuten die kleinen Theile je 10 Minuten. Auf der lothrechten Achse sind die Strecken der Bahnlinie, nach Kilometern angegeben, abgetheilt, und z. B. mit  $H$  (Hannover),

$S$  (Seelze),  $W$  (Wunstorf),  $B$  (Bückeberg) und  $M$  (Minden) bezeichnet. Ein Nachtschnellzug, um 2 Uhr 30 Min. von Hannover abfahrend, trifft 2 Uhr 51 Min. in Wunstorf ein, fährt nach 1 Minute Aufenthalt weiter, ist 3 Uhr 24 Min. in Bückeberg, hat 1 Minute Aufenthalt und langt 3 Uhr 34 Min. in Minden an. Dieser Zug ist durch die gebrochene Linie  $AC$  dargestellt. Den Stations-Aufenthalt bezeichnet ein kurzer wagerechter Strich oder Absatz. Der Linienzug  $DE$  bezieht sich auf einen Gegenzug, der um 2 Uhr 18 Min. in Minden abfährt und 3 Uhr 10 Min. in Hannover eintrifft. Der Schnittpunkt  $E$  beider Linien kennzeichnet den Zeitpunkt und die Stelle (zwischen  $B$  und  $W$ ), wo beide Züge an einander vorbeifahren. Da die Eisenbahn doppelgleisig ist, kann dies auf freier Strecke (zwischen 2 Bahnhöfen) geschehen, wogegen es bei eingleisigen Bahnen nur auf einer Station möglich wäre. Der Linienzug  $FG$  bezeichnet einen Güterzug, dessen erheblich geringere Geschwindigkeit aus der schwächeren Ansteigung hervorgeht. Dieser Güterzug hält längere Zeit in Seelze und wird hier von dem ohne Aufenthalt durchfahrenden Schnellzug überholt. Linien, die nach derselben Seite hin ansteigen, bezeichnen Züge in derselben Richtung, die auf demselben Gleise fahren, sich daher nur auf Stationen überholen können. Dieserhalb dürfen Linien, die nach derselben Seite ansteigen, sich nur auf Stationslinien durchschneiden. Solche Fahrpläne enthalten in Wirklichkeit sämtliche Züge zu einem Bilde vereinigt und sind ein unentbehrliches Hilfsmittel des Betriebes, wenn es sich um Einlegung von Sonderzügen, um Ausführung von Gleisarbeiten u. dergl. handelt, weil man daraus klar erkennen kann, zu welchen Zeiten die Gleise für neue Züge oder für Arbeiten frei sind. In der wirklichen Ausführung liegt freilich die Zeitachse lothrecht, die Längsachse wagerecht, doch lediglich aus äusseren Zweckmässigkeits-Rücksichten, die mit dem Wesen der Sache nichts zu thun haben. Die 33,3 km zwischen

Fig. 8.



Wunstorf und Bückebug werden in 32 Minuten zurückgelegt, d. h. mit einer mittleren Geschwindigkeit von 1,06 Kilometern in der Minute

$$= 1,06 \frac{\text{km}}{\text{m.}} = 60 \cdot 1,06 \frac{\text{km}}{60 \text{ m.}} = 63,6 \frac{\text{km}}{\text{h.}} \text{ oder}$$

$$1060 \frac{\text{m}}{60 \text{ s.}} = \frac{1060}{60} \frac{\text{m}}{\text{s.}} = 17,67 \frac{\text{m}}{\text{s.}}$$

Eine sekundliche Geschwindigkeit von 20 m ist gleichbedeutend mit

$$20 \cdot \frac{3600 \text{ m}}{3600 \text{ s.}} = 72000 \frac{\text{m}}{\text{h.}} = 72 \frac{\text{km}}{\text{h.}},$$

d. h. mit einer stündlichen Geschwindigkeit von 72 km, während

$$100 \frac{\text{km}}{\text{h.}} = \frac{100000}{3600} \frac{\text{m}}{\text{s.}} = 27,78 \frac{\text{m}}{\text{s.}}$$

bedeutet.

**Beispiel 2:** Die lothrechte Auf- und Abwärts-Bewegung eines der Ebbe und Fluth unterworfenen Wasserspiegels erfolge nach dem Bewegungsgesetze  $s = 3 + 2 \sin \frac{1}{6} \pi t$ , wobei die Zeiten  $t$  in Stunden (abgekürzt h.) die Wege  $s$  in Metern zu verstehen sind. Die Darstellung dieses Gesetzes (die Fluthkurve)

hat dann die Form der Fig. 9. Für  $t = 3$  Stunden erreicht  $\sin \frac{1}{6} \pi t$  seinen grössten Werth  $\sin \frac{1}{2} \pi = 1$ , für  $t = 9$  h. seinen kleinsten Werth  $\sin \frac{3}{2} \pi = -1$ , so dass  $s$  zwischen dem grössten Werthe 5 m und dem kleinsten Werthe 1 m schwankt. Das Geschwindigkeits-Gesetz ist

$v = \frac{1}{3} \pi \cos \frac{1}{6} \pi t = 1,047 \cdot \cos \frac{1}{6} \pi t$ . Für  $t = 0$ ,  $t = 12$  und ganze Vielfache davon hat  $v$  seinen grössten Werth, nämlich  $v_{max} = 1,047 \text{ m/h.}$  Für  $t = 6$ ,  $t = 18$ ,  $30$  u. s. w. hat  $v$  seinen grössten negativen oder seinen Minimalwerth, nämlich  $v_{min} = -1,047 \text{ m/h.}$  Die Geschwindigkeit  $v$  ist positiv, solange die Wegelängenkurve nach rechts ansteigt, und umgekehrt; sie ist Null, wenn das Steigen in Fallen übergeht, und umgekehrt, d. h. an den höchsten und tiefsten Punkten der Kurve, nämlich für  $t = 3, 9, 15$  u. s. w. — Fig. 9 stellt eine ideelle Fluthkurve dar. Die wahren Fluthkurven weichen davon zunächst grundsätzlich in der Weise ab, dass wegen der Bewegung des Mondes um die Erde die Zeit zwischen zwei höchsten Wasserständen nicht 12 Stunden, sondern mehr, nämlich 12 Stunden 25 Minuten beträgt. Ausserdem enthalten die wirklichen Fluthkurven Unregelmässigkeiten, die von der örtlichen Gestaltung der Flussbetten, des Meerbodens, der Ufer, den Windverhältnissen u. s. w. abhängen.

Fig. 9.

