Erste Abtheilung.

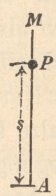
Mechanik des Massenpunktes.

Die Bewegung eines Massenpunktes heisst geradlinig oder krummlinig, je nachdem die Bahnlinie eine Gerade oder eine Kurve ist. Unter der „Richtung der Bewegung“ versteht man die Richtung der Bahnlinie an derjenigen Stelle, wo der Massenpunkt sich augenblicklich befindet. Bei der geradlinigen Bewegung ist also die Bewegungsrichtung dauernd dieselbe; bei der krummlinigen Bewegung ändert sie sich fortwährend.

1. Darstellung des Gesetzes der geradlinigen Bewegung eines Punktes.

Bewegt sich ein Massenpunkt auf einer Geraden, so kann der Ort P desselben in irgend einem Augenblicke durch seinen Abstand s von einem festen Punkte A der Bahnlinie AM (Fig. 1) angegeben werden. Die während der Bewegung verfliessende Zeit wird von irgend einem Zeitpunkte an nach Zeiteinheiten (etwa Sekunden) gezählt und mit t bezeichnet, während s in Längeneinheiten (etwa Metern) ausgedrückt wird. Ist nun zwischen den beiden veränderlichen Grössen s und t eine Beziehung bekannt, etwa

Fig. 1.



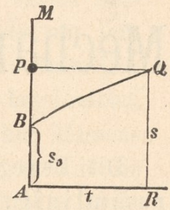
$$s = f(t),$$

so kann man für jeden Werth von t, d. h. für jeden Zeitpunkt, die zugehörige Grösse s und damit die Lage des Massenpunktes auf seiner Bahnlinie berechnen. Es wird daher die Gleichung $s = f(t)$ das Bewegungsgesetz der geradlinigen Bewegung des Massenpunktes genannt.

Ein solches Bewegungsgesetz wird am besten anschaulich gemacht durch eine bildliche Darstellung, indem man die Zeitgrössen t nach einem beliebig gewählten Maassstabe als Abscissen, die Längen s ebenso als Ordinaten aufträgt. Die Bahnlinie AM kann dann unmittelbar als Ordinatenachse benutzt werden. Die so erhaltene

Linie BQ (Fig. 2) nennen wir die **Wegeslängen-Kurve** (die man aber ja nicht als Bahnlinie auffassen darf). Aus Fig. 2 erkennt man, dass der Massenpunkt zu Anfang der Betrachtung, d. h. für $t = o$, schon in einem Abstand $AB = s_0$ von dem Festpunkte A sich befand, und dass dieser Abstand s sich mit wachsender Zeit vergrössert, dass der Massenpunkt sich also in der Richtung von A nach M bewegen wird. Nach $t = AR$ Zeiteinheiten ist $s = QR$; zieht man nun durch Q eine Parallele zur Zeitachse, so bestimmt diese den augenblicklichen Ort P auf der Bahnlinie AM.

Fig. 2.

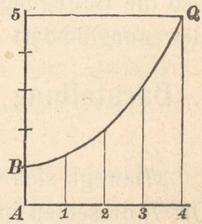


Beispiel: Das Bewegungsgesetz $s = 1 + \frac{1}{4} t^2$ liefert für angenommene Werthe 0, 1, 2, . . . folgende zugehörige Werthe von s:

$t = 0$	1	2	3	4
$s = 1$	$1\frac{1}{4}$	2	$3\frac{1}{4}$	5.

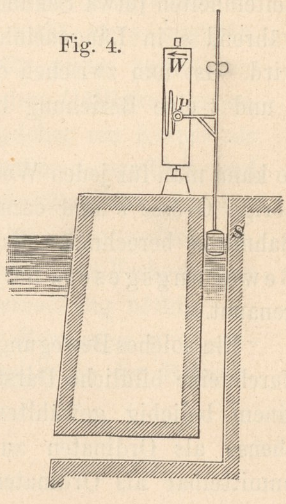
Das Bewegungsgesetz lässt sich auch schreiben $t^2 = 2 \cdot 2\ (s - 1)$; dies ist die Gleichung einer Parabel mit lothrechter Achse und dem Scheitel B (Fig. 3.).

Fig. 3.



In manchen Fällen, wo das **Gesetz** einer Bewegung nicht bekannt ist, verschafft man sich dadurch eine möglichst genaue Kenntnis desselben, dass man den als Massenpunkt zu betrachtenden beweglichen Körper mit einem Schreibstifte versieht, der auf einer durch ein Uhrwerk gleichmässig gedrehten Papierwalze W die bildliche Darstellung des Bewegungsgesetzes selbstthätig aufzeichnet. So kann z. B. ein veränderlicher Wasserstand durch Schwimmer sich selbstthätig auftragen, indem ein mit dem Schwimmer S verbundener Schreibstift P die entsprechende Kurve (Fluthkurve) beschreibt (Fig. 4). Gewöhnlich ist der Wechsel der Wasserstandshöhe zur unmittelbaren Auftragung zu gross; alsdann ist die lothrechte Bewegung durch geeignetes Räderwerk in verkleinertem Maſsstabe (etwa 1 : 25) zur Darstellung zu bringen.

Fig. 4.

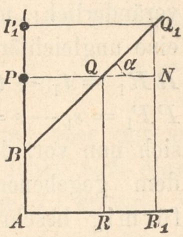


a) Gleichförmige Bewegung eines Punktes. Geschwindigkeit.

Der einfachste Fall eines Bewegungsgesetzes ist offenbar die geradlinige (lineare) Form

1) $$s = s_0 + ct$$

Fig. 5.



(mit s_0 und c als unveränderlichen Grössen), welche durch die Gerade BQ (Fig. 5) dargestellt wird. Für $t = AR$ ist $s = RQ = AP$. Giebt man t einen anderen, etwa grösseren Werth $t_1 = AR_1$, so wird

$$s_1 = s_0 + ct_1 = R_1 Q_1 = AP_1.$$

Durch Abziehen der ersten Gleichung von der letzten entsteht

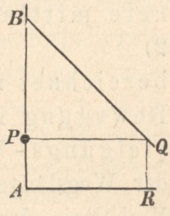
$$s_1 - s = c(t_1 - t) \text{ oder } c = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{entsprechende Zeit}}.$$

Die unveränderliche Grösse c der Gl. 1 ist also das Verhältnis der zurückgelegten Wegeslänge zu der Anzahl der dazu verbrauchten Zeiteinheiten. Eine Bewegung, bei der dieses Verhältnis des Weges zur Zeit sich nicht ändert, bei der also in gleichen Zeiträumen stets gleiche Wegeslängen zurückgelegt werden, heisst eine gleichförmige.

Wählt man den beliebigen Zeitraum $t_1 - t$ gleich der Zeiteinheit, so bedeutet $c = s_1 - s$ die in jeder Zeiteinheit zurückgelegte Wegeslänge, und dieses Verhältnis: Weg durch Zeit, oder die in jeder Zeiteinheit zurückgelegte Wegeslänge heisst die Geschwindigkeit c der gleichförmigen Bewegung.

In der Darstellung des Bewegungsgesetzes (Fig. 5) erscheint die Geschwindigkeit $c = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{Q_1 N}{Q N} = \operatorname{tg} \alpha$ als das Ansteigungsverhältnis der Wegeslängen-Kurve BQ.

Fig. 6.



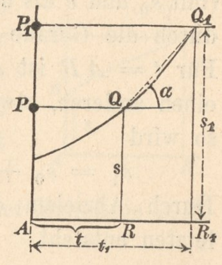
Ist das Ansteigungsverhältnis der Geraden BQ negativ (Fig. 6), so erhalten wir das Gesetz $s = s_0 - ct$ mit negativer Geschwindigkeit c; es bedeutet dies eine rückläufige Bewegung von B nach dem Festpunkte A hin.

Ist BQ der Zeitachse parallel, d. h ist $\operatorname{tg} \alpha$ und damit die Geschwindigkeit $c = 0$, so bleibt s unverändert $= s_0$; der Massenpunkt ruht also.

b) Ungleichförmige Bewegung eines Punktes.

Hat das Bewegungsgesetz $s = f(t)$ nicht die einfach lineare Form, ist die Wegeslängen-Kurve also eine krumme Linie (Fig. 7), so ist das Verhältnis von $s_1 - s$ zu $t_1 - t$ veränderlich; man nennt dann die Bewegung eine ungleichförmige. Während des Zeitraumes $RR_1 = t_1 - t = \Delta t$ wird eine Wegeslänge $PP_1 = s_1 - s = \Delta s$ zurückgelegt. Stellt man sich nun vor, dass diese Strecke Δs, statt nach dem gegebenen Bewegungsgesetze, gleichförmig beschrieben würde, so wäre

Fig. 7.



1) $$\frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v_m$$

die Geschwindigkeit dieser gedachten gleichförmigen Bewegung; die Sehne QQ_1 gäbe die Darstellung des Gesetzes derselben, und das Ansteigungs-Verhältnis dieser Sehne das Maſs der Geschwindigkeit v_m. Die Geschwindigkeit v_m dieser gleichförmigen Bewegung, vermöge deren der sich bewegende Punkt in dem Zeitraume $t_1 - t$ dieselbe Wegeslänge $s_1 - s$ zurücklegen würde wie nach dem wirklichen Bewegungsgesetze, nennt man die **mittlere Geschwindigkeit** für den Zeitraum $t_1 - t$.

Die stellvertretende gleichförmige Bewegung, dargestellt durch die Sehne QQ_1, wird sich nun der gegebenen Bewegung, dargestellt durch die Kurve, in der Nähe des Zeitpunktes t um so mehr anschmiegen, also von ihr um so weniger abweichen, je kleiner man den Zeitraum $t_1 - t = \Delta t$ und mithin auch die Sehne $Q_1 Q$ wählt. Lässt man den Zeitraum Δt im Sinne der Differentialrechnung zu einem unendlich kleinen Zeittheilchen dt werden, so rückt auch der Kurvenpunkt Q_1 dem Punkt Q unendlich nahe, und aus der Sehne QQ_1 wird dann eine Berührungsgerade der Kurve im Punkte Q. Die für das unendlich kleine Zeittheilchen dt berechnete mittlere Geschwindigkeit

2) $$v = ds : dt$$

bezeichnet man als die Geschwindigkeit der gegebenen Bewegung im Zeitpunkte t. Sie erscheint als das Ansteigungs-Verhältnis der entsprechenden Berührungsgeraden der Wegslängen-Kurve oder (was dasselbe ist) als das Ansteigungs-Verhältnis der Wegeslängen-Kurve selbst. Man bestimmt die Geschwindigkeit im Zeitpunkte t als die erste Abgeleitete oder den ersten Differential-Quotienten $v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$ des gegebenen Bewegungs-Gesetzes $s = f(t)$.

Die Form $v = \frac{ds}{dt}$, in welcher bei ungleichförmiger Bewegung die Geschwindigkeit ausgedrückt wird, entspricht der Form $c = \frac{s_1 - s}{t_1 - t}$ bei der gleichförmigen Bewegung; man betrachtet aber nur ein unendlich kleines Theilchen der Bewegung und denkt sich dieses durch eine gleichförmige mit derselben Wegeslänge ds ersetzt.

Beispiel: Dem Bewegungsgesetze $s = 1 + {}^1/_4\, t^2$ (S. 4) entspricht hiernach das Geschwindigkeits-Gesetz

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\, t.$$

Für $t = 0$ ist $v = 0$; mit fortlaufender Zeit nimmt die Geschwindigkeit v gleichmässig zu. Man ersieht auch aus Fig. 3, dass das Ansteigungs-Verhältnis der Kurve BQ bei B gleich Null ist und nach rechts fortwährend zunimmt.

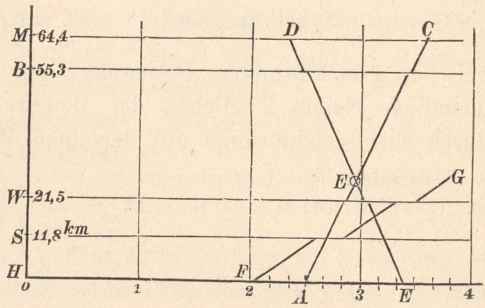
Da die Geschwindigkeit die auf eine Zeiteinheit bezogene Wegeslänge bezeichnet, so müssen bei einer Geschwindigkeits-Zahl selbstverständlich auch die Längeneinheit und die Zeiteinheit bekannt sein, auf welche sich die Zahl bezieht. Rechnet man nach Metern und Sekunden, so schreibt man z. B. $v = 3\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s.}}$ wenn die sekundliche Geschwindigkeit 3 Meter beträgt, während $v = 10\ {}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{h.}}$ eine Geschwindigkeit von 10 Kilometern in einer Stunde (hora) bedeutet.

Kilometer, Meter, Centimeter und Millimeter werden durch km, m, cm und mm ohne Punkte bezeichnet, während Stunde, Minute und Sekunde durch h., m. und s. mit Punkten ausgedrückt werden soll.

Zuweilen kennt man von einer Bewegung nur die in einzelnen grösseren Zeiträumen zurückgelegten Wegeslängen, kann daraus dann die mittlere Geschwindigkeit für jeden dieser Zeiträume berechnen und betrachtet diese annäherungsweise als wahre Geschwindigkeiten, indem man jeden Bewegungstheil als einen gleichförmigen ansieht.

Beispiel 1: Letzteres findet Anwendung bei der zeichnerischen Darstellung der Fahrpläne der Eisenbahnzüge. Ein Eisenbahnzug ist freilich eine vielfältig zusammengesetzte Körpergruppe, deren einzelne Theile die verschiedenartigsten Bewegungen ausführen. Für den Zweck der Fahrpläne kommen aber diese verwickelten Verhältnisse nicht in Betracht. Vielmehr denkt man sich den ganzen Zug zu einem Punkte zusammengedrängt, denkt sich die Mittellinie des Gleises geradlinig gestreckt und längs dieser Mittellinie den Punkt sich verschiebend. Als Wegeslängen trägt man die Strecken von Mitte zu Mitte der Stationen auf. Die Bewegungen von Station zu Station, welche in Wirklichkeit zum Theil ungleichförmige sind, betrachtet man annähernd als gleichförmig, indem man die Bewegungsgesetze nach mittleren Geschwindigkeiten durch gerade Linien darstellt. Auf der wagerechten Grundlinie (Fig. 8) sind die Zeiten, von Mitternacht beginnend, aufgetragen, und zwar bedeuten die kleinen Theile je 10 Minuten. Auf der lothrechten Achse sind die Strecken der Bahnlinie, nach Kilometern angegeben, abgetheilt, und z. B. mit H (Hannover), S (Seelze), W (Wunstorf), B (Bückeburg) und M (Minden) bezeichnet. Ein Nachtschnellzug, um 2 Uhr 30 Min. von Hannover abfahrend, trifft 2 Uhr 51 Min. in Wunstorf ein, fährt nach 1 Minute Aufenthalt weiter, ist 3 Uhr 24 Min. in Bückeburg, hat 1 Minute Aufenthalt und langt 3 Uhr 34 Min. in Minden an. Dieser Zug ist durch die gebrochene Linie AC dargestellt. Den Stations-Aufenthalt bezeichnet ein kurzer wagerechter Strich oder Absatz. Der Linienzug DE bezieht sich auf einen Gegenzug, der um 2 Uhr 18 Min. in Minden abfährt und 3 Uhr 10 Min. in Hannover eintrifft. Der Schnittpunkt E beider Linien kennzeichnet den Zeitpunkt und die Stelle (zwischen B und W), wo beide Züge an einander vorbeifahren. Da die Eisenbahn doppelgleisig ist, kann dies auf freier Strecke (zwischen 2 Bahnhöfen) geschehen, wogegen es bei eingleisigen Bahnen nur auf einer Station möglich wäre. Der Linienzug FG bezeichnet einen Güterzug, dessen erheblich geringere Geschwindigkeit aus der schwächeren Ansteigung hervorgeht. Dieser Güterzug hält längere Zeit in Seelze und wird hier von dem ohne Aufenthalt durchfahrenden Schnellzug überholt. Linien, die nach derselben Seite hin ansteigen, bezeichnen Züge in derselben Richtung, die auf demselben Gleise fahren, sich daher nur auf Stationen überholen können. Dieserhalb dürfen Linien, die nach derselben Seite ansteigen, sich nur auf Stationslinien durchschneiden. Solche Fahrpläne enthalten in Wirklichkeit sämmtliche Züge zu einem Bilde vereinigt und sind ein unentbehrliches Hülfsmittel des Betriebes, wenn es sich um Einlegung von Sonderzügen, um Ausführung von Gleisarbeiten u. dergl. handelt, weil man daraus klar erkennen kann, zu welchen Zeiten die Gleise für neue Züge oder für Arbeiten frei sind. In der wirklichen Ausführung liegt freilich die Zeitachse lothrecht, die Längenachse wagerecht, doch lediglich aus äusseren Zweckmässigkeits-Rücksichten, die mit dem Wesen der Sache nichts zu thun haben. Die 33,9 km zwischen

Fig. 8.



Wunstorf und Bückeburg werden in 32 Minuten zurückgelegt, d. h. mit einer mittleren Geschwindigkeit von 1,06 Kilometern in der Minute

$$= 1{,}06 \frac{\text{km}}{\text{m.}} = 60 \cdot 1{,}06 \frac{\text{km}}{60\ \text{m.}} = 63{,}6 \frac{\text{km}}{\text{h.}} \text{ oder}$$

$$1060 \frac{\text{m}}{60\ \text{s.}} = \frac{1060}{60} \frac{\text{m}}{\text{s.}} = 17{,}67 \frac{\text{m}}{\text{s.}}.$$

Eine sekundliche Geschwindigkeit von 20 $^{\text{m}}$ ist gleichbedeutend mit

$$20 \cdot \frac{3600\ \text{m}}{3600\ \text{s.}} = 72\,000 \frac{\text{m}}{\text{h.}} = 72 \frac{\text{km}}{\text{h.}},$$

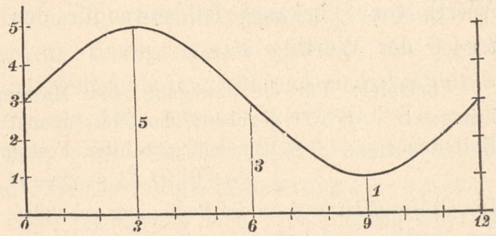
d. h. mit einer stündlichen Geschwindigkeit von 72 $^{\text{km}}$, während

$$100 \frac{\text{km}}{\text{h.}} = \frac{100\,000}{3600} \frac{\text{m}}{\text{s.}} = 27{,}78 \frac{\text{m}}{\text{s.}}$$

bedeutet.

Beispiel 2: Die lothrechte Auf- und Abwärts-Bewegung eines der Ebbe und Fluth unterworfenen Wasserspiegels erfolge nach dem Bewegungsgesetze $s = 3 + 2 \sin {}^1/_6\, \pi t$, wobei die Zeiten t in Stunden (abgekürzt h.) die Wege s in Metern zu verstehen sind. Die Darstellung dieses Gesetzes (die Fluthkurve) hat dann die Form der Fig. 9. Für $t = 3$ Stunden erreicht $\sin {}^1/_6\, \pi t$ seinen grössten Werth $\sin {}^1/_2\, \pi = 1$, für $t = 9$ $^{\text{h.}}$ seinen kleinsten Werth $\sin {}^3/_2\, \pi = -1$, so dass s zwischen dem grössten Werthe 5 $^{\text{m}}$ und dem kleinsten Werthe 1 $^{\text{m}}$ schwankt. Das Geschwindigkeits-Gesetz ist

Fig. 9.



$v = {}^1/_3\, \pi \cos {}^1/_6\, \pi t = 1{,}047 \cdot \cos {}^1/_6\, \pi t$. Für $t = 0$, $t = 12$ und ganze Vielfache davon hat v seinen grössten Werth, nämlich $v_{max} = 1{,}047$ $^{\text{m}}/_{\text{h}}$. Für $t = 6$, $t = 18$, 30 u. s. w. hat v seinen grössten negativen oder seinen Minimalwerth, nämlich $v_{min} = -1{,}047$ $^{\text{m}}/_{\text{h.}}$. Die Geschwindigkeit v ist positiv, solange die Wegeslängenkurve nach rechts ansteigt, und umgekehrt; sie ist Null, wenn das Steigen in Fallen übergeht, und umgekehrt, d. h. an den höchsten und tiefsten Punkten der Kurve, nämlich für $t = 3$, 9, 15 u. s. w. — Fig. 9 stellt eine ideelle Fluthkurve dar. Die wahren Fluthkurven weichen davon zunächst grundsätzlich in der Weise ab, dass wegen der Bewegung des Mondes um die Erde die Zeit zwischen zwei höchsten Wasserständen nicht 12 Stunden, sondern mehr, nämlich 12 Stunden 25 Minuten beträgt. Ausserdem enthalten die wirklichen Fluthkurven Unregelmässigkeiten, die von der örtlichen Gestaltung der Flussbetten, des Meerbodens, der Ufer, den Windverhältnissen u. s. w. abhängen.