Formeln 23 und 24 $r - e$ mit h und e mit $r - h$ vertauscht werden. Dann wird aus Formel 23:

$$r - h > \frac{r^2}{R + r}; \quad h < r - \frac{r^2}{R + r} = \frac{Rr}{R + r} = \frac{R}{\frac{R}{r} + 1}$$

und, weil $r = \infty$, verlangt die Standsicherheit der Wippe

26) $$h < R.$$

Aus Formel 24 wird

$$l = \frac{h^2 + i^2}{r - h - \frac{r^2}{R + r}} = \frac{h^2 + i^2}{Rr - h(R + r)}(R + r) = \frac{(h^2 + i^2)\left(\frac{R}{r} + 1\right)}{R - h\left(\frac{R}{r} + 1\right)}$$

und mit $r = \infty$ als Schwingungslänge der Wippe

27) $$l = \frac{h^2 + i^2}{R - h}.$$

Die Formeln 26 und 27 lassen sich auch leicht unmittelbar finden.

Beispiel: Es sei (Fig. 198) $a = 2^{\mathrm{m}}$; $b = 5^{\mathrm{cm}} = 0{,}05^{\mathrm{m}}$; $h = 0{,}025^{\mathrm{m}}$ $R = 0{,}1^{\mathrm{m}}$. Dann wird für das polare Trägheitsmoment des Rechtecks nach 1. Theil, S. 271:

$$i^2 = \frac{a^2 + b^2}{12} = \frac{4 + 0{,}05^2}{12} = 0{,}334, \text{ daher}$$

$$l = \frac{0{,}0006 + 0{,}334}{0{,}1 - 0{,}025} = 4{,}46^{\mathrm{m}}$$

und die Dauer einer einfachen Schwingung

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \text{rund } \sqrt{l} = 2{,}1^{\mathrm{s}}.$$

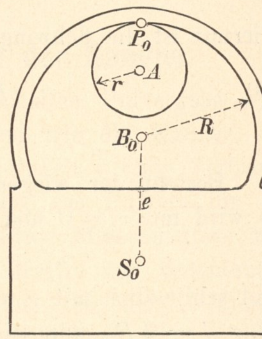
Offenbar ist für derartige Bohlenwippen genügend genau

$$l = \frac{a^2}{12(R - h)} = \frac{a^2}{12\left(R - \frac{b}{2}\right)} = 4{,}44^{\mathrm{m}}.$$

e) Hängende Wiege.

Mittels eines Ringes vom Halbmesser R sei ein mit dem Ringe starr verbundener Körper über einen festen Cylinder vom Halbmesser r gehängt, wobei $r < R$ (Fig. 199). Der Schwerpunkt S der Wiege liege um e unter dem Mittelpunkte des Ringes vom Halbmesser R. Ertheilt man dem Körper eine Rollbewegung links herum, bis der Berührungspunkt sich in P befindet (Fig. 200), und bezeichnet mit Q denjenigen Punkt, der vorher mit P_0 zusammenfiel, so muss $\widehat{PQ} = \widehat{PP_0}$ oder $R\psi = r \cdot \vartheta_1$ sein. Weicht die Gerade QBS, welche ursprünglich lothrecht war ($P_0 B_0 S_0$) um ϑ von der Lothrechten ab, so ist ϑ der Winkel, um den sich der Körper gedreht hat, und zwar ist nach der Figur

Fig. 199.



$$\vartheta = \vartheta_1 - \psi = \vartheta_1 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$
$$= \vartheta_1 \frac{R - r}{R} \quad \text{und}$$
$$\vartheta_1 = \frac{R}{R - r} \vartheta .$$

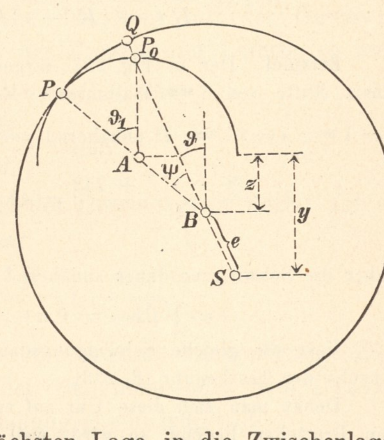
Legt man durch den Mittelpunkt A des festen Kreises eine Wagerechte, so liegt der Mittelpunkt B des beweglichen Kreises in der Tiefe

$$z = \overline{AB} \cdot \cos \vartheta_1 = (R - r) \cos \vartheta_1 ,$$

der Schwerpunkt S aber in der Tiefe

$$y = (R - r) \cos \vartheta_1 + e \cdot \cos \vartheta .$$

Fig. 200.



In der höchsten Lage, die bei einer Schwingung vorkommt, möge ϑ den Werth α erreichen; setzt man dann auch noch

$$\frac{R}{R - r} \alpha = \alpha_1 ,$$

so ist der Werth y in der höchsten Lage

$$y_1 = (R - r) \cos \alpha_1 + e \cos \alpha .$$

Beim Übergang aus der höchsten Lage in die Zwischenlage hat die Schwere die Arbeit geleistet

$$Mg(y - y_1) = Mg\left\{(R - r)(\cos \vartheta_1 - \cos \alpha_1) + e(\cos \vartheta - \cos \alpha)\right\}.$$

Es wird daher nach dem Satze der Arbeit (wie auf S. 256) mit

$$\varrho = PS = \text{annähernd } R + e , \quad \omega^2(\varrho^2 + i^2) = 2g(y - y_1)$$

$$dt = - d\vartheta \sqrt{\frac{(R + e)^2 + i^2}{2g(y - y_1)}} .$$

Daraus folgt in ähnlicher Weise wie auf S. 256

$$dt = -\frac{d\vartheta}{\alpha^2 - \vartheta^2}\sqrt{\frac{(R+e)^2 + i^2}{\left(\frac{R^2}{R-r} + e\right)g}}.$$

Hiermit ist die Schwingungslänge der hängenden Wiege

$$l = \frac{(R+e)^2 + i^2}{\frac{R^2}{R-r} + e}. \tag{28}$$

Besteht der wiegende Körper nur aus einem dünnen Ringe, so wird mit $e = 0$ und $i^2 = R^2$:

$$l = 2(R - r),$$

und schliesslich mit $r = 0$ für den ein physisches Pendel bildenden Ring $l = 2R$, wie schon im 1. Theile, S. 284 gefunden wurde.

Mit $R + e = -h$ und schliesslich $R = \infty$ wird aus der hängenden Wiege wiederum die Wippe mit

$$l = \frac{h^2 + i^2}{Rr - (R-r)h}(R - r) = \frac{h^2 + i^2}{r - h}.$$

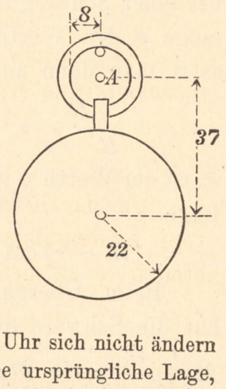
Beispiel: Der in Fig. 201 dargestellte Körper (Taschenuhr) hänge auf einem Stifte von 1^{mm} Halbmesser; es ist $R = 8^{\text{mm}}$; $r = 1^{\text{mm}}$; $e = 37^{\text{mm}}$; i^2 annähernd $= \frac{22^2}{2}$; also (Gl. 28)

$$l = \frac{(8+37)^2 + 242}{\frac{64}{7} + 37} = 49{,}5^{\text{mm}},$$

daher die Schwingungsdauer annähernd

$$t = \sqrt{0{,}0495} = 0{,}22^{\text{s.}}.$$

Fig. 201.



Fast die gleiche Schwingungsdauer hat auch die Unruhe der Taschenuhr (S. 233).

Denkt man sich diese Uhr auf einem schwimmenden Brettchen liegend, so wird, weil die schwingende Unruhe nur unter dem Einfluss innerer Kräfte der Uhr steht, die Momentensumme der Bewegungsgrössen der Uhr sich nicht ändern können (S. 193). Behielte nun das Gehäuse der Uhr seine ursprüngliche Lage, so würde vermöge der Schwingung der Unruhe die Momentensumme der Bewegungsgrössen in Bezug auf die Achse der Unruhe und auch in Bezug auf eine dazu parallele Schwerpunktsachse sich fortwährend ändern. Diese Änderung muss dadurch aufgehoben werden, dass die übrige Uhr kleine Drehschwingungen um die lothrechte Schwerpunktsachse ausführt, welche den Schwingungen der Unruhe stets entgegengesetzt gerichtet sind. Diese Anregung zur Schwingung macht sich auch geltend, wenn man die Uhr nach Fig. 201 aufhängt; stimmt die Schwingungsdauer der aufgehängten Uhr mit derjenigen der Unruhe überein, so kann die aufgehängte Uhr unter günstigen Umständen in Folge der Bewegung der Unruhe in deutlich sichtbare Schwingungen gerathen.

18. Wirkung des Pulvers in der Kanone.

In Folge der Ausdehnung der entwickelten Pulvergase wird dem Geschosse, welches zu Anfang, ebenso wie die Kanone, die Geschwindigkeit Null hatte, eine Geschwindigkeit v beim Verlassen des Rohres ertheilt. Da nun der Gasdruck des Pulvers für die aus Geschoss, Kanone und Lafette bestehende Massengruppe eine innere Kraft ist, so muss, wenn äussere Kräfte von bedeutender Grösse in wagerechter Richtung nicht auftreten, der Gesammtschwerpunkt an der ursprünglichen Stelle verbleiben, oder es muss die Bewegungsgrösse in der Richtung des als nahehezu wagerecht gedachten Rohres Null verbleiben (S. 173). Es werden daher Kanone und Lafette zu einem Rücklaufe mit der Geschwindigkeit v_1 veranlasst. Ist M die Masse, welche das Rohr mit der Geschwindigkeit v verlässt, M_1 die Masse der Kanone und Lafette, so muss

$$-M_1 v_1 + Mv = 0, \quad \text{also}$$

1) $$v_1 = \frac{M}{M_1} v \quad \text{sein.}$$

Die relative Geschwindigkeit des Geschosses in Bezug auf die zurücklaufende Kanone ist offenbar

$$w = v + v_1 = v\left(1 + \frac{M}{M_1}\right).$$

Da das Rohr vom Halbmesser r schraubenlinienförmige Züge vom Ansteigungswinkel α und der Ganghöhe oder dem Drall h besitzt, so entspricht der Verschiebungsgeschwindigkeit

$$w = v\left(1 + \frac{M}{M_1}\right)$$

noch eine Winkelgeschwindigkeit φ von der Grösse

2) $$\varphi = \frac{v}{r \cdot tg\,\alpha}\left(1 + \frac{M}{M_1}\right) = \frac{v \cdot 2\pi}{h}\left(1 + \frac{M}{M_1}\right).$$

Ist nun μ die auf die Längsachse und den Abstand r bezogene Masse des Geschosses, so ist das gesammte Arbeitsvermögen in