b) Wiegendes Pendel in einer Hohlfläche; Hypocykloiden-Wiege.

Die auf einander rollenden Kreise (Fig. 195) mögen die Halbmesser r und R haben. Der Schwerpunkt S des wiegenden Körpers liege wieder um e unterhalb des Mittelpunktes B seines Rollkreises vom Halbmesser r. Im Gleichgewichtszustande möge der Körper die Hohlfläche bei P_0 berühren; ertheilt man ihm eine Rollbewegung rechts herum, bis die Berührung in P erfolgt (Fig. 196), bezeichnet mit Q denjenigen Punkt, der vorher mit P_0 zusammenfiel, so muss $\widehat{PQ} = \widehat{PP_0}$ sein, oder wenn man

$$\measuredangle QBP = \psi,$$

$$\measuredangle P_0AB = \vartheta_1$$

setzt,

$$r \cdot \psi = R \cdot \vartheta_1,$$

mithin $\psi = \vartheta_1 \dfrac{R}{r}$.

Fig. 195.

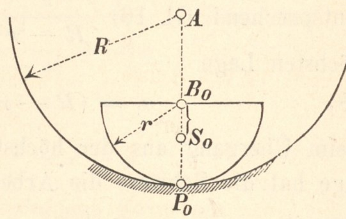
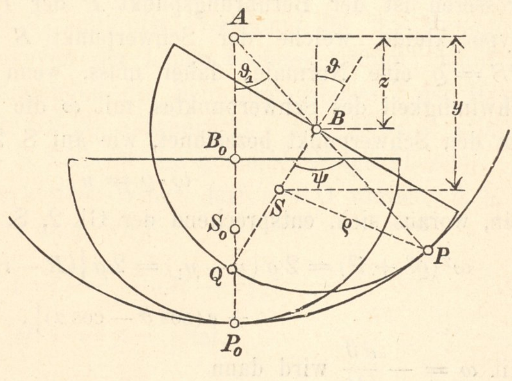


Fig. 196.



Weicht die Gerade BSQ, welche ursprünglich lothrecht war (als $B_0 S_0 P_0$), um ϑ von der Lothrechten ab, so ist ϑ der Winkel, um den sich der Körper gedreht hat, als er aus der Gleichgewichtslage in die jetzige Zwischenlage kam, u. zw. ist nach der Figur

$$\vartheta = \psi - \vartheta_1 = \vartheta_1 \left(\frac{R}{r} - 1\right) = \frac{R - r}{r} \vartheta_1 \quad \text{also}$$

16) $$\vartheta_1 = \frac{r}{R - r} \vartheta.$$

Legt man durch den Mittelpunkt A des festen Kreises vom Halbmesser R eine Wagerechte, so liegt der Mittelpunkt B des beweglichen Kreises in der Tiefe $z = \overline{AB} \cdot \cos \vartheta_1 = (R - r) \cos \vartheta_1$

unter dem festen Punkt A, der Schwerpunkt S aber noch um $e \cdot \cos\vartheta$ tiefer, d. h. in der Tiefe

17) $$y = (R - r)\cos\vartheta_1 + e \cdot \cos\vartheta$$

unter A. In der höchsten Lage, die bei einer Schwingung vorkommt, möge ϑ den Werth α erreichen; setzt man dann noch (entsprechend Gl. 16) $\frac{r}{R-r}\alpha = \alpha_1$, so ist der Werth y in der höchsten Lage

18) $$y_1 = (R - r)\cos\alpha_1 + e \cdot \cos\alpha.$$

Beim Übergang aus der höchsten Lage in die beliebige Zwischenlage hat die Schwere die Arbeit geleistet

19) $$Mg(y - y_1) = Mg\left\{(R-r)(\cos\vartheta_1 - \cos\alpha_1) + e(\cos\vartheta - \cos\alpha)\right\}.$$

Für die ebene Rollbewegung des kleineren Kreises in dem grösseren ist der Berührungspunkt P der Pol; für die verkürzte Hypocykloide, welche der Schwerpunkt S beschreibt, ist daher $PS = \varrho$ eine Normale; daher muss, wenn man mit u die Geschwindigkeit des Schwerpunktes, mit ω die Winkelgeschwindigkeit um den Schwerpunkt bezeichnet, wie auf S. 251,

$$\omega \cdot \varrho = u$$

sein, woraus sich, entsprechend der Gl. 2, S. 251, ergiebt:

$$\omega^2(\varrho^2 + i^2) = 2g(y - y_1) = 2g\left\{(R-r)(\cos\vartheta_1 - \cos\alpha_1) + e(\cos\vartheta - \cos\alpha)\right\}.$$

Mit $\omega = -\frac{d\vartheta}{dt}$ wird dann

$$dt = -d\vartheta\sqrt{\frac{\varrho^2 + i^2}{2g(y - y_1)}}.$$

Auch in diesem Falle möge nur auf s e h r k l e i n e Schwingungen weiter eingegangen werden, so dass annähernd

$$\varrho = r - e;$$

$$\cos\vartheta = 1 - \frac{\vartheta^2}{2}; \quad \cos\vartheta_1 = 1 - \frac{\vartheta_1^2}{2} = 1 - \frac{\vartheta^2}{2}\frac{r^2}{(R-r)^2};$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}; \quad \cos\alpha_1 = 1 - \frac{\alpha^2}{2}\frac{r^2}{(R-r)^2}$$

gesetzt werden kann.

Dann wird nach Gl. 17 und 18

$$2g(y-y_1) = 2g\left\{(R-r)\left(\frac{\alpha^2-\vartheta^2}{2}\right)\frac{r^2}{(R-r)^2} + e\frac{\alpha^2-\vartheta^2}{2}\right\}$$

$$= g(\alpha^2-\vartheta^2)\left(\frac{r^2}{(R-r)} + e\right) \text{ und}$$

$$dt = -\frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2-\vartheta^2}}\sqrt{\frac{(r-e)^2+i^2}{\left(\frac{r^2}{(R-r)}+e\right)g}}.$$ Setzt man

20) $$l = \frac{(r-e)^2+i^2}{\frac{r^2}{R-r}+e},$$

so nimmt der Ausdruck für dt die einfache Form an:

21) $$dt = -\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{d\vartheta}{\alpha^2-\vartheta^2},$$

was nach 1. Theil, S. 77 mit der Gleichung für die Bewegung eines einfachen Pendels von der Länge l übereinstimmt; somit ist für sehr kleine Schwingungen die Schwingungslänge l der Hypocykloiden-Wiege durch Gl. 20 ausgedrückt. Für $R=\infty$ stimmt Gl. 20 mit der Gl. 5, S. 252 für die gemeine Wiege überein.

Bei dieser Hypocykloiden-Wiege darf $e = 0$ werden, d. h. S mit B zusammenfallen; dann wird

$$l = \frac{r^2+i^2}{r^2}(R-r),$$

oder, wenn man $J = M \cdot i^2 = \mu r^2$ setzt,

$$l = (R-r)\left(1+\frac{\mu}{M}\right) \quad \text{und} \quad t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

was dem Sinne nach mit Gl. 7 im 1. Theile, S. 302 übereinstimmt.

Die Hypocykloiden-Wiege hat unter sonst gleichen Umständen eine kleinere Schwingungslänge, mithin auch eine kleinere Schwingungsdauer als die gemeine Wiege.

Eine wiegende Bewegung ist nur möglich, wenn der Körper in der tiefsten Lage Standsicherheit besitzt, wenn also (Fig. 196) bei einer kleinen Drehung nach rechts die Schwerpunkts-Lothrechte links von der Berührungsstelle P liegt. Bei wagerechter Unterstützungsfläche (Fig. 192) beträgt die linksseitige Entfernung der Schwerpunkts-Lothrechten von dem Stützpunkte P nur $e \sin\vartheta$;

diese Grösse muss positiv, d. h. $e > 0$ sein, oder es muss der Schwerpunkt S unter dem Mittelpunkte B liegen. Für $e = 0$ wird die Standsicherheit Null und zugleich $l = \infty$, d. h. es kommt keine Schwingung mehr zu Stande, und für $e < 0$ wird auch die Schwingungslänge < 0, was für ein Pendel widersinnig ist.

Bei der Hypocykloiden-Wiege aber darf der Schwerpunkt S auch oberhalb des Mittelpunktes B liegen, wie aus Fig. 196 ersichtlich. Der linksseitige Abstand der Schwerpunkts-Lothrechten von dem Stützpunkte P beträgt nämlich

$$r \sin \vartheta_1 + e \sin \vartheta,$$

also für kleine Winkel

$$r\vartheta_1 + e\vartheta = \vartheta\left(\frac{r^2}{R - r} + e\right);$$

dieser Werth muss > 0 sein. Es wird also eine Hypocykloiden-Wiege auch noch bei negativem e möglich sein, wenn nur der absolute Werth des negativen e kleiner ist als $\frac{r^2}{R - r}$, oder

22) $$\frac{r^2}{R - r} > - e.$$

Für $\frac{r^2}{R - r} = - e$ würde wiederum $l = \infty$. Es würde z. B. für $R = 2r$

$$r > - e$$

sein müssen, d. h. der Schwerpunkt dürfte nur um weniger als r oberhalb des Punktes B liegen.

c) Wiegendes Pendel auf einer gewölbten Fläche; Epicykloiden-Wiege (Fig. 197).

In diesem Falle muss für Standsicherheit in der Gleichgewichtslage die Bedingung erfüllt sein

$$e \sin \vartheta > r \sin \vartheta_1,$$

oder für kleine Winkel $e \cdot \vartheta > r \cdot \vartheta_1$, und weil

$$r \cdot \psi = R \cdot \vartheta_1, \text{ und zugleich}$$

$$\vartheta = \vartheta_1 + \psi = \vartheta_1\left(1 + \frac{R}{r}\right), \text{ also}$$

$$\vartheta_1 = \vartheta \frac{r}{R + r},$$