die Stösse an den Schienenlücken, welche die wesentlichste Ursache der Schwingungen darstellen in Zeiträumen von 0,45 s. Dies Verhältnis ist ein günstiges, weil jeder zweite Stoss die Einwirkung des ersten auf das Nicken ziemlich wieder aufhebt.

17. Wälzendes oder wiegendes Pendel.

a) Auf ebener Fläche.

Nach 1. Theil, S. 149 ist ein gleichförmiger Kugel- oder Cylinder-Abschnitt, der mit der gekrümmten Fläche sich auf eine wagerechte Ebene stützt, in gesichertem Gleichgewichte. Wird er aus der Gleichgewichtslage gebracht, so führt er unter Einwirkung der Schwere Schwingungen um die Gleichgewichtslage aus; setzt man nun die Berührungsflächen als genügend rauh voraus, dass ein Gleiten an denselben verhütet wird, so entsteht eine Roll- oder Wälzbewegung, und man nennt solche Vorrichtung (Fig. 191) ein wälzendes oder wiegendes Pendel; auch die Kinderwiege gehört zu diesen.

Fig. 191.

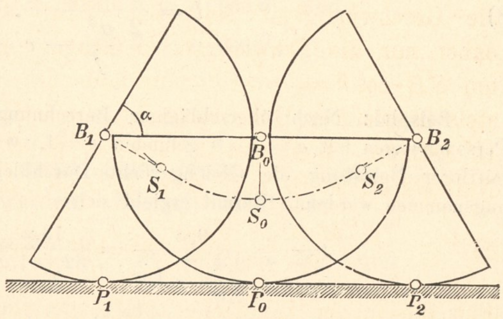
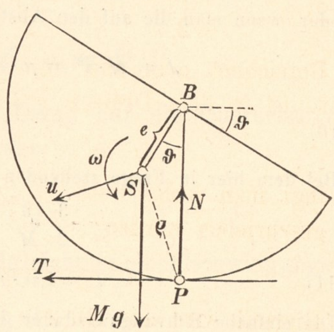


Fig. 192.



In der Mittellage befindet sich der Schwerpunkt S_0 lothrecht unter dem Mittelpunkte B_0 des Rollkreises und zugleich in seiner tiefsten Lage. Beim Wiegen beschreibt der Schwerpunkt einen Theil einer verkürzten Cykloide $S_1 S_0 S_2$. Die grösste Abweichung von der Mittellage werde durch den Winkel α gemessen.

Um die Dauer einer einfachen Schwingung $S_1 S_0 S_2$ zu ermitteln, betrachten wir den Körper in einer Zwischenlage, (Fig. 192), die von der Gleichgewichtslage um den beliebigen Winkel ϑ abweicht. Die Wälzbewegung besteht aus einer Verschiebung des Schwerpunktes S mit der Geschwindigkeit u und einer gleichzeitigen Drehung um die rechtwinklig zur Bildebene stehende Schwerpunktsachse S mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Dann ist das augenblickliche Arbeitsvermögen des Körpers nach S. 185 $\frac{Mu^2}{2} + \frac{J}{2}\omega^2$, worin J das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die genannte Schwerpunktsachse S bedeutet. Es wirken auf den Körper die äusseren Kräfte Mg (durch den Schwerpunkt) und die Widerstände N und T der Berührungsstelle. Die letzteren beiden verrichten bei der Wälzung keine Arbeit, weil ihr Angriffspunkt P die Geschwindigkeit Null hat. Zur Arbeitsverrichtung kommt daher nur die Schwerkraft in Frage. Der Schwerpunkt S liegt um $\overline{SB} \cdot \cos\vartheta = e \cdot \cos\vartheta$ unterhalb des Punktes B, also, da B stets in gleicher Höhe verbleibt, um $e(\cos\vartheta - \cos\alpha)$ unter seiner Höchstlage. Weil nun in letzterer die Geschwindigkeiten u und ω Null waren, so ist nach dem Satze der Arbeit

$$1)\qquad \frac{M \cdot u^2}{2} + \frac{J \cdot \omega^2}{2} = Mg \cdot e(\cos\vartheta - \cos\alpha).$$

Für die in der Bildfläche erfolgende ebene Bewegung bildet der Berührungspunkt P den Augenblicks-Drehpunkt, sonach muss $u = \omega \cdot \overline{PS} = \omega \cdot \varrho$ und auch rechtwinklig zu PS sein. Führt man dies in Gl. 1 ein und ausserdem $J = M \cdot i^2$, so wird

$$2)\qquad \frac{M\omega^2}{2} \cdot \varrho^2 + \frac{M\omega^2}{2} \cdot i^2 = Mg \cdot e(\cos\vartheta - \cos\alpha).$$

Bezeichnet man aber mit r den Halbmesser PB des Rollkreises, so ist in dem Dreieck PSB

$$\varrho^2 = e^2 + r^2 - 2e \cdot r \cdot \cos\vartheta;$$

fügt man rechts noch $+ 2e \cdot r$ und $- 2e \cdot r$ hinzu, so kann auch geschrieben werden

$$\varrho^2 = (r - e)^2 + 2er(1 - \cos\vartheta).$$

Hiermit wird aus Gl. 2:

$$3)\qquad \omega = \sqrt{\frac{2g \cdot e(\cos\vartheta - \cos\alpha)}{(r - e)^2 + 2e \cdot r(1 - \cos\vartheta) + i^2}}.$$

Weil nun ϑ der bis zur Mittellage noch zurückzulegende Drehungswinkel ist, der sich bei der jetzt betrachteten Bewegung verkleinert, so ist

$$\omega = -\frac{d\vartheta}{dt} \quad \text{und}$$

$$4) \qquad dt = -d\vartheta \sqrt{\frac{(r-e)^2 + i^2 + 2e \cdot r(1 - \cos\vartheta)}{2g \cdot e(\cos\vartheta - \cos\alpha)}}.$$

Die Integration dieser Gleichung wird nur unter Annahme kleiner Schwingungswinkel α einfach; alsdann kann man $2e \cdot r(1 - \cos\vartheta)$ gegen die übrigen Glieder des Zählers vernachlässigen; führt man nun noch zur Abkürzung

$$5) \qquad \frac{(r-e)^2 + i^2}{e} = l$$

ein, so ergiebt sich

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{g}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\alpha)}}.$$

Weil diese Gleichung mit der entsprechenden Gleichung für das mathematische Pendel von der Länge l (1. Theil, S. 77) übereinstimmt, so hat das wälzende Pendel unter Voraussetzung **kleiner** Schwingungswinkel gleiche Schwingungsdauer mit einem mathematischen Pendel von der Länge l nach Gl. 5, nämlich

$$6) \qquad t_1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Würde der Körper sich als gewöhnliches physisches Pendel um die Achse B drehen, so wäre nach 1. Theil, S. 279, Gl. 5 die Schwingungslänge

$$7) \qquad l_1 = \frac{J_B}{Me} = \frac{J_S + Me^2}{Me} = \frac{i^2 + e^2}{e}.$$

Es ist also

$$8) \qquad l \gtreqless l_1, \quad \text{wenn} \quad (r-e)^2 \gtreqless e^2.$$

Für den wiegenden Halbcylinder ist (nach 1. Theil, S. 132)

$$e = \frac{4}{3\pi} r = 0{,}424\, r.$$

In Bezug auf die Achse B ist das Trägheitsmoment (nach 1. Theil, S. 272)

$$J_B = \frac{Mr^2}{2},$$

daher $J_S = J_B - M \cdot e^2 = M\left(\frac{r^2}{2} - 0{,}424^2 \cdot r^2\right)$ und

$$i^2 = \frac{J_S}{M} = 0{,}320\, r^2.$$

Hiernach wird die Schwingungslänge der halbcylindrischen Wiege (Gl. 5)

$$9)\qquad l = r\frac{(1 - 0{,}424)^2 + 0{,}320}{0{,}424} = 1{,}537\, r,$$

während für den an der Achse B aufgehängten Halbcylinder die Schwingungslänge

$$10)\qquad l_1 = \frac{J_B}{M \cdot e} = \frac{\frac{r^2}{2}}{0{,}424\, r} = 1{,}179\, r$$

wird. Es ist also thatsächlich $l > l_1$, weil $(r - e)^2 = 0{,}332\, r^2$, e^2 aber nur $= 0{,}180\, r^2$.

Für die wiegende Halbkugel ist (nach 1. Theil, S. 136 u. 273)

$$e = {}^3/_8\, r;\quad J_B = 0{,}4\, M \cdot r^2;\quad J_S = M(0{,}4 - {}^9/_{64})\, r^2;$$
$$i^2 = 0{,}259\, r^2.$$ Daher

$$11)\qquad l = r\frac{(1 - {}^3/_8)^2 + 0{,}259}{{}^3/_8} = 1{,}732\, r;$$

während für die an der Achse B aufgehängte Halbkugel die Schwingungslänge

$$12)\qquad l_1 = \frac{J_B}{M \cdot e} = \frac{0{,}4}{{}^3/_8}\, r = 1{,}067\, r$$

wird. Es ist also wieder $l > l_1$.

Für eine wiegende dünne Halbkugelschale ergiebt sich das Trägheitsmoment J_B leicht aus dem des Halbkugelkörpers. Für letzteren ist

$$J_B = 0{,}4\, M r^2 = 0{,}4 \cdot {}^2/_3\, r^5 \pi = {}^4/_{15}\, r^5 \pi;$$

ändert sich r um dr, so ist die Zunahme von J_B das Trägheitsmoment einer Halbkugelschale von der Wandstärke dr, nämlich ${}^4/_3\, r^4 \pi \cdot dr$; lässt man hierin den Faktor dr fort, so ergiebt sich ${}^4/_3\, r^4 \pi$ als Trägheitsmoment einer Halbkugelfläche, und weil deren Grösse $2 r^2 \pi$ beträgt, so wird für dieselbe

$$J_B = M \cdot \frac{4}{3}\, \frac{r^4 \pi}{2 r^2 \pi} = \frac{2}{3} M \cdot r^2.$$

Da nun (nach 1. Theil, S. 135 und 150) $e = \frac{r}{2}$, so gilt für die Schwerpunktsachse

$$i^2 = \frac{2}{3} r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{5}{12} r^2, \quad \text{daher}$$

13) $$l = r \frac{(1 - 0{,}5)^2 + {}^5/_{12}}{0{,}5} = \frac{4}{3} r;$$

für die an der Achse B hängende Kugelschale aber wird nach Gl. 7

14) $$l_1 = \frac{{}^2/_3\, r^2}{0{,}5\, r} = \frac{4}{3} r;$$

d. h. $l = l_1$, weil $(r - 0{,}5\, r)^2 = (0{,}5\, r)^2$ ist.

Wird ein prismatischer Stab von der Länge a nach Fig. 193 zu einem wälzenden Pendel gestaltet, indem man oben an zwei Seiten kleine Halbcylinder vom Halbmesser r befestigt und diese auf je einer wagerechten Schiene wiegen lässt, so ist $e = 0{,}5\, a$; $i^2 = \frac{a^2}{12}$;

Fig. 193.

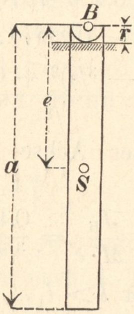
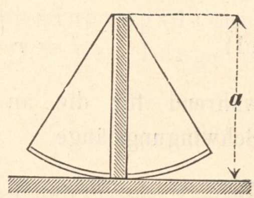


Fig. 194.



15) $$l = a \frac{\left(\frac{r}{a} - 0{,}5\right)^2 + \frac{1}{12}}{0{,}5}$$

$$= a\left(\frac{2}{3} - 2\frac{r}{a} + 2\frac{r^2}{a^2}\right),$$

während für die Drehung um die Achse B (nach 1. Theil, S. 283) einfach $l_1 = {}^2/_3\, a$ ist. Für zwei Werthe von $\frac{r}{a}$ wird Gl. 15 zu $l = {}^2/_3\, a$, nämlich

1. selbstverständlich für $r = 0$;
2. für $r = a = 2e$,

d. h. für eine Wiege, bei welcher der Rollkreis nach Fig. 194 aus einem sehr leichten Kreisbogen vom Halbmesser a gebildet ist. Für $\frac{r}{a} < 1$ ist $l < {}^2/_3\, a$.