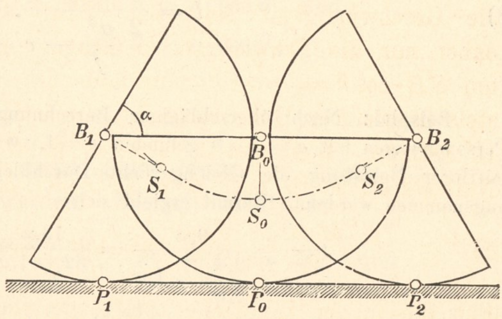
die Stösse an den Schienenlücken, welche die wesentlichste Ursache der Schwingungen darstellen in Zeiträumen von 0,45 s. Dies Verhältnis ist ein günstiges, weil jeder zweite Stoss die Einwirkung des ersten auf das Nicken ziemlich wieder aufhebt.

17. Wälzendes oder wiegendes Pendel.

a) Auf ebener Fläche.

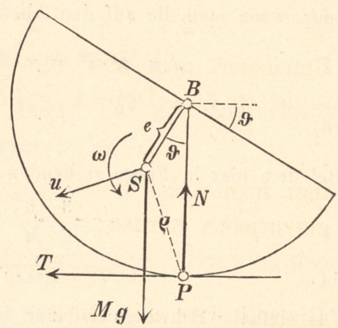
Nach 1. Theil, S. 149 ist ein gleichförmiger Kugel- oder Cylinder-Abschnitt, der mit der gekrümmten Fläche sich auf eine wagerechte Ebene stützt, in gesichertem Gleichgewichte. Wird er aus der Gleichgewichtslage gebracht, so führt er unter Einwirkung der Schwere Schwingungen um die Gleichgewichtslage aus; setzt man nun die Berührungsflächen als genügend rauh voraus, dass ein Gleiten an denselben verhütet wird, so entsteht eine Roll- oder Wälzbewegung, und man nennt solche Vorrichtung (Fig. 191) ein wälzendes oder wiegendes Pendel; auch die Kinderwiege gehört zu diesen.

Fig. 191.



In der Mittellage befindet sich der Schwerpunkt S_0 lothrecht unter dem Mittelpunkte B_0 des Rollkreises und zugleich in seiner tiefsten Lage. Beim Wiegen beschreibt der Schwerpunkt einen Theil einer verkürzten Cykloide $S_1 S_0 S_2$. Die grösste Abweichung von der Mittellage werde durch den Winkel α gemessen.

Fig. 192.



Um die Dauer einer einfachen Schwingung $S_1 S_0 S_2$ zu ermitteln, betrachten wir den Körper in einer Zwischenlage, (Fig. 192), die von der Gleichgewichtslage um den beliebigen Winkel ϑ abweicht. Die Wälzbewegung besteht aus einer Verschiebung des Schwerpunktes S mit der Geschwindigkeit u und einer gleichzeitigen Drehung um die rechtwinklig zur Bildebene stehende Schwerpunktsachse S mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Dann ist das augenblickliche Arbeitsvermögen des Körpers nach S. 185 $\frac{Mu^2}{2} + \frac{J}{2}\omega^2$, worin J das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die genannte Schwerpunktsachse S bedeutet. Es wirken auf den Körper die äusseren Kräfte Mg (durch den Schwerpunkt) und die Widerstände N und T der Berührungsstelle. Die letzteren beiden verrichten bei der Wälzung keine Arbeit, weil ihr Angriffspunkt P die Geschwindigkeit Null hat. Zur Arbeitsverrichtung kommt daher nur die Schwerkraft in Frage. Der Schwerpunkt S liegt um $\overline{SB}\cdot\cos\vartheta = e\cdot\cos\vartheta$ unterhalb des Punktes B, also, da B stets in gleicher Höhe verbleibt, um $e(\cos\vartheta - \cos\alpha)$ unter seiner Höchstlage. Weil nun in letzterer die Geschwindigkeiten u und ω Null waren, so ist nach dem Satze der Arbeit

$$1)\qquad \frac{M\cdot u^2}{2} + \frac{J\cdot\omega^2}{2} = Mg\cdot e(\cos\vartheta - \cos\alpha).$$

Für die in der Bildfläche erfolgende ebene Bewegung bildet der Berührungspunkt P den Augenblicks-Drehpunkt, sonach muss $u = \omega\cdot\overline{PS} = \omega\cdot\varrho$ und auch rechtwinklig zu PS sein. Führt man dies in Gl. 1 ein und ausserdem $J = M\cdot i^2$, so wird

$$2)\qquad \frac{M\omega^2}{2}\cdot\varrho^2 + \frac{M\omega^2}{2}\cdot i^2 = Mg\cdot e(\cos\vartheta - \cos\alpha).$$

Bezeichnet man aber mit r den Halbmesser PB des Rollkreises, so ist in dem Dreieck PSB

$$\varrho^2 = e^2 + r^2 - 2\,e\cdot r\cdot\cos\vartheta;$$

fügt man rechts noch $+\,2\,e\cdot r$ und $-\,2\,e\cdot r$ hinzu, so kann auch geschrieben werden

$$\varrho^2 = (r - e)^2 + 2\,er(1 - \cos\vartheta).$$

Hiermit wird aus Gl. 2:

$$3)\qquad \omega = \sqrt{\frac{2\,g\cdot e(\cos\vartheta - \cos\alpha)}{(r-e)^2 + 2\,e\cdot r(1 - \cos\vartheta) + i^2}}.$$

Weil nun ϑ der bis zur Mittellage noch zurückzulegende Drehungswinkel ist, der sich bei der jetzt betrachteten Bewegung verkleinert, so ist

$$\omega = -\frac{d\vartheta}{dt} \quad \text{und}$$

$$4) \qquad dt = -d\vartheta \sqrt{\frac{(r-e)^2 + i^2 + 2e \cdot r(1-\cos\vartheta)}{2g \cdot e(\cos\vartheta - \cos\alpha)}}.$$

Die Integration dieser Gleichung wird nur unter Annahme **kleiner** Schwingungswinkel α einfach; alsdann kann man $2e \cdot r(1-\cos\vartheta)$ gegen die übrigen Glieder des Zählers vernachlässigen; führt man nun noch zur Abkürzung

$$5) \qquad \frac{(r-e)^2 + i^2}{e} = l$$

ein, so ergiebt sich

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{g}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\alpha)}}.$$

Weil diese Gleichung mit der entsprechenden Gleichung für das mathematische Pendel von der Länge l (1. Theil, S. 77) übereinstimmt, so hat das wälzende Pendel unter Voraussetzung **kleiner** Schwingungswinkel gleiche Schwingungsdauer mit einem mathematischen Pendel von der Länge l nach Gl. 5, nämlich

$$6) \qquad t_1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Würde der Körper sich als gewöhnliches physisches Pendel um die Achse B drehen, so wäre nach 1. Theil, S. 279, Gl. 5 die Schwingungslänge

$$7) \qquad l_1 = \frac{J_B}{Me} = \frac{J_S + Me^2}{Me} = \frac{i^2 + e^2}{e}.$$

Es ist also

$$8) \qquad l \gtreqless l_1, \quad \text{wenn} \quad (r-e)^2 \gtreqless e^2.$$

Für den wiegenden Halbcylinder ist (nach 1. Theil, S. 132)

$$e = \frac{4}{3\pi} r = 0{,}424\, r.$$

In Bezug auf die Achse B ist das Trägheitsmoment (nach 1. Theil, S. 272)

$$J_B = \frac{Mr^2}{2},$$

daher $J_S = J_B - M \cdot e^2 = M\left(\frac{r^2}{2} - 0{,}424^2 \cdot r^2\right)$ und

$$i^2 = \frac{J_S}{M} = 0{,}320\, r^2.$$

Hiernach wird die Schwingungslänge der halbcylindrischen Wiege (Gl. 5)

$$9) \qquad l = r\frac{(1 - 0{,}424)^2 + 0{,}320}{0{,}424} = 1{,}537\, r,$$

während für den an der Achse B aufgehängten Halbcylinder die Schwingungslänge

$$10) \qquad l_1 = \frac{J_B}{M \cdot e} = \frac{\frac{r^2}{2}}{0{,}424\, r} = 1{,}179\, r$$

wird. Es ist also thatsächlich $l > l_1$, weil $(r - e)^2 = 0{,}332\, r^2$, e^2 aber nur $= 0{,}180\, r^2$.

Für die wiegende Halbkugel ist (nach 1. Theil, S. 136 u. 273)

$$e = {}^3/_8\, r; \quad J_B = 0{,}4\, M \cdot r^2; \quad J_S = M(0{,}4 - {}^9/_{64})\, r^2;$$
$$i^2 = 0{,}259\, r^2. \text{ Daher}$$

$$11) \qquad l = r\frac{(1 - {}^3/_8)^2 + 0{,}259}{{}^3/_8} = 1{,}732\, r;$$

während für die an der Achse B aufgehängte Halbkugel die Schwingungslänge

$$12) \qquad l_1 = \frac{J_B}{M \cdot e} = \frac{0{,}4}{{}^3/_8}\, r = 1{,}067\, r$$

wird. Es ist also wieder $l > l_1$.

Für eine wiegende dünne Halbkugelschale ergiebt sich das Trägheitsmoment J_B leicht aus dem des Halbkugelkörpers. Für letzteren ist

$$J_B = 0{,}4\, M r^2 = 0{,}4 \cdot {}^2/_3\, r^5 \pi = {}^4/_{15}\, r^5 \pi;$$

ändert sich r um dr, so ist die Zunahme von J_B das Trägheitsmoment einer Halbkugelschale von der Wandstärke dr, nämlich ${}^4/_3\, r^4 \pi \cdot dr$; lässt man hierin den Faktor dr fort, so ergiebt sich ${}^4/_3\, r^4 \pi$ als Trägheitsmoment einer Halbkugelfläche, und weil deren Grösse $2\, r^2 \pi$ beträgt, so wird für dieselbe

$$J_B = M \cdot \frac{4}{3}\, \frac{r^4 \pi}{2\, r^2 \pi} = \frac{2}{3} M \cdot r^2.$$

Da nun (nach 1. Theil, S. 135 und 150) $e = \frac{r}{2}$, so gilt für die Schwerpunktsachse

$$i^2 = \frac{2}{3} r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{5}{12} r^2, \quad \text{daher}$$

13) $$l = r \frac{(1 - 0{,}5)^2 + {}^5/_{12}}{0{,}5} = \frac{4}{3} r;$$

für die an der Achse B hängende Kugelschale aber wird nach Gl. 7

14) $$l_1 = \frac{{}^2/_3\, r^2}{0{,}5\, r} = \frac{4}{3} r;$$

d. h. $l = l_1$, weil $(r - 0{,}5\, r)^2 = (0{,}5\, r)^2$ ist.

Wird ein prismatischer Stab von der Länge a nach Fig. 193 zu einem wälzenden Pendel gestaltet, indem man oben an zwei Seiten kleine Halbcylinder vom Halbmesser r befestigt und diese auf je einer wagerechten Schiene wiegen lässt, so ist $e = 0{,}5\, a$; $i^2 = \frac{a^2}{12}$;

Fig. 193.

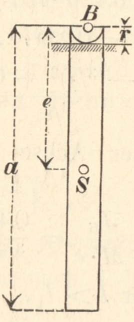
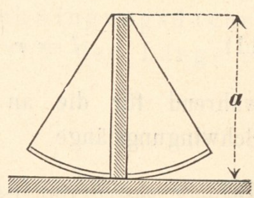


Fig. 194.



15) $$l = a \frac{\left(\frac{r}{a} - 0{,}5\right)^2 + \frac{1}{12}}{0{,}5}$$

$$= a\left(\frac{2}{3} - 2\frac{r}{a} + 2\frac{r^2}{a^2}\right),$$

während für die Drehung um die Achse B (nach 1. Theil, S. 283) einfach $l_1 = {}^2/_3\, a$ ist. Für zwei Werthe von $\frac{r}{a}$ wird Gl. 15 zu $l = {}^2/_3\, a$, nämlich

1. selbstverständlich für $r = 0$;

2. für $r = a = 2e$,

d. h. für eine Wiege, bei welcher der Rollkreis nach Fig. 194 aus einem sehr leichten Kreisbogen vom Halbmesser a gebildet ist. Für $\frac{r}{a} < 1$ ist $l < {}^2/_3\, a$.

b) Wiegendes Pendel in einer Hohlfläche; Hypocykloiden-Wiege.

Die auf einander rollenden Kreise (Fig. 195) mögen die Halbmesser r und R haben. Der Schwerpunkt S des wiegenden Körpers liege wieder um e unterhalb des Mittelpunktes B seines Rollkreises vom Halbmesser r. Im Gleichgewichtszustande möge der Körper die Hohlfläche bei P_0 berühren; ertheilt man ihm eine Rollbewegung rechts herum, bis die Berührung in P erfolgt (Fig. 196), bezeichnet mit Q denjenigen Punkt, der vorher mit P_0 zusammenfiel, so muss $\widehat{PQ} = \widehat{PP_0}$ sein, oder wenn man

$$\measuredangle QBP = \psi,$$

$$\measuredangle P_0AB = \vartheta_1$$

setzt,

$$r \cdot \psi = R \cdot \vartheta_1,$$

mithin $\psi = \vartheta_1 \dfrac{R}{r}$.

Fig. 195.

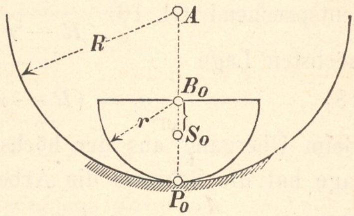
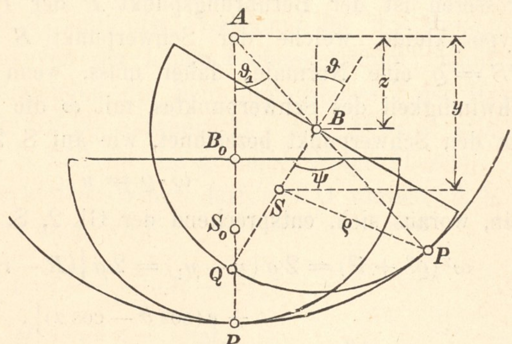


Fig. 196.



Weicht die Gerade BSQ, welche ursprünglich lothrecht war (als $B_0 S_0 P_0$), um ϑ von der Lothrechten ab, so ist ϑ der Winkel, um den sich der Körper gedreht hat, als er aus der Gleichgewichtslage in die jetzige Zwischenlage kam, u. zw. ist nach der Figur

$$\vartheta = \psi - \vartheta_1 = \vartheta_1 \left(\frac{R}{r} - 1\right) = \frac{R-r}{r} \vartheta_1 \quad \text{also}$$

16) $$\vartheta_1 = \frac{r}{R-r} \vartheta.$$

Legt man durch den Mittelpunkt A des festen Kreises vom Halbmesser R eine Wagerechte, so liegt der Mittelpunkt B des beweglichen Kreises in der Tiefe $z = \overline{AB} \cdot \cos\vartheta_1 = (R-r)\cos\vartheta_1$

unter dem festen Punkt A, der Schwerpunkt S aber noch um $e \cdot \cos \vartheta$ tiefer, d. h. in der Tiefe

17) $$y = (R - r) \cos \vartheta_1 + e \cdot \cos \vartheta$$

unter A. In der höchsten Lage, die bei einer Schwingung vorkommt, möge ϑ den Werth α erreichen; setzt man dann noch (entsprechend Gl. 16) $\frac{r}{R - r} \alpha = \alpha_1$, so ist der Werth y in der höchsten Lage

18) $$y_1 = (R - r) \cos \alpha_1 + e \cdot \cos \alpha .$$

Beim Übergang aus der höchsten Lage in die beliebige Zwischenlage hat die Schwere die Arbeit geleistet

19) $$Mg(y - y_1) = Mg\left\{(R - r)(\cos \vartheta_1 - \cos \alpha_1) + e(\cos \vartheta - \cos \alpha)\right\}.$$

Für die ebene Rollbewegung des kleineren Kreises in dem grösseren ist der Berührungspunkt P der Pol; für die verkürzte Hypocykloide, welche der Schwerpunkt S beschreibt, ist daher $PS = \varrho$ eine Normale; daher muss, wenn man mit u die Geschwindigkeit des Schwerpunktes, mit ω die Winkelgeschwindigkeit um den Schwerpunkt bezeichnet, wie auf S. 251,

$$\omega \cdot \varrho = u$$

sein, woraus sich, entsprechend der Gl. 2, S. 251, ergiebt:

$$\omega^2 (\varrho^2 + i^2) = 2g(y - y_1) = 2g\left\{(R - r)(\cos \vartheta_1 - \cos \alpha_1) \right.$$
$$\left. + e(\cos \vartheta - \cos \alpha)\right\}.$$

Mit $\omega = -\frac{d\vartheta}{dt}$ wird dann

$$dt = -d\vartheta \sqrt{\frac{\varrho^2 + i^2}{2g(y - y_1)}}.$$

Auch in diesem Falle möge nur auf sehr kleine Schwingungen weiter eingegangen werden, so dass annähernd

$$\varrho = r - e;$$

$$\cos \vartheta = 1 - \frac{\vartheta^2}{2}; \quad \cos \vartheta_1 = 1 - \frac{\vartheta_1^{\,2}}{2} = 1 - \frac{\vartheta^2}{2} \frac{r^2}{(R - r)^2};$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}; \quad \cos \alpha_1 = 1 - \frac{\alpha^2}{2} \frac{r^2}{(R - r)^2}$$

gesetzt werden kann.

Dann wird nach Gl. 17 und 18

$$2g(y-y_1) = 2g\left\{(R-r)\left(\frac{\alpha^2-\vartheta^2}{2}\right)\frac{r^2}{(R-r)^2} + e\frac{\alpha^2-\vartheta^2}{2}\right\}$$

$$= g(\alpha^2-\vartheta^2)\left(\frac{r^2}{(R-r)} + e\right) \text{ und}$$

$$dt = -\frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2-\vartheta^2}}\sqrt{\frac{(r-e)^2+i^2}{\left(\frac{r^2}{(R-r)}+e\right)g}}. \text{ Setzt man}$$

20) $$l = \frac{(r-e)^2+i^2}{\frac{r^2}{R-r}+e},$$

so nimmt der Ausdruck für dt die einfache Form an:

21) $$dt = -\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{d\vartheta}{\alpha^2-\vartheta^2},$$

was nach 1. Theil, S. 77 mit der Gleichung für die Bewegung eines einfachen Pendels von der Länge l übereinstimmt; somit ist für sehr kleine Schwingungen die Schwingungslänge l der Hypocykloiden-Wiege durch Gl. 20 ausgedrückt. Für $R=\infty$ stimmt Gl. 20 mit der Gl. 5, S. 252 für die gemeine Wiege überein.

Bei dieser Hypocykloiden-Wiege darf $e=0$ werden, d. h. S mit B zusammenfallen; dann wird

$$l = \frac{r^2+i^2}{r^2}(R-r),$$

oder, wenn man $J = M\cdot i^2 = \mu r^2$ setzt,

$$l = (R-r)\left(1+\frac{\mu}{M}\right) \quad \text{und} \quad t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

was dem Sinne nach mit Gl. 7 im 1. Theile, S. 302 übereinstimmt.

Die Hypocykloiden-Wiege hat unter sonst gleichen Umständen eine kleinere Schwingungslänge, mithin auch eine kleinere Schwingungsdauer als die gemeine Wiege.

Eine wiegende Bewegung ist nur möglich, wenn der Körper in der tiefsten Lage Standsicherheit besitzt, wenn also (Fig. 196) bei einer kleinen Drehung nach rechts die Schwerpunkts-Lothrechte links von der Berührungsstelle P liegt. Bei wagerechter Unterstützungsfläche (Fig. 192) beträgt die linksseitige Entfernung der Schwerpunkts-Lothrechten von dem Stützpunkte P nur $e\sin\vartheta$;

diese Grösse muss positiv, d. h. $e > 0$ sein, oder es muss der Schwerpunkt S unter dem Mittelpunkte B liegen. Für $e = 0$ wird die Standsicherheit Null und zugleich $l = \infty$, d. h. es kommt keine Schwingung mehr zu Stande, und für $e < 0$ wird auch die Schwingungslänge < 0, was für ein Pendel widersinnig ist.

Bei der Hypocykloiden-Wiege aber darf der Schwerpunkt S auch oberhalb des Mittelpunktes B liegen, wie aus Fig. 196 ersichtlich. Der linksseitige Abstand der Schwerpunkts-Lothrechten von dem Stützpunkte P beträgt nämlich

$$r \sin \vartheta_1 + e \sin \vartheta,$$

also für kleine Winkel

$$r \vartheta_1 + e \vartheta = \vartheta \left(\frac{r^2}{R - r} + e \right);$$

dieser Werth muss > 0 sein. Es wird also eine Hypocykloiden-Wiege auch noch bei negativem e möglich sein, wenn nur der absolute Werth des negativen e kleiner ist als $\frac{r^2}{R - r}$, oder

$$\frac{r^2}{R - r} > -e. \tag{22}$$

Für $\frac{r^2}{R - r} = -e$ würde wiederum $l = \infty$. Es würde z. B. für $R = 2r$

$$r > -e$$

sein müssen, d. h. der Schwerpunkt dürfte nur um weniger als r oberhalb des Punktes B liegen.

c) Wiegendes Pendel auf einer gewölbten Fläche; Epicykloiden-Wiege (Fig. 197).

In diesem Falle muss für Standsicherheit in der Gleichgewichtslage die Bedingung erfüllt sein

$$e \sin \vartheta > r \sin \vartheta_1,$$

oder für kleine Winkel $e \cdot \vartheta > r \cdot \vartheta_1$, und weil

$$r \cdot \psi = R \cdot \vartheta_1, \text{ und zugleich}$$

$$\vartheta = \vartheta_1 + \psi = \vartheta_1 \left(1 + \frac{R}{r} \right), \text{ also}$$

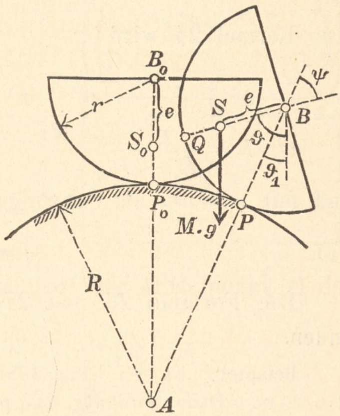
$$\vartheta_1 = \vartheta \frac{r}{R + r},$$

so folgt als Bedingung der Standsicherheit

$$23)\qquad e > \frac{r^2}{R + r}.$$

Bei der Epicykloiden-Wiege muss der Schwerpunkt also tiefer liegen als bei der einfachen Cykloiden-Wiege.

Fig. 197.



Die gleichen Erwägungen, wie sie bei der Hypocykloiden-Wiege angestellt wurden, führen hier zu den Gleichungen

$$24)\qquad l = \frac{(r - e)^2 + i^2}{e - \frac{r^2}{R + r}} \quad \text{und}$$

$$25)\qquad dt = -\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}},$$

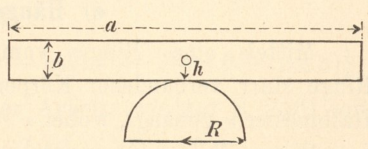
worin l wieder die Schwingungslänge der Wiege bedeutet. $R = \infty$ führt auch hier wieder zur einfachen Cykloiden-Wiege mit

$$l = \frac{(r - e)^2 + i^2}{e}.$$

d) Die Wippe.

Wird in Fig. 197 der Halbmesser r des rollenden Kreises unendlich gross, so haben wir es mit dem Abwälzen einer ebenen Fläche, z. B. der Unterfläche einer Bohle, auf einem cylindrischen Baume, mit einer Wippe (Fig. 198), zu thun. Doch sind für diesen Fall die Formeln 23 und 24 nicht unmittelbar zu verwenden, weil $r = \infty$ auch $e = \infty$ bedingen würde. Vielmehr muss die Höhe des Schwerpunktes der wippenden Bohle über ihrer Unterfläche etwa mit h eingeführt, und in den

Fig. 198.



Formeln 23 und 24 $r - e$ mit h und e mit $r - h$ vertauscht werden. Dann wird aus Formel 23:

$$r - h > \frac{r^2}{R + r}; \quad h < r - \frac{r^2}{R + r} = \frac{Rr}{R + r} = \frac{R}{\frac{R}{r} + 1}$$

und, weil $r = \infty$, verlangt die Standsicherheit der Wippe

26) $$h < R.$$

Aus Formel 24 wird

$$l = \frac{h^2 + i^2}{r - h - \frac{r^2}{R + r}} = \frac{h^2 + i^2}{Rr - h(R + r)}(R + r) = \frac{(h^2 + i^2)\left(\frac{R}{r} + 1\right)}{R - h\left(\frac{R}{r} + 1\right)}$$

und mit $r = \infty$ als Schwingungslänge der Wippe

27) $$l = \frac{h^2 + i^2}{R - h}.$$

Die Formeln 26 und 27 lassen sich auch leicht unmittelbar finden.

Beispiel: Es sei (Fig. 198) $a = 2^{\mathrm{m}}$; $b = 5^{\mathrm{cm}} = 0{,}05^{\mathrm{m}}$; $h = 0{,}025^{\mathrm{m}}$ $R = 0{,}1^{\mathrm{m}}$. Dann wird für das polare Trägheitsmoment des Rechtecks nach 1. Theil, S. 271:

$$i^2 = \frac{a^2 + b^2}{12} = \frac{4 + 0{,}05^2}{12} = 0{,}334, \quad \text{daher}$$

$$l = \frac{0{,}0006 + 0{,}334}{0{,}1 - 0{,}025} = 4{,}46^{\mathrm{m}}$$

und die Dauer einer einfachen Schwingung

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \text{rund } \sqrt{l} = 2{,}1^{\mathrm{s}}.$$

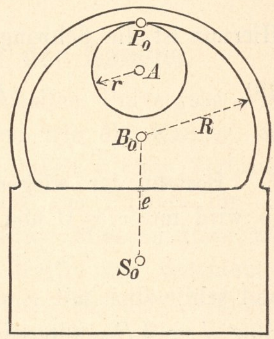
Offenbar ist für derartige Bohlenwippen genügend genau

$$l = \frac{a^2}{12(R - h)} = \frac{a^2}{12\left(R - \frac{b}{2}\right)} = 4{,}44^{\mathrm{m}}.$$

e) Hängende Wiege.

Mittels eines Ringes vom Halbmesser R sei ein mit dem Ringe starr verbundener Körper über einen festen Cylinder vom Halbmesser r gehängt, wobei $r < R$ (Fig. 199). Der Schwerpunkt S der Wiege liege um e unter dem Mittelpunkte des Ringes vom Halbmesser R. Ertheilt man dem Körper eine Rollbewegung links herum, bis der Berührungspunkt sich in P befindet (Fig. 200), und bezeichnet mit Q denjenigen Punkt, der vorher mit P_0 zusammenfiel, so muss $\widehat{PQ} = \widehat{PP_0}$ oder $R\psi = r \cdot \vartheta_1$ sein. Weicht die Gerade QBS, welche ursprünglich lothrecht war $(P_0 B_0 S_0)$ um ϑ von der Lothrechten ab, so ist ϑ der Winkel, um den sich der Körper gedreht hat, und zwar ist nach der Figur

Fig. 199.



$$\vartheta = \vartheta_1 - \psi = \vartheta_1 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

$$= \vartheta_1 \frac{R - r}{R} \quad \text{und}$$

$$\vartheta_1 = \frac{R}{R - r} \vartheta.$$

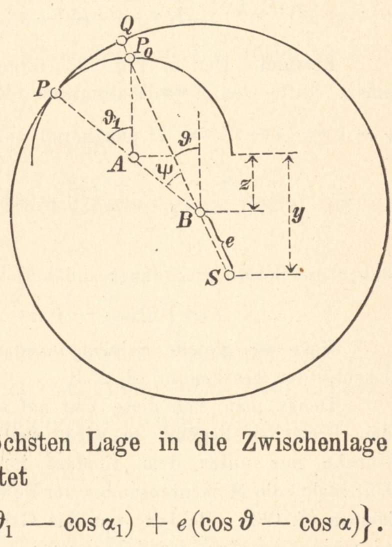
Legt man durch den Mittelpunkt A des festen Kreises eine Wagerechte, so liegt der Mittelpunkt B des beweglichen Kreises in der Tiefe

$$z = \overline{AB} \cdot \cos \vartheta_1 = (R - r) \cos \vartheta_1,$$

der Schwerpunkt S aber in der Tiefe

$$y = (R - r) \cos \vartheta_1 + e \cdot \cos \vartheta.$$

Fig. 200.



In der höchsten Lage, die bei einer Schwingung vorkommt, möge ϑ den Werth α erreichen; setzt man dann auch noch

$$\frac{R}{R - r} \alpha = \alpha_1,$$

so ist der Werth y in der höchsten Lage

$$y_1 = (R - r) \cos \alpha_1 + e \cos \alpha.$$

Beim Übergang aus der höchsten Lage in die Zwischenlage hat die Schwere die Arbeit geleistet

$$Mg(y - y_1) = Mg\left\{(R - r)(\cos \vartheta_1 - \cos \alpha_1) + e(\cos \vartheta - \cos \alpha)\right\}.$$

Es wird daher nach dem Satze der Arbeit (wie auf S. 256) mit

$$\varrho = PS = \text{annähernd } R + e, \quad \omega^2(\varrho^2 + i^2) = 2g(y - y_1)$$

$$dt = -d\vartheta \sqrt{\frac{(R + e)^2 + i^2}{2g(y - y_1)}}.$$

Daraus folgt in ähnlicher Weise wie auf S. 256

$$dt = -\frac{d\vartheta}{\alpha^2 - \vartheta^2}\sqrt{\frac{(R+e)^2 + i^2}{\left(\frac{R^2}{R-r} + e\right)g}}.$$

Hiermit ist die Schwingungslänge der hängenden Wiege

28) $$l = \frac{(R+e)^2 + i^2}{\frac{R^2}{R-r} + e}.$$

Besteht der wiegende Körper nur aus einem dünnen Ringe, so wird mit $e = 0$ und $i^2 = R^2$:

$$l = 2(R - r),$$

und schliesslich mit $r = 0$ für den ein physisches Pendel bildenden Ring $l = 2R$, wie schon im 1. Theile, S. 284 gefunden wurde.

Mit $R + e = -h$ und schliesslich $R = \infty$ wird aus der hängenden Wiege wiederum die Wippe mit

$$l = \frac{h^2 + i^2}{Rr - (R-r)h}(R - r) = \frac{h^2 + i^2}{r - h}.$$

Beispiel: Der in Fig. 201 dargestellte Körper (Taschenuhr) hänge auf einem Stifte von 1^{mm} Halbmesser; es ist $R = 8^{\mathrm{mm}}$; $r = 1^{\mathrm{mm}}$; $e = 37^{\mathrm{mm}}$; i^2 annähernd $= \frac{22^2}{2}$; also (Gl. 28)

$$l = \frac{(8 + 37)^2 + 242}{\frac{64}{7} + 37} = 49{,}5^{\mathrm{mm}},$$

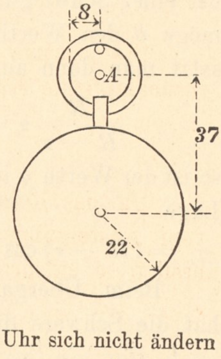


Fig. 201.

daher die Schwingungsdauer annähernd

$$t = \sqrt{0{,}0495} = 0{,}22^{\mathrm{s}}.$$

Fast die gleiche Schwingungsdauer hat auch die Unruhe der Taschenuhr (S. 233).

Denkt man sich diese Uhr auf einem schwimmenden Brettchen liegend, so wird, weil die schwingende Unruhe nur unter dem Einfluss innerer Kräfte der Uhr steht, die Momentensumme der Bewegungsgrössen der Uhr sich nicht ändern können (S. 193). Behielte nun das Gehäuse der Uhr seine ursprüngliche Lage, so würde vermöge der Schwingung der Unruhe die Momentensumme der Bewegungsgrössen in Bezug auf die Achse der Unruhe und auch in Bezug auf eine dazu parallele Schwerpunktsachse sich fortwährend ändern. Diese Änderung muss dadurch aufgehoben werden, dass die übrige Uhr kleine Drehschwingungen um die lothrechte Schwerpunktsachse ausführt, welche den Schwingungen der Unruhe stets entgegengesetzt gerichtet sind. Diese Anregung zur Schwingung macht sich auch geltend, wenn man die Uhr nach Fig. 201 aufhängt; stimmt die Schwingungsdauer der aufgehängten Uhr mit derjenigen der Unruhe überein, so kann die aufgehängte Uhr unter günstigen Umständen in Folge der Bewegung der Unruhe in deutlich sichtbare Schwingungen gerathen.

18. Wirkung des Pulvers in der Kanone.

In Folge der Ausdehnung der entwickelten Pulvergase wird dem Geschosse, welches zu Anfang, ebenso wie die Kanone, die Geschwindigkeit Null hatte, eine Geschwindigkeit v beim Verlassen des Rohres ertheilt. Da nun der Gasdruck des Pulvers für die aus Geschoss, Kanone und Lafette bestehende Massengruppe eine innere Kraft ist, so muss, wenn äussere Kräfte von bedeutender Grösse in wagerechter Richtung nicht auftreten, der Gesammtschwerpunkt an der ursprünglichen Stelle verbleiben, oder es muss die Bewegungsgrösse in der Richtung des als nahehezu wagerecht gedachten Rohres Null verbleiben (S. 173). Es werden daher Kanone und Lafette zu einem Rücklaufe mit der Geschwindigkeit v_1 veranlasst. Ist M die Masse, welche das Rohr mit der Geschwindigkeit v verlässt, M_1 die Masse der Kanone und Lafette, so muss

$$-M_1 v_1 + Mv = 0, \quad \text{also}$$

1) $$v_1 = \frac{M}{M_1} v \quad \text{sein.}$$

Die relative Geschwindigkeit des Geschosses in Bezug auf die zurücklaufende Kanone ist offenbar

$$w = v + v_1 = v\left(1 + \frac{M}{M_1}\right).$$

Da das Rohr vom Halbmesser r schraubenlinienförmige Züge vom Ansteigungswinkel α und der Ganghöhe oder dem Drall h besitzt, so entspricht der Verschiebungsgeschwindigkeit

$$w = v\left(1 + \frac{M}{M_1}\right)$$

noch eine Winkelgeschwindigkeit φ von der Grösse

2) $$\varphi = \frac{v}{r \cdot tg\,\alpha}\left(1 + \frac{M}{M_1}\right) = \frac{v \cdot 2\pi}{h}\left(1 + \frac{M}{M_1}\right).$$

Ist nun μ die auf die Längsachse und den Abstand r bezogene Masse des Geschosses, so ist das gesammte Arbeitsvermögen in