am Boden, das zweite Glied auf den Luftwiderstand. Zugleich bedeutet α_0 das Gefälle, auf dem das Rad mit sehr geringer Geschwindigkeit c ohne Kraftaufwand läuft. Die Reibungswiderstände sind an einem gut gearbeiteten und gut unterhaltenen Rade sehr gering; nicht unerheblich aber ist der Rollwiderstand auch auf guter Fahrstrasse, weil das Eindrücken des Luftreifen bei der Berührung mit dem Boden Quetschungen verursacht, die, wie schon im 1. Theile, S. 251 erläutert wurde, Gleitungen und daher Reibungswiderstände zur Folge haben. Eingehende Versuche darüber fehlen noch. Einstweilen möchten wir nach Angaben des Herrn Landes-Bauinspektors Gloystein in Celle für gute Strasse und gutes Rad $\alpha_0 = 0{,}007$ schätzen. Die Widerstandsfläche F, welche der Radfahrer der Luft darbietet, kann man unter günstigen Umständen zu $0{,}5^{\text{qm}}$ annehmen. Mit $\gamma = 1{,}24^{\text{kg}}/_{\text{cbm}}$ Luftgewicht ergiebt sich dann der Luftwiderstand zu

$$\frac{\gamma}{g} F \cdot c^2 = \frac{1{,}24}{9{,}81} \cdot 0{,}5 \cdot c^2 = 0{,}063 \cdot c^2$$

in Kilogrammen, wenn c in $^{\text{m}}/_{\text{s.}}$ ausgedrückt ist. Bei einem Gesammtgewichte des besetzten Rades $(M + M_1)\, g = 90^{\text{kg}}$ würde hiernach das Gleichgewichtsgefälle

$$\alpha_1 = 0{,}007 + \frac{0{,}063}{90} c^2 = 0{,}007 \left(1 + \frac{c^2}{10}\right),$$

also bei $$c = 4{,}5^{\text{m}}/_{\text{s.}} \; (= 16{,}2^{\text{km}}/_{\text{h.}})$$

$$\alpha_1 = 0{,}007 \left(1 + \frac{4{,}5^2}{10}\right) = 0{,}021 = \frac{1}{47} \quad \text{werden.}$$

Daher ist auf wagerechter Bahn zur gleichmässigen Bewegung des Rades eine parallel zur Bahn wirkend gedachte Zugkraft

$$K = (M + M_1)\, g \cdot \alpha_1 = 90 \cdot 0{,}021 = 1{,}89^{\text{kg}}$$

und eine sekundliche Arbeit

$$E = K \cdot c = 1{,}89 \cdot 4{,}5 = 8{,}51^{\text{mkg}}/_{\text{s.}} \quad \text{erforderlich.}$$

Ist die Kettenübersetzung so eingerichtet, dass bei der Geschwindigkeit von $4{,}5^{\text{m}}/_{\text{s.}}$ die Kurbelachse in der Sekunde eine Umdrehung macht und beträgt der Kurbelhalbmesser $0{,}17^{\text{m}}$, der Hub der Füfse also $0{,}34^{\text{m}}$, so ist die mittlere Druckkraft des Fufses auf die Tretkurbel

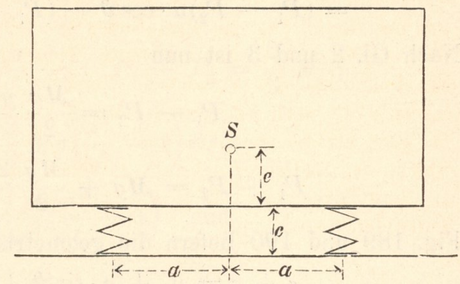
$$P = \frac{8{,}51}{0{,}34} = 25^{\text{kg}}.$$

16. Elastische Schwingungen eines Eisenbahnwagens.

Von den Schwingungs-Bewegungen eines Eisenbahnwagens treten besonders hervor: die lothrechte Verschiebung, das Wogen, und die Drehschwingung um die wagerechte Querachse durch den

Schwerpunkt, das Nicken. Ist die der Gleichgewichts-Belastung entsprechende Durchbiegung der Tragfedern f, so ist nach S. 61 diese Länge zugleich die Schwingungslänge l des Wogens und die Dauer einer einfachen Schwingung

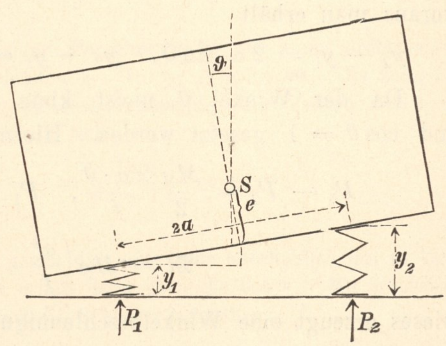
Fig. 189.



$$1) \qquad t_1 = \pi \sqrt{\frac{f}{g}}.$$

Die Bewegung des Nickens werde an einem von vier Federn getragenen Fuhrwerk entwickelt. Fig. 189 stelle dasselbe im Gleichgewichtszustande dar. Wird der Wagen um einen kleinen Winkel ϑ um die Querachse S gedreht, so wird (Fig. 190) das linksseitige Federpaar um $c - y_1$ stärker, das rechtsseitige um $y_2 - c$ weniger stark zusammengedrückt als im Gleichgewichtszustande.

Fig. 190.



Die Federdrücke gehen in Folge dessen aus den Werthen $\frac{1}{2} Mg$ über in P_1 und P_2, wobei

$$\frac{P_1 - \frac{1}{2} M \cdot g}{\frac{1}{2} Mg} = \frac{c - y_1}{f} \quad \text{also}$$

$$2) \qquad P_1 = \frac{Mg}{2}\left(1 + \frac{c - y_1}{f}\right) \quad \text{und ebenso}$$

$$3) \qquad P_2 = \frac{Mg}{2}\left(1 - \frac{y_2 - c}{f}\right) \quad \text{ist.}$$

Der Hebelarm von P_1 in Bezug auf S ist nach Fig. 190:

$$a \cos\vartheta - e \sin\vartheta,$$

der von P_2:
$$a \cos\vartheta + e \sin\vartheta.$$

Daher entsteht ein der Vergrösserung des Drehungswinkels ϑ entgegen wirkendes Moment

$$\mathfrak{M} = P_1(a \cdot \cos\vartheta - e \cdot \sin\vartheta) - P_2(a \cdot \cos\vartheta + e \cdot \sin\vartheta)$$
$$= (P_1 - P_2)a \cdot \cos\vartheta - (P_1 + P_2)e \cdot \sin\vartheta.$$

Nach Gl. 2 und 3 ist nun

$$P_1 - P_2 = \frac{Mg}{2}\frac{y_2 - y_1}{f};$$
$$P_1 + P_2 = Mg + \frac{Mg}{2}\frac{2c - (y_2 + y_1)}{f}.$$

Fig. 189 und 190 liefern die geometrischen Beziehungen

$$e + c = y_1 + a \cdot \sin\vartheta + e \cdot \cos\vartheta \quad \text{und}$$
$$e + c = y_2 - a \cdot \sin\vartheta + e \cdot \cos\vartheta,$$

woraus man erhält

$$y_2 - y_1 = 2a \cdot \sin\vartheta, \quad y_2 + y_1 = 2c + 2e(1 - \cos\vartheta).$$

Da der Winkel ϑ meist klein bleibt, so möge $\sin\vartheta = \vartheta$ und $\cos\vartheta = 1$ gesetzt werden. Hiermit wird dann

$$P_1 - P_2 = \frac{Mg}{2}\frac{2a \cdot \vartheta}{f}, \quad P_1 + P_2 = Mg \quad \text{und}$$
$$\mathfrak{M} = Mg\left(\frac{a^2}{f} - e\right)\vartheta.$$

Dieses erzeugt eine Winkelbeschleunigung (analog S. 231)

4) $$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{\mathfrak{M}}{J} = -k^2\vartheta, \quad \text{wenn}$$
$$k^2 = \frac{Mg}{J}\left(\frac{a^2}{f} - e\right) \quad \text{und} \quad J = M \cdot i^2$$

das Trägheitsmoment des Wagens in Bezug auf die Querachse S bedeutet, womit man auch schreiben kann

5) $$k^2 = \frac{g}{i^2}\left(\frac{a^2}{f} - e\right).$$

Gl. 4 ist wieder (s. S. 231) die Differentialgleichung einer Schwingungsbewegung von der Schwingungslänge

6) $$l = \frac{g}{k^2} = \frac{i^2}{\frac{a^2}{f} - e}.$$

Für einen **dreiachsigen** Wagen, dessen Endachsen den Abstand a von der Mittelachse haben, bleibt letztere von der Schwingung ziemlich unberührt. Unter der Voraussetzung, dass im Gleichgewichtszustande sämmtliche Federn gleich stark belastet sind, wird dann

$$P_1 - P_2 = \frac{2}{3} Mg \frac{a \cdot \vartheta}{f}; \quad P_1 + P_2 = \frac{2}{3} Mg;$$

$$\mathfrak{M} = \frac{2}{3} Mg \left(\frac{a^2}{f} - e \right) \vartheta;$$

7) $$k^2 = \frac{2}{3} \frac{g}{i^2} \left(\frac{a^2}{f} - e \right) \quad \text{und}$$

8) $$l = \frac{3}{2} \frac{i^2}{\frac{a^2}{f} - e}.$$

Beispiel: Nach überschlägiger Berechnung ist für einen dreiachsigen Personenwagen mit $a = 3{,}15^{\mathrm{m}}$ gefunden $e = 1{,}15^{\mathrm{m}}$; $i^2 = 9{,}03^{\mathrm{qm}}$. Es kann bei mittlerer Belastung die Gleichgewichts-Durchbiegung der Federn $f = 0{,}16^{\mathrm{m}}$ angenommen werden. Hiermit ergiebt sich

$$l = \frac{3}{2} \frac{9{,}03}{\frac{9{,}92}{0{,}16} - 1{,}15} = \frac{13{,}55}{62 - 1{,}15} = 0{,}22^{\mathrm{m}}.$$

Da das zweite Glied im Nenner gegen das erste sehr unerheblich ist, so kann man es wohl vernachlässigen und erhält dann ebenfalls $0{,}22^{\mathrm{m}}$. Mit Rücksicht auf dieses Ergebnis kann man statt Gl. 8 kürzer schreiben:

9) $$l = \frac{3}{2} f \frac{i^2}{a^2},$$

oder, wenn man die auf den Abstand a bezogene Masse μ mit

$$J = M \cdot i^2 = \mu \cdot a^2 \quad \text{also} \quad \frac{i^2}{a^2} = \frac{\mu}{M} \quad \text{einführt,}$$

10) $$l = \frac{3}{2} \frac{\mu}{M} f.$$

Bei dem hier in Frage stehenden Personenwagen ergiebt sich

$$\frac{3}{2} \frac{\mu}{M} \quad \text{zu} \quad 1{,}37, \quad \text{daher}$$

11) $$l = 1{,}38 \cdot f = 1{,}37 \cdot 0{,}16 = 0{,}22^{\mathrm{m}}.$$

Die einfache Schwingungsdauer des Wogens ist (Gl. 1) $t_1 = 0{,}4^{\mathrm{s}}$., mit $2^1/_2$ einfachen oder $1^1/_4$ Doppelschwingungen in der Sekunde; diejenige des Nickens $t_2 = 0{,}47^{\mathrm{s}}$., mit 2,13 einfachen oder 1,06 Doppelschwingungen in der Sekunde. Bei etwa 9^{m} Schienenlänge und 20^{m} sekundlicher Geschwindigkeit erfolgen die Stösse an den Schienenlücken, welche die wesentlichste Ursache der Schwingungen darstellen in Zeiträumen von 0,45 s. Dies Verhältnis ist ein günstiges, weil jeder zweite Stoss die Einwirkung des ersten auf das Nicken ziemlich wieder aufhebt.

17. Wälzendes oder wiegendes Pendel.

a) Auf ebener Fläche.

Nach 1. Theil, S. 149 ist ein gleichförmiger Kugel- oder Cylinder-Abschnitt, der mit der gekrümmten Fläche sich auf eine wagerechte Ebene stützt, in gesichertem Gleichgewichte. Wird er aus der Gleichgewichtslage gebracht, so führt er unter Einwirkung der Schwere Schwingungen um die Gleichgewichtslage aus; setzt man nun die Berührungsflächen als genügend rauh voraus, dass ein Gleiten an denselben verhütet wird, so entsteht eine Roll- oder Wälzbewegung, und man nennt solche Vorrichtung (Fig. 191) ein wälzendes oder wiegendes Pendel; auch die Kinderwiege gehört zu diesen.

Fig. 191.

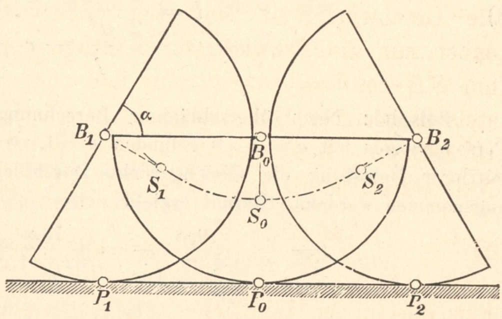
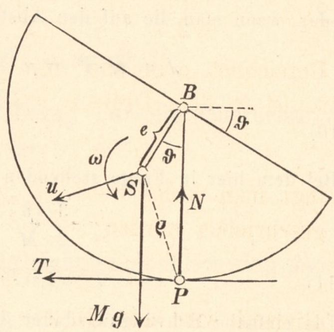


Fig. 192.



In der Mittellage befindet sich der Schwerpunkt S_0 lothrecht unter dem Mittelpunkte B_0 des Rollkreises und zugleich in seiner tiefsten Lage. Beim Wiegen beschreibt der Schwerpunkt einen Theil einer verkürzten Cykloide $S_1 S_0 S_2$. Die grösste Abweichung von der Mittellage werde durch den Winkel α gemessen.

Um die Dauer einer einfachen Schwingung $S_1 S_0 S_2$ zu ermitteln, betrachten wir den Körper in einer Zwischenlage, (Fig. 192), die